

Санкт-Петербургский национальный исследовательский
университет информационных технологий, механики и оптики

Физический факультет

Задачи Открытой Олимпиады по физике 2021/22 уч. года

ІІТМО

10 мая 2023 г.

Оглавление

Отборочный этап

Первый тур отборочного этапа	3
7-8 класс	3
9-10 класс	8
11 класс	12
Второй тур отборочного этапа	16
7-8 класс	16
9-10 класс	21
11 класс	26

Финальный этап

Теоретический тур финального этапа	31
7-8 класс	31
9-10 класс	40
11 класс	51
Экспериментальный тур финального этапа	62
7-8 класс	62
9-10 класс	64
11 класс	66
Критерии определения победителей и призеров Олимпиады	69

Отборочный этап

Первый тур отборочного этапа

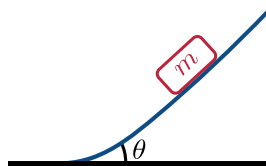
7-8 класс

Задача 1

Вертикально вверх поочередно с интервалом времени τ подбрасывают два шарика. Начальная скорость первого равна v_{01} . Найти начальную скорость второго шарика, если известно, что в течение промежутка времени, когда оба шарика находятся в воздухе, расстояние между ними имеет постоянное значение.

Задача 2

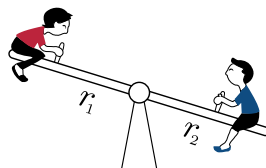
На горизонтальной плоскости лежит брусок. Коэффициент трения между плоскостью и бруском равен μ . В начальный момент времени бруску передают импульс p_0 . Через интервал времени τ после начала движения брусок заезжает на гладкую наклонную поверхность.



Найти максимальную высоту, на которую поднимется брусок, если его масса равна m .

Задача 3

Василий и Петр решили опробовать новые качели-балансир, плечи которых имеют длины $r_1 = r_2$. Каждый мальчик сел на свой край качелей. К сожалению, они обнаружили, что Петр всегда находится на поверхности земли. На сколько сантиметров Δr надо сдвинуться к центру качелей одному из мальчиков, чтобы они могли качаться с наименьшим усилием своих ног? Известно, что массы ребят равны m_1 и m_2 .



Задача 4

Кузнец Дамиан вместе с женой купили себе квартиру в центре Кишинева с бассейном, однако бассейн представлял из себя сообщающийся сосуд с бассейном другой квартиры, которая по уровню от земли находилась чуть ниже, чем квартира Дамиана. Данный дефект застройщика было невозможно устранить.



Через некоторое время соседи начали часто шуметь в ночное время. Это очень мешало отдыху жены кузнеца. Дамиан пытался договориться с ними мирным путем, но соседи не шли на переговоры. Дамиан решил их немного проучить и конструктивный недостаток обратить в преимущество. Он понял, что может их немного «подтопить», достаточно подняв уровень воды в бассейне. Проведя все расчеты, он понял, что ему необходимо взять одну из его наковальней определенной формы, масса которой равна m . Груз этот он полностью погрузил в воду при помощи динамометра, который показал значение силы T . Известно, что площади соседских бассейнов равны S_1 и S_2 .

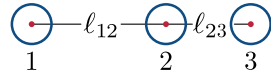
На какую высоту Дамиан поднял уровень воды в бассейне?

Задача 5

Папа Ивара, Альгис, очень странный человек. Он решил сводить на прогулку своего сына и подарить ему большой воздушный шар из очень-очень тонкого латекса в весьма холодное время года. Они подошли к продавцу таких шаров, который наполнил воздушный шар ν_{He} моль гелия и ν_{O_2} моль кислорода. В это время на улице температура воздуха была равна t , а атмосферное давление P_a . После прогулки они отправились домой. Продавец при продаже предупредил, что если объем шара увеличится хотя бы на ΔV , то он лопнет. Альгис очень не хотел расстраивать Ивара, поэтому позвонил своей жене, Синтии, и наказал держать температуру воздуха в доме не выше некоторого значения t_x . Какова температура t_x ?

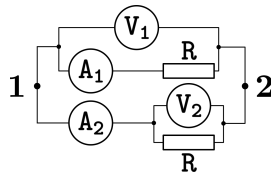
Задача 6

Три одинаковых незаряженных металлических шарика 1, 2 и 3 связаны двумя нерастяжимыми изолирующими нитями. Длины нитей равны ℓ_{12} и ℓ_{23} , соответственно, и много больше, чем радиус шариков. Четвертым таким же, но заряженным, шариком последовательно прикасаются к этим трем - сперва к первому, затем ко второму, далее к третьему и, наконец, опять к первому. Найдите отношение возникших при этом сил натяжения нитей T_{12}/T_{23} .



Задача 7

Электрическая схема собрана из пар одинаковых амперметров, вольтметров и резисторов. Узлы 1 и 2 подключены к источнику постоянного напряжения. Показания амперметров равны I_1 и I_2 , а вольтметров U_1 и U_2 , соответственно.



Найдите сопротивление R .

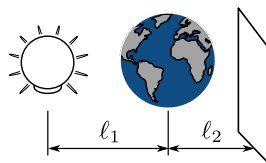
Задача 8

Ксенофонт, на занятии школьного кружка по электротехнике, разбирается с устройством и параметрами электродвигателя постоянного тока. Из измерительных приборов в его распоряжении только мультиметр, который может измерять ток и напряжение. ЭДС, используемого источника напряжения, равна $\mathcal{E}$. Когда Ксенофонт, при подключенном источнике, удерживает рукой ротор двигателя от вращения сила тока в обмотках двигателя равна I_1 .

Какой будет полезная мощность этого электродвигателя, если в нормальном рабочем режиме сила тока через него равна I_2 ?

Задача 9

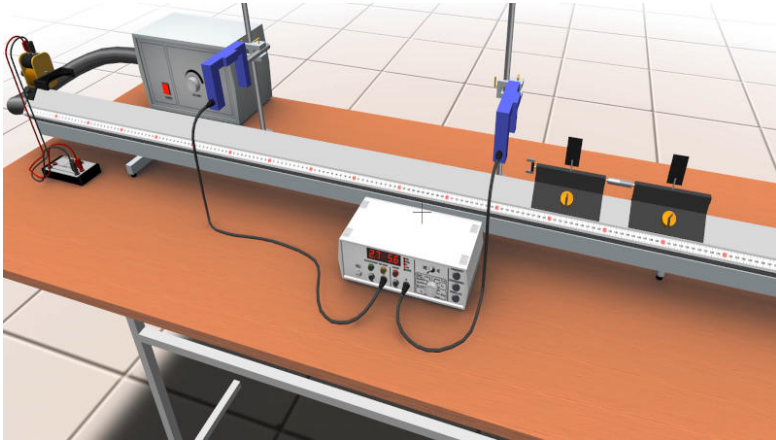
В процессе углубленного изучения учебной темы по астрономии «Лунные затмения» гимназист Лукьян собрал следующую модель: на расстоянии ℓ_1 от стены поместил центр глобуса радиусом R_1 , а на линии, перпендикулярной к стене и проходящей через центр глобуса, установил торшер с плафоном из матового стекла радиусом R_2 . Расстояние от центра плафона до глобуса равно ℓ_2 .



Найдите площадь области полной тени на стене в оптической схеме Лукьяна.

Задача 10 (Эксперимент)

В видеофрагменте (<https://youtu.be/Nox18RvAyhY>) представлен процесс абсолютно неупругого соударения двух тележек на рельсе с воздушной подушкой. Показания цифрового хронометра – это время прохождения световых ворот флажком-прерывателем на каждой из тележек.



Кадр из видеофрагмента к задаче 10

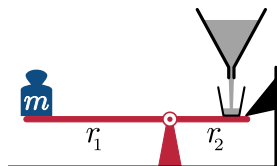
Найдите отношение массы налетающей тележки к массе исходно покоившейся $\frac{m_1}{m_2}$.

Допустимая абсолютная погрешность – не более 0,1.

9-10 класс

Задача 1

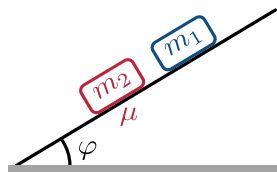
На край одного из плеч неравноплечих рычажных весов, длина которого r_1 , начинает падать песок, который приземляется на них практически с нулевой скоростью. Данное плечо упирается в опору. На другом плече, длина которого r_2 , подвешен груз массой m . Масса резервуара, откуда берется песок, изменяется с постоянным ускорением $\mu = \Delta m / \Delta t^2$.



Через какое время после начала высыпания песка между плечом, на которое он падает, и опорой появится зазор?

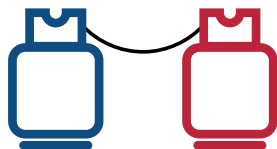
Задача 2

Два бруска удерживают в состоянии покоя внешней силой на наклонной плоскости. Угол наклона плоскости относительно горизонта равен φ . Первый брусок находится выше второго и имеет идеально гладкую поверхность. Второй же брусок имеет такую поверхность, которая позволяет ему двигаться по плоскости с коэффициентом трения равным $\mu = \tan \varphi$. В какой-то момент бруски отпускают и через время τ_1 между ними происходит абсолютно упругое соударение. После этого соударения первый брусок подхватывают, а второй продолжает движение. Найти скорость второго бруска через время τ_2 после столкновения, если известно, что масса первого бруска в k раз больше, чем у второго.



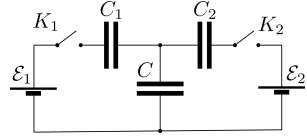
Задача 3

Два одинаковых баллона, содержащие газ, соединены тонкой длинной трубкой. Во сколько раз изменится давление в системе, если один из баллонов нагреть до температуры t_2 , а другой поддерживать при начальной температуре t_1 ?



Задача 4

В электрической схеме, представленной на рисунке, ЭДС источников $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ и емкости всех конденсаторов C , C_1 и C_2 - известные величины. В начальном состоянии ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а все конденсаторы не заряжены. Ключ K_1 замыкают, а затем, после установления равновесия в схеме, размыкают. Далее замыкают ключ K_2 и, также, после установления нового равновесного состояния, размыкают его.



Каким будет значение напряжения на конденсаторе C после очень большого количества циклов изменения положения ключей?

Задача 5

При подготовке к олимпиаде по физике Ксения разбирается с заданиями экспериментальных туров прошлых лет. В одном из них нужно было изготовить из проволоки правильный многогранник с заданным электрическим сопротивлением между любой парой его ближайших вершин. Разрезав кусок проволоки сопротивлением $6R$ на 6 равных кусков, Ксения спаяла из них тетраэдр, но необходимого результата не достигла. Она удалила три ребра в своей конструкции и получила цепь, соединяющую две различные вершины A_1 и A_2 тетраэдра, причем в цепи не осталось ни одного узла.

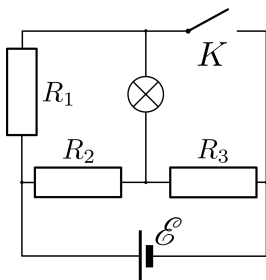
Каким будет сопротивление между вершинами A_1 и A_2 , если вместо удаленных проволочек Ксения впаяет другие, сопротивлением R_x каждая?

Задача 6

В однородном вертикальном магнитном поле с индукцией B на расстоянии ℓ расположены два параллельных гладких рельса, замкнутые на одном конце катушкой индуктивности. На рельсы положили соединяющую их перемычку массой m и сообщили ей скорость v_0 параллельно рельсам. Максимальное удаление перемычки от стартового положения оказалось равно $x_{\max}$.

Найдите индуктивность катушки (электрическое сопротивление всех элементов схемы пренебрежимо мало).

Задача 7



Ученик математического лица Павел мечтает стать электриком, как и его папа. В рабочем столе отца Павлик нашел: аккумулятор с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, три резистора сопротивлением $R_1 = R_3 = R$, $R_2 > R$, выключатель и электрическую лампочку. Собрав электрическую схему,

будущий электрик с удивлением обнаружил, что лампа одинаково ярко горит, как при замкнутом, так и при разомкнутом ключе.

Найдите сопротивление данной лампочки в рабочем режиме.

Задача 8

На поверхность зеркального шара падают два параллельных луча света, лежащие в плоскости, проходящей через его центр. Расстояние между лучами ℓ . При отражении от поверхности шара один из лучей отклоняется от первоначального направления на угол α , а другой на угол β . Найдите радиус этого шара.

Задача 9

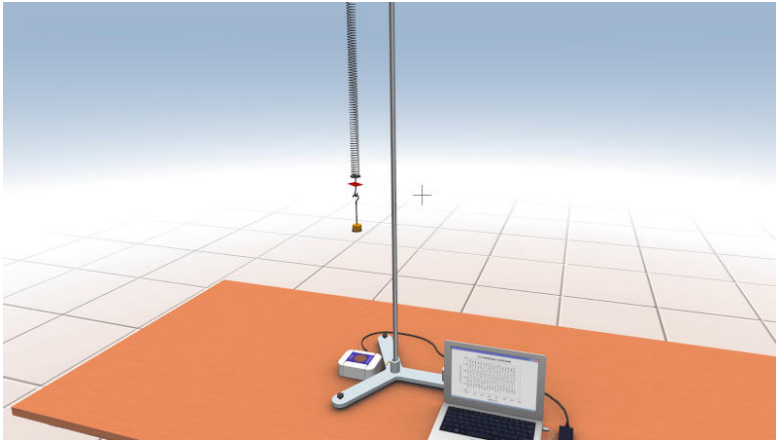
Леопольд решил немного улучшить жизнь аквариумных рыбок, украсив их место обитания. Вспомнив про явление дисперсии, он взял направленный источник дневного света и осветил им дно аквариума под углом θ к вертикали. Уровень воды в аквариуме равен d .

Чему равна длина радужной полосы на дне, если показатель преломления воды n в видимом диапазоне зависит от длины волны следующим образом: $n(\lambda) = n_0 + \frac{\alpha}{\lambda^2}$, где n_0 и α - известные параметры.

Считать, что видимый спектр находится в диапазоне от $\lambda_1 = 400$ нм до $\lambda_2 = 760$ нм.

Задача 10 (Эксперимент)

В видеофрагменте (<https://youtu.be/eYn5GR74XeY>) представлен процесс гармонических колебаний подвешенного на пружине груза. Жесткость пружины $k = 25 \text{ Н/м}$.

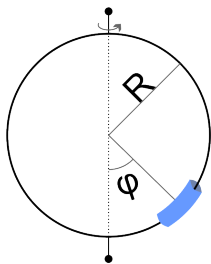


Кадр из видеофрагмента к задаче 10

Найдите массу груза. Результат представьте в граммах.
Допустимая абсолютная погрешность - **10 г**.

11 класс

Задача 1



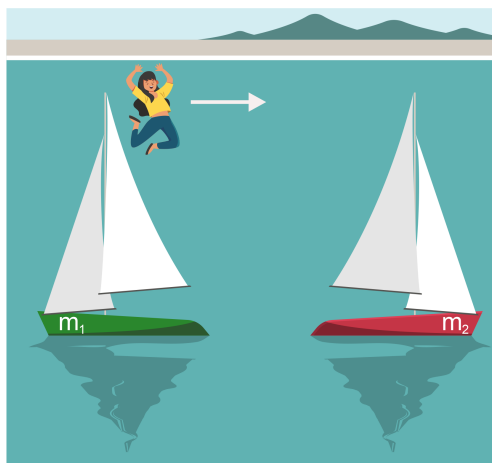
Муфта насажена на кольцо радиуса R , которое в нулевой момент времени начинает вращаться с угловым ускорением β относительно оси, расположенной по вертикальному диаметру кольца.

Через какое время после начала движения угловое положение устойчивого равновесия муфты будет отличаться от нулевого?

Трение между муфтой и кольцом полностью отсутствует.

Задача 2

По озеру Иссык-Куль с целью изучения молодых особей кряквы в лодке проплывает молодая исследовательница Айперим. В какой-то момент она обнаружила, что ее лодка дала течь, однако Айперим повезло, ибо недалеко в направлении движения ее лодки она увидела еще одну пустую, покоящуюся, кем-то брошенную лодку.



К задаче 2

Ей как можно быстрее необходимо перепрыгнуть со своей лодки на другую. В силу ряда своих страхов, не свойственных исследователям, Айперим не может находиться без опоры какой-либо твердой поверхности дольше времени τ .

Найти максимальное расстояние между лодками при прыжке, если известно, что в результате этого самого прыжка первая лодка полностью остановилась, а вторая, после приземления Айперим, приобрела скорость v . Считать, что масса второй лодки m_2 больше массы Айперим в n раз, масса первой лодки m_1 больше массы Айперим в k раз. Прыжок она делает в строго горизонтальном направлении, но в воду не попадает, так как при сближении лодок успела забраться на достаточно высокую мачту.

Задача 3

Ярополк задался вопросом, насколько он может приблизиться к полному вакууму в стеклянной бутылке объемом V при помощи только лишь своих легких. У Ярополка оказались невероятно сильные легкие, что позволило ему снизить давление в бутылке в k раз относительно атмосферного.

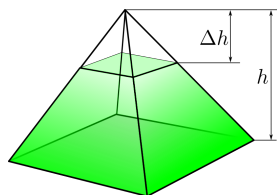
Сколько миллимолей воздуха осталось в бутылке? Величины атмосферного давления p и температуры воздуха в бутылке T можно считать известными.

Задача 4

В заброшенном городе цивилизации майя Чичен-Ица в обсерватории археологи обнаружили стеклянный сосуд в форме правильной четырехгранной пирамиды высотой h . Он был целиком заполнен некоторой жидкостью, которая, что удивительно, обладала собственным

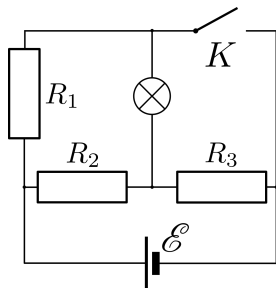
электрическим зарядом - напряженность электрического поля в вершине сосуда была равна E_0 . После того как сосуд открыли, часть жидкости мгновенно испарилась и ее уровень понизился на величину Δh , но ее полный заряд остался неизменным.

Какой стала напряженность поля в вершине пирамиды?



Задача 5

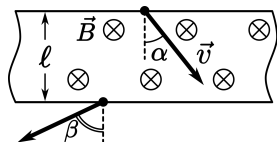
Ученик математического лицея Павел мечтает стать электриком, как и его папа. В рабочем столе отца Павлик нашел: аккумулятор с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением и с выходным напряжением $\mathcal{E}$, три резистора сопротивлением R_1 , R_2 и R_3 , выключатель и электрическую лампочку. Собрав электрическую схему, будущий электрик с удивлением обнаружил, что лампа одинаково ярко горит, как при замкнутом, так и при разомкнутом ключе.



Найдите потребляемую лампой мощность.

Задача 6

Электрон со скоростью v влетает под углом α в область однородного магнитного поля толщиной ℓ , а вылетает из поля под углом β .



Какова индукция магнитного поля B ?

Задача 7

Фотон с энергией E_{ph} сталкивается с покоящимся электроном. Найдите кинетическую энергию, приобретенную электроном, если в результате столкновения относительное изменение длины волны фотона составило $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$.

Задача 8

Сотрудник оптической лаборатории Эдуард нанес на толстую стеклянную пластинку с показателем преломления n_0 каплю некоторого неизвестного раствора объемом V . Раствор растекся по поверхности пластины тонким равномерным слоем площадью S . В спектре прохождения белого света для данного образца преобладало излучение в окрестности длин волн λ_1 и λ_2 .

Каков показатель преломления у этого раствора?

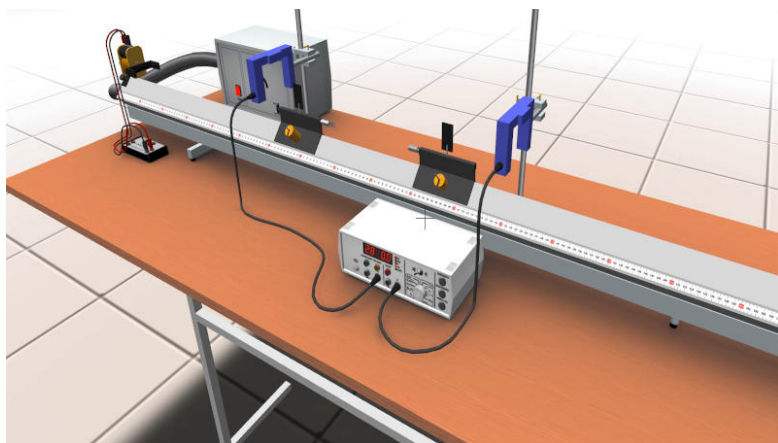
Задача 9

Старшей помощнице капитана Гузель космического сторожевого корабля «Орион-12», чей порт приписки находится в Ашхабаде на планете Татуин, дали задание определить длину пролетающего мимо торгового судна, так как в этой области галактики определена максимально допустимая длина для гражданских судов. Приборы сторожевого корабля проинформировали Гузель, что скорость сближения с торговым судном составляет $v = \beta c$, где c – скорость света. Гузель измеряет время пролета торгового корабля, которое оказалось равным Δt .

Чему равна длина торгового судна?

Задача 10 (Эксперимент)

В видеофрагменте (<https://youtu.be/TvBnR8gbi4E>) представлен процесс абсолютно упругого соударения двух тележек на рельсе с воздушной подушкой. Показания цифрового хронометра – это время прохождения световых ворот флажком-прерывателем на каждой из тележек.



Кадр из видеофрагмента к задаче 10

Найдите отношение массы налетающей тележки к массе исходно покоившейся $\frac{m_1}{m_2}$.

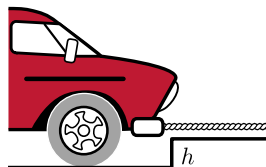
Допустимая абсолютная погрешность – не более 0,1.

Второй тур отборочного этапа

7-8 класс

Задача 1

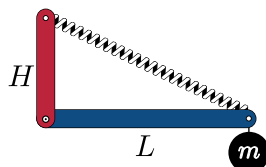
Яким решил оставить свою машину на зиму в гараже. Гараж устроен таким образом, что машина стоит в некотором прямке, глубина которого равна h . При исправном двигателе автомобиля выехать из данного прямка не составляет никакого труда, однако за зиму что-то произошло с двигателем. Яким не смог разобраться с поломкой самостоятельно и ему пришлось вытаскивать автомобиль из гаража. В силу особенностей гаражного кооператива эвакуатору не удалось подъехать к воротам гаража Якима, а вытолкнуть руками машину ему не удалось. Он решил вытащить ее при помощи ручной лебедки, закрепив ее на воротах гаража напротив.



Чему должна быть равна минимальная сила натяжения троса, чтобы машина выбралась из прямка? Масса автомобиля равна M , радиус его колес R . Трос расположен горизонтально на уровне колесных осей.

Задача 2

Вова очень любит прямоугольные треугольники. Они ему мерещатся повсюду. У Вовы был очень легкий прямой стержень длиной L , один из концов которого он шарнирно прикрепил к основанию другого, крепко установленного, вертикального стержня, высота которого H . Помимо этого, у Вовы есть пружина, длина которой в ненапряженном состоянии равна ℓ_0 , а коэффициент жесткости имеет значение k . Данную пружину одним концом Вова соединил с верхним концом вертикального стержня, а другой конец подсо-



единил к легкому стержню. Однако все эти элементы образовали тупоугольный треугольник, а Вове нужен только прямой. Подвесив на конец легкого стержня некоторый груз, Вова получил желаемую фигуру. Чему равна масса m подвешенного груза?

Задача 3

Марию дома заставляют читать. Она решил избавиться от одной ненавистой ей книги по философии, закинув ее на козырек своего дома. Однако ее отец

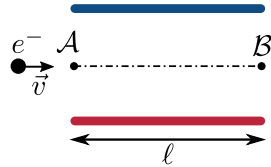


узнал это и заставил Марию доставать эту книгу, но не прибегая к помощи стремянки. Мария не растерялась, взяв легкую нерастяжимую гладкую веревку, к концу которой приделала небольшой брусочек. Она закинула веревку с брусочком на козырек таким образом, что брусочек приземлился прямо на книгу. Она хотела побыстрее справиться с этой задачей, максимально быстро стащив книгу с козырька. Делать это надо так, чтобы книга не проскальзывала относительно бруска.

Отношение массы бруска к массе книги равно α . Коэффициент трения между книгой и брусочком равен μ_1 , а между козырьком и книгой - μ_2 . С каким максимальным ускорением Мария может стащить книгу?

Задача 4

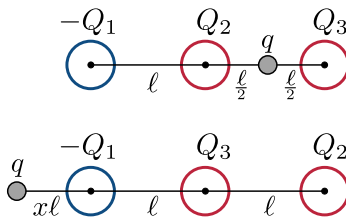
Электрон влетает со скоростью v в плоский конденсатор, пластины которого имеют длину ℓ , из точки A на его оси. Начальная скорость электрона параллельна пластинам конденсатора.



Через какое время после попадания электрона в конденсатор в нем должно мгновенно измениться направление электрического поля на противоположное, чтобы электрон смог вылететь из точки B на его оси?

Задача 5

Точечные заряды $-Q_1$, $+Q_2$ и $+Q_3$ расположены на одной линии на равных расстояниях ℓ друг от друга. Пробный заряд q находится в равновесии посередине между зарядами Q_2 и Q_3 .

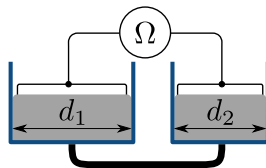


Если поменять местами заряды Q_2 и Q_3 , то равновесное положение для заряда q будет расположено слева от заряда Q_1 на расстоянии $x\ell$ от него, где x - некоторый известный коэффициент.

Найдите отношение модулей зарядов Q_1/Q_3 .

Задача 6

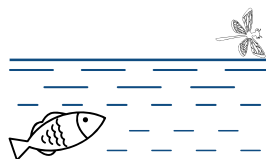
Два стеклянных цилиндрических сосуда имеют равные высоты, но различные диаметры d_1 и d_2 . Сосуды соединены тонкой резиновой трубкой и частично заполнены ртутью, на поверхности которой в каждом из них плавают серебряные диски. На какую величину изменится электрическое сопротивление между дисками, если второй сосуд опустить на расстояние Δh ниже относительно первого?



Удельное электрическое сопротивление ртути ρ_{Hg} известно. При изменении положения сосудов ртуть не перетекает полностью в один из них и не выливается через край.

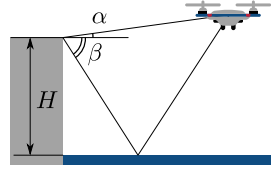
Задача 7

У самой поверхности воды в реке летит стрекоза, а карась «стоит» на глубине h . При каком максимальном расстоянии от карася до стрекозы она может быть замечена карасем?



Задача 8

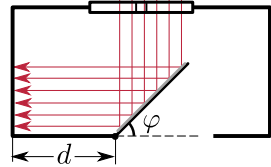
Квадрокоптер, зависший над гладью горного озера, с крутого берега высотой H виден под углом α над горизонтом, а его изображение в озере видно под углом β под горизонтом.



На какой высоте над уровнем воды завис квадрокоптер?

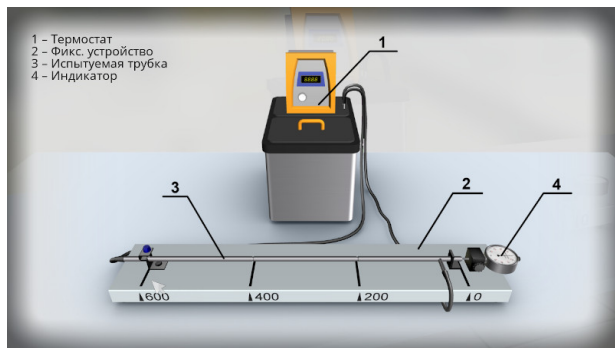
Задача 9

Алишер проживает в квартире-студии, схема которой изображена на рисунке. В квартире есть окно, выходящее на восточную сторону (оно на схеме в верхней части). На внутреннюю сторону входной двери Алишер повесил зеркало шириной почти во весь дверной проем. Расстояние от дверных петель до левой стены квартиры равно d . Рано утром при уходе на работу, чтобы не мешать своим соседям, Алишер закрывает дверь очень аккуратно, поворачивая ее с угловой скоростью ω .



Когда до полного закрытия оставалось повернуть дверь на угол φ , она предательски закрипела. С какой линейной скоростью в этот момент перемещался по левой стене квартиры край солнечного "зайчика" от области зеркала, наиболее близкой к дверным петлям?

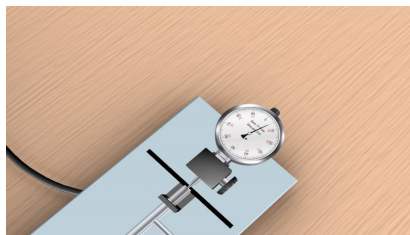
Задача 10 (Эксперимент)



Общий вид виртуальной экспериментальной установки

В лабораторной работе проводится измерение увеличения линейного размера тонкой трубки длиной $L = 60$ см, через которую пропускается горячая вода. Для нагрева трубки используется циркуляционный термостат с возможностью контроля текущего значения температуры. Один конец трубки жестко зафиксирован, а другой контактирует с индикатором линейного перемещения (микрометром).

По показаниям измерительных приборов в представленных видеофрагментах определите материал из которого сделана трубка.



<https://youtu.be/nmbR9BP1C2A>

<https://youtu.be/6X1BqdpW4jg>

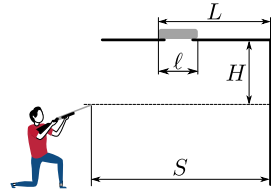
Значения коэффициентов линейного теплового расширения различных материалов (в единицах $10^6 \cdot \text{K}^{-1}$) приведены в таблице.

сталь	стекло	молибден	титан	латунь	алюминий	эбонит
11,1	3,3	5,0	8,6	18,7	22,2	76,6

9-10 класс

Задача 1

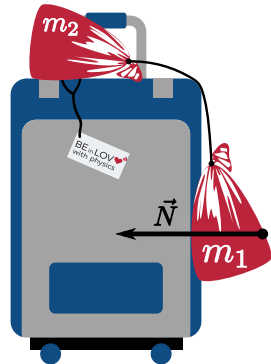
Ираклион захотел сбить с карниза небольшое полено, которое очень удачно расположилось над дыркой в этом самом карнизе. У Ираклиона под рукой оказался богатый арсенал различных ружей и боеприпасов различного калибра, с очень плотной сеткой масс пуль. Какую минимальную массу должна иметь пуля, чтобы Ираклион смог бы сбить полено с карниза, если считать, что скорости вылета пуль любого калибра одинаковы и равны v ?



Числовые значения геометрических размеров S , H , L и ℓ известны. Коэффициент трения между поленом, которое можно считать однородным цилиндром массой M и карнизом равен μ .

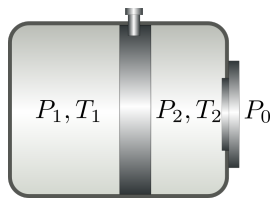
Задача 2

Коля заходит в лифт вместе с тележкой, представляющей из себя параллелепипед, на котором не очень аккуратно лежат его вещи. Две сумки, массы которых m_1 и m_2 , были сцеплены веревкой, и сразу же после того как Коля зашел в лифт сумка массой m_1 повисла вдоль стенки тележки и начала стягивать вторую. В лифте было очень грязно, поэтому Коля изо всех сил постарался предотвратить падение сумок на пол, но так как руки его были заняты другими вещами и самой тележкой, то он смог дотянуться только лишь ногой, приложив прижимную силу N к боковой поверхности тележки, чего хватило, чтобы остановить скатывание. Потом Коле надо нажать кнопку лифта, чтобы тот тронулся вверх. Однако лифт оказался непростым, у него есть регулировка ускорения, с которым он может начать движение. Коле хотелось побыстрее попасть наверх, но ему надо прикинуть, каково максимальное ускорение лифта, при котором сумки не упадут. Коэффициент трения между всеми поверхностями, кроме веревки, равен μ .



Задача 3

Костя получил для ремонта идеально теплоизолированный баллон с крышкой, у которого заклинило поршень. Поршень имеет особое свойство: когда он подвижен, то становится идеально проводящим тепло. Часть без крышки (левая по рисунку) занимает долю α от всего объема баллона. Датчики, которыми снабжен баллон, показывают как давление, так и температуру в каждой из частей баллона. Костя знает, что крышка баллона выдерживает максимальную разность давлений ΔP_{max} .



Посмотрев на показания датчиков, он задумался, стоит ли как-то усилить крышку баллона перед разблокировкой поршня? Найдите абсолютное значение избыточного давления, которое необходимо приложить к крышке, чтобы она не разрушилась.

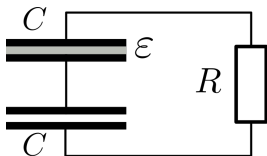
Давление и температура в части без крышки равны P_1 и T_1 , а во второй части P_2 и T_2 соответственно. Считать внешнее атмосферное давление P_0 равным нормальному.

Задача 4

Два равных по модулю разноименных точечных заряда Q^+ и Q^- расположены на расстоянии ℓ друг от друга в однородном электрическом поле напряженности E_0 .

Найдите радиус окружности, в любой точке которой напряженность результирующего электрического поля равна нулю.

Задача 5

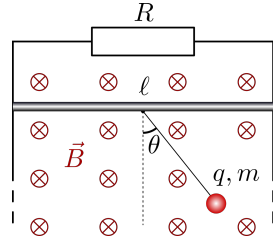


Два воздушных конденсатора с емкостью C заполнены жидким диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ и заряжены каждый зарядом q , после чего соединены друг с другом и с резистором сопротивлением R в общую цепь. Вследствие несовершенства изоляции жидкий диэлектрик в одном из конденсаторов полностью вытек.

Какое количество теплоты при этом выделилось в резисторе?

Задача 6

Два очень длинных вертикальных проводника соединены в верхней части резистором с сопротивлением R . Невесомый проводящий стержень длиной ℓ может без трения скользить по проводникам. К середине стержня на диэлектрической нерастяжимой нити подвешен небольшой шарик с массой m и электрическим зарядом q . Вся конструкция помещена в однородное постоянное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, направленное перпендикулярно плоскости рисунка.

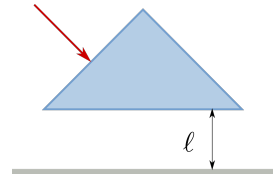


Если стержень отпустить, то через некоторое время его движение можно считать происходящим равномерно, а угол, который образует нить с вертикалью, будет равен θ .

Найдите величину электрического сопротивления R .

Задача 7

Равнобедренная стеклянная призма с углом при вершине 90° имеет показатель преломления n_1 и расположена основанием параллельно экрану. Расстояние между основанием призмы и экраном равно ℓ . Монохроматический луч света, падающий перпендикулярно поверхности призмы, попадает в определенную точку экрана.



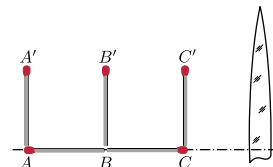
На какое расстояние сместится точка падения луча, если бы показатель преломления этой призмы был равен n_2 ?

Задача 8

На главной оптической оси тонкой собирающей линзы перед ее передним фокусом расположена фигура из пяти спичек в виде буквы "Ш".

Коэффициент линейного увеличения спички AA' равен Γ_1 , а спички CC' : Γ_2 .

Каков коэффициент увеличения спички BB' ?

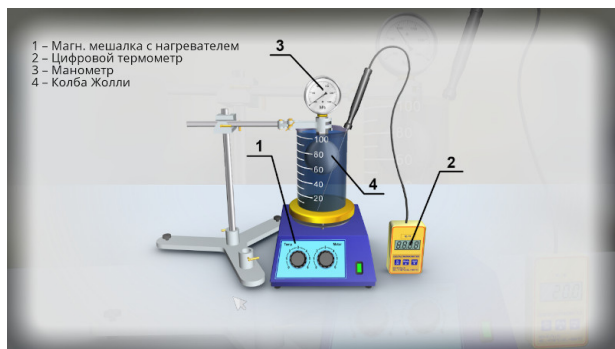


Задача 9

На тонкостенную сферическую колбу радиуса R , наполненную некоторой жидкостью с показателем преломления n , падает узкий горизонтальный параллельный поток света так, что его ось проходит через центр колбы.

Во сколько раз будут отличаться площади поперечных сечений данного светового потока на входе (S_0) и на выходе (S_1) из жидкости?

Задача 10 (Эксперимент)

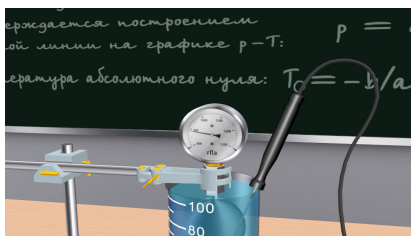


Общий вид виртуальной экспериментальной установки

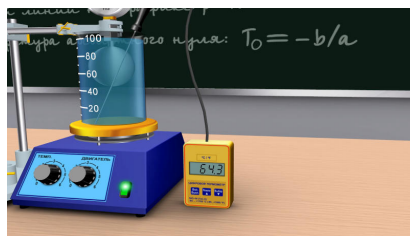
В лабораторной работе проводится измерение давления и температуры газа, заключенного в герметичную сферическую колбу внутренним диаметром $D = 60$ мм.

По показаниям измерительных приборов в представленных видеофрагментах определите количество газа в колбе.

Ответ представьте в **миллимолях** с точностью до десятых долей.



<https://youtu.be/ngzrLqjR5T4>

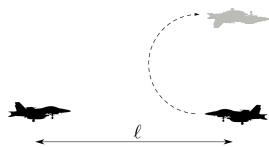


<https://youtu.be/M2JAwxo7zFg>

11 класс

Задача 1

На воздушном шоу авиасалона МАКС-2021 два сверхзвуковых истребителя из группы высшего пилотажа "Русские витязи" выполняют следующий воздушный маневр: после приближения их к друг другу на встречном курсе со скоростью v на расстояние ℓ , один из них, не снижая скорости, совершает разворот в вертикальной плоскости по полуокружности, после чего истребители оказываются друг от друга на исходном расстоянии ℓ .



С каким ускорением двигался истребитель во время совершения маневра?

Задача 2

У Гриши был пластилин, который необходимо нагреть для более легкой лепки. В это время в школе Гриша изучал законы сохранения энергии и поэтому он решил совместить приятное с полезным — правда тут ему было трудно понять, что было приятным, а что полезным. Гриша взял ящик, масса которого в α раз больше массы пластилина и, поставив его на шероховатый пол, начал кидать кусок пластилина в одну из его боковых стенок в строго горизонтальном направлении. Исходно пластилин уже достаточно пластичен, чтобы считать столкновения пластилина и ящика абсолютно неупругими. После каждого столкновения система ящик+пластилин проскальзывает по полу путь ℓ до полной остановки.

Какое минимальное количество бросков с последующим приведением системы в исходное состояние должен повторить Григорий, чтобы нагреть пластилин на ΔT градусов?

Удельная теплоемкость пластилина: $C_p = 2500$ Дж/кг·К, коэффициент трения скольжения между ящиком и полом равен μ . Считать, что теряемая при ударе механическая энергия распределяется между внутренними энергиями ящика и пластилина в известном соотношении η .

Задача 3

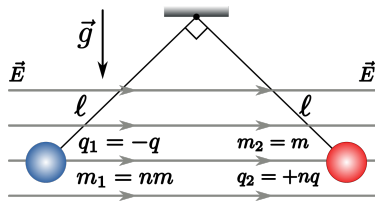
Франсуа-Мари учится на первом курсе физического факультета. Во время одной из лабораторных работ по термодинамике ему было необходимо нагреть абсолютно сухой воздух, находящийся в резервуаре объемом V , от температуры T_1 до температуры кипения воды, измеряя при этом давление в сосуде при помощи барометра. Известно, что при начальной температуре давление в сосуде равняется P_1 .

Однако над Франсуа-Мари нависла угроза, ибо его сокурсник Жан-Жак, выполняющий лабораторную работу в том же помещении, недолюбливает Франсуа-Мари. Жан-Жак знает, что максимально допустимое давление барометра в α раз превышает то значение, которое можно наблюдать во время эксперимента. Жан-Жак решил подлить немного дистиллированной воды в экспериментальный сосуд Франсуа-Мари, тем самым выведя барометр из строя.

Какую минимальную массу воды должен подлить Жан-Жак, чтобы барометр сломался? Считать, что итоговая плотность воды в сосуде не превышает плотности насыщенного водяного пара.

Задача 4

Два небольших шарика отношение масс которых равно $m_1/m_2 = n$, с противоположными по знаку зарядами, модули которых отличаются также в n раз ($q_1 = -q$, $q_2 = +nq$, где значение q известно) подвешены на невесомых нерастяжимых нитях длиной ℓ , закрепленных в одной точке.

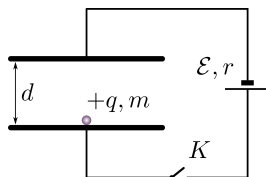


Вся конструкция помещена во внешнее однородное горизонтальное электрическое поле. В состоянии равновесия нити перпендикулярны друг другу и образуют с вертикальным направлением равные углы.

Каково значение модуля напряженности внешнего электрического поля E ?

Задача 5

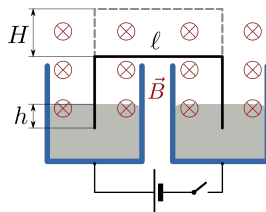
На нижней обкладке плоского конденсатора лежит маленькая диэлектрическая пылинка с массой m и зарядом $+q$. Расстояние между обкладками равно d . Конденсатор подключили к источнику напряжения с ЭДС $\mathcal{E}$ и с внутренним сопротивлением r . Спустя время t после замыкания ключа K пылинка приобрела скорость v .



Каков в этот момент заряд конденсатора? Влиянием сил тяжести и вязкого трения, а также неравномерностью распределения заряда по обкладкам можно пренебречь.

Задача 6

Кусок проволоки массой m , имеющий П-образную форму, с длиной горизонтальной части ℓ и электрическим сопротивлением R частично погружен в две одинаковые металлические емкости со ртутью на глубину h . К концам провода с помощью ртути подключен источник постоянного напряжения с ЭДС $\mathcal{E}$. Вся установка находится в однородном стационарном горизонтальном магнитном поле с индукцией B .

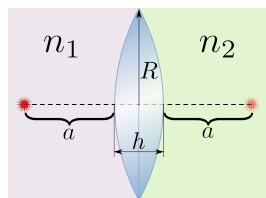


На какую высоту H относительно исходного положения подскочит проволока после замыкания цепи?

Влияние сил Архимеда, поверхностного натяжения и вязкого трения несущественно.

Задача 7

Тонкая линза радиуса R и толщиной h расположена на плоской границе двух полупространств с различными показателями преломления. Точечный источник света находится слева от линзы на ее главной оптической оси на расстоянии a от ее левой поверхности в среде с показателем преломления n_1 .

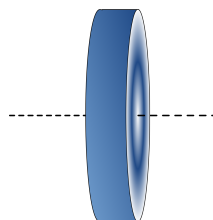


Каким должен быть показатель преломления материала линзы для того, чтобы изображение источника было сформировано на том же расстоянии a от правой поверхности линзы в среде с показателем преломления n_2 ?

Задача 8

Диэлектрический диск радиуса R и толщины h с меняющимся в радиальном направлении показателем преломления $n = n(r)$ выступает в СВЧ диапазоне в роли собирающей линзы с фокусным расстоянием F . Непосредственно на оси диска показатель преломления равен n_0 .

Каков показатель преломления материала диска на расстоянии r от его оси?



Задача 9

В недалеком будущем межпланетные перелеты станут нашей ежедневной действительностью. На минутку перенесемся в будущее.

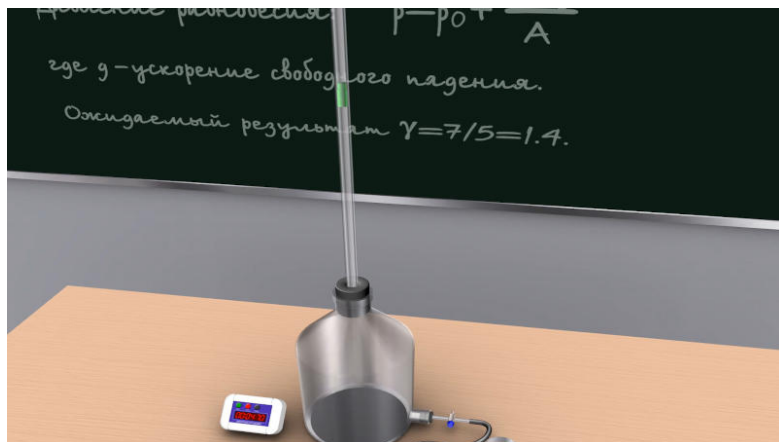
Николаю назначили деловую встречу на Юпитере, на которую он должен явиться через интервал времени t . Он выбрал такую скорость космического корабля, чтобы прибыть точно в назначенное время. По прибытии Николай взглянул на свои часы и удивился, подумав, что установил скорость большую, чем было необходимо. Высвободившееся время он потратил на чашечку кофе, после которого он должен был вовремя прийти на встречу.

Насколько он в результате опоздал?

Можно считать, что жители Земли и Юпитера находятся в одной инерциальной системе отсчета. Расстояние до Юпитера от Земли на момент вылета равнялось $L = 600$ млн. км.

Задача 10 (Эксперимент)

В видеофрагменте (<https://youtu.be/W2-ydf-dLAU>) представлен процесс колебаний поршня в вертикальной стеклянной трубке длиной $L = 60$ см и диаметром $D = 1,6$ см, закрепленной в отверстии пробки, которая герметизирует стеклянный сосуд объемом $V = 10$ литров (т.н. бутылка Мариотта).



Кадр из видеофрагмента к задаче 10

Найдите массу поршня в **граммах**.

Допустимая абсолютная погрешность - не более 0,5 г.

Атмосферное давление считать равным $P_0 = 1018$ мбар.

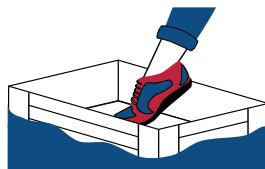
Финальный этап

Теоретический тур финального этапа

7-8 класс

Задача 1

Стоя на причале, Петя задумал затопить лодку Коли. Ничего сверхтяжелого у него не оказалось под рукой. Однако, ему в голову пришла мысль, что необходимого эффекта можно добиться, если наступать на центр лодки с определенной периодичностью.



С каким периодом Пете необходимо наступать на лодку и сразу же убирать ногу? Форму лодки принять за пустотелый параллелепипед без верхней крышки. Площадь дна лодки равна S , а ее масса m . Любым трением в системе можно пренебречь.

Итак, достаточно идеализированные условия задачи, а именно отсутствие трения и особая форма лодки (постоянное сечение, находящееся в воде), позволяют существенно упростить решение задачи. Отсутствие трения говорит нам о том, что при приближении к резонансу, мы можем достичь сколько угодно большой амплитуды колебаний лодки. А постоянство сечения той части лодки, которая находится в воде, делает уравнение движения крайне простым. Запишем его:

$$m\ddot{z} = mg - (\ell_0 + z)S\rho g,$$

где ρ — плотность воды, ℓ_0 — величина погружения лодки в воду в отсутствии внешних сил (равновесное), z — координата положения лодки, которая совпадает с ватерлинией, когда лодка находится в равновесии. Учтем, из условий равновесия мы имеем следующее соотношение: $mg = \rho S \ell_0 g$, откуда получаем финаль-

ное уравнение движения:

$$\ddot{z} + \frac{\rho g S}{m} z = 0,$$

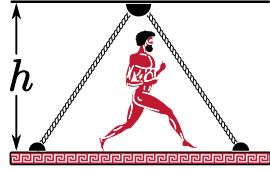
где постоянство сечения корпуса лодки, которое находится в воде, позволяет заключить, что это обычное уравнение на гармонические колебания. Собственная частота в этом случае равна $\omega = \sqrt{\rho g S / m}$. Для достижения состояния резонанса частота внешней силы должна совпасть с частотой собственных колебаний (это возможно в отсутствии трения). Отсюда можно заключить с какой периодичностью (раз в какое время) Петр должен наступать на лодку: $T = 2\pi / \omega$

Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}}$.

Задача 2

Алкиной поспорил с Аристотелем, что сможет бегать вдоль огромных качелей так, что они будут все время неподвижны.

Какое целое число раз ему необходимо пробежать туда и обратно по качелям, чтобы за время τ они оставались в равновесии? Расстояние от платформы до точки подвеса равно h .



Представим, что Алкиной находится на расстоянии x от центра платформы. Если качели находятся в положении, которое соответствует положению равновесия без нагрузки в виде человека, то на качели будет действовать момент сил, связанные с весом со стороны Алкиной. По условию Алкиной должен так перемещаться по качелям, чтобы этот момент сил компенсировался бы другим, таким же по величине моментом. Для этого ему надо начать двигаться с ускорением в сторону центра платформы. Сила трения со стороны качелей, за счет которой он сможет это делать, будет равна произведению его массы m на его ускорение a . По третьему закону Ньютона с точно такой же силой, которая теперь равна ma , Алкиной будет действовать на качели в противоположную сторону. Из-за этой силы возникнет момент, который полностью должен компенсировать момент сил со стороны веса Алкиной на качелях.

Запишем уравнение движения Алкиной: $mgx = -hm\ddot{x}$, где h — плечо действия силы трения. Отсюда мы видим, что частота с которой должен бегать Алкиной в одну и другую сторону равна $\sqrt{g/h}$. Сразу же находим период движения, который равен $T = 2\pi\sqrt{h/g}$. Если Алкиной будет двигаться в течение времени τ , то ему необходимо будет совершить следующее число циклов (пробежать качели из одной стороны в другую и обратно): $N = \tau/T$.

Ответ: $N = \frac{\tau}{2\pi} \sqrt{g/h}$.

См. также решение этой задачи https://youtu.be/I_3tLvR7y4g.

Задача 3

Аркадий в своем конструкторском бюро получил задание сделать датчик отрицательных температур на основе манометра и вещества, о котором известно, что плотность его твердой фазы в α раз больше плотности жидкой. Для этого он взял некую полость объемом V , налил туда этой жидкости (чья объемная доля составила λ от всего объема) и герметично закрыл сосуд. К самой полости подключил манометр. При этом оставшуюся часть сосуда занял воздух. Считать, что все это было выполнено при температуре T_+ и атмосферном давлении p_0 .

Какое давление будет показывать манометр спустя долгое время, если полость поместить в помещение, температура в котором T_- ? Можно считать, что $T_+ > T_0 > T_-$, где T_0 — температура замерзания жидкости.

Итак, давайте же определим значение давления, которое будет показывать манометр при попадании сосуда в помещение. Для этого нам надо разобраться с двумя вещами. Во-первых, мы должны понять, как меняется объем жидкой фазы, находящейся в объеме, при замерзании, а во-вторых, нам необходимо определить по какому закону меняется давление газа. Масса жидкой и твердой фаз равны, поэтому справедливо следующее соотношение: $m = \lambda \rho_{\text{ж}} V = \rho_{\text{т}} V_{\text{нов}}$, откуда новый объем $V_{\text{нов}}$, занимаемый твердой фазой, будет равен: $V_{\text{нов}} = \frac{\lambda}{\alpha} V$.

Теперь посмотрим на уравнение Менделеева-Клапейрона, которое мы будем использовать для газа в емкости:

$$\frac{p_0 T_+}{(1 - \lambda) V} = \frac{p_1 T_-}{V (1 - \lambda / \alpha)}, \quad (1)$$

где мы воспользовались знанием о новом объеме, занимаемым газом. Отсюда мы можем сразу найти выражение для нового давления:

Ответ: $p_1 = \frac{1 - \lambda / \alpha}{1 - \lambda} \cdot \frac{T_+}{T_-} \cdot p_0$.

См. также решение этой задачи <https://youtu.be/Nsar42lyibA>.

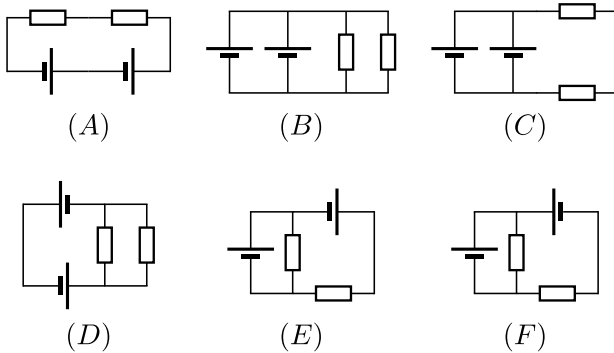
Задача 4

Для выполнения лабораторной работы «Исследование характеристик источника тока» студент Физфака ИТМО Алексей получил два одинаковых источника тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r и два нагрузочных сопротивления с номиналами $R_1 = R_2 = 2r$. Каким образом Алексей должен собрать электрическую схему, чтобы:

- коэффициент полезного действия (КПД) был максимальным?
- суммарное количество теплоты, выделяющееся на нагрузочных сопротивлениях было максимальным?

Изобразите соответствующие принципиальные электрические схемы, приведя необходимые обоснования. Найдите значения максимального КПД и максимальной тепловой мощности в нагрузке.

Изобразим все возможные варианты соединения имеющихся элементов и для каждой них рассчитаем значения искомых параметров.



Варианты электрических схем

Мощность P , выделяющаяся на нагрузочных резисторах, в соответствии с законом Джоуля-Ленца определяется произведением квадрата силы тока, который протекает через них, на номинальные значения их сопротивлений. Коэффициент полезного действия (КПД) η - по определению отношение мощности выде-

ляющейся на нагрузке к полной мощности, производимой источниками. Случаи (A), (B), (C), (D) достаточно тривиальны - приведем для них значения искомых параметров без вывода:

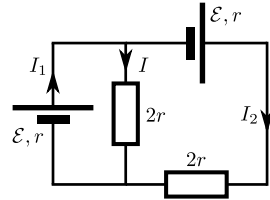
$$(A) \quad P_A = \frac{4\mathcal{E}^2}{9r}, \eta_A = \frac{2}{3}$$

$$(B) \quad P_B = \frac{4\mathcal{E}^2}{9r}, \eta_B = \frac{2}{3}$$

$$(C) \quad P_C = \frac{16\mathcal{E}^2}{81r}, \eta_C = \frac{8}{9}$$

$$(D) \quad P_D = \frac{4\mathcal{E}^2}{9r}, \eta_D = \frac{1}{3}$$

Варианты (E), (F) более интересны - рассмотрим для примера случай (E). Обозначим токи в левой, центральной и правой ветвях схемы как I_1, I, I_2 , соответственно. Тогда уравнения следующие из правил Кирхгофа будут иметь следующий вид:



$$\begin{cases} I + I_2 - I_1 = 0 \\ \mathcal{E} - I_1 r - 2Ir = 0 \\ \mathcal{E} - 3I_2 r + 2Ir = 0 \end{cases}$$

Решением данной системы уравнений будут следующие значения токов: $I_1 = \frac{7\mathcal{E}}{11r}$, $I_2 = \frac{5\mathcal{E}}{11r}$, $I = \frac{2\mathcal{E}}{11r}$. Найдем величину мощности, выделяющейся на нагрузочных сопротивлениях и значение КПД:

$$P_E = I^2(2r) + I_2^2(2r) = \frac{58\mathcal{E}^2}{121r}$$

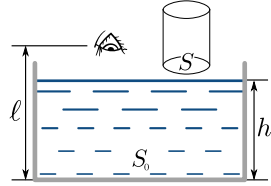
$$\eta_E = \frac{P_E}{\mathcal{E}(I_1 + I_2)} = \frac{29}{66}.$$

Произведя аналогичным образом расчет для случая (F), получим следующие результаты: $P_F = \frac{34\mathcal{E}^2}{121r}$, $\eta_F = 17/22$. КПД в этом случае достаточно высок, но все же меньше, чем в варианте (C).

Ответ: $\eta_{max} = \eta_C = \frac{8}{9}$, $P_{max} = P_E = \frac{58\mathcal{E}^2}{121r}$.

Задача 5

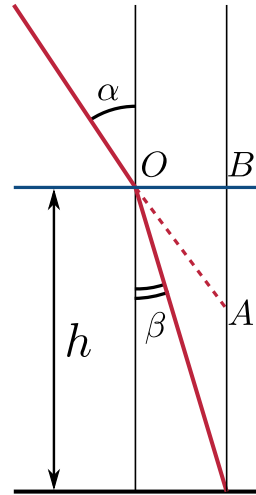
В цилиндрический сосуд с площадью дна S_0 налита некоторая прозрачная жидкость до высоты h . Посмотрев на поверхность этой жидкости в вертикальном направлении с высоты ℓ , можно увидеть дно сосуда расположенным на расстоянии $\ell_1 < \ell$. Если опустить в этот сосуд тонкостенный стеклянный цилиндрический стакан массой m и площадью поперечного сечения $S < S_0$ и посмотреть сквозь него с той же высоты ℓ , то дно сосуда будет казаться находящимся на расстоянии ℓ_2 .



Какова плотность данной жидкости?

Можно считать, что для малых углов $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$.

Если смотреть на поверхность жидкости вертикально вниз, то дно сосуда будет казаться расположенным в точке пересечения продолжений лучей, преломившихся на поверхности раздела жидкость-воздух. Рассмотрим один из таких лучей, вышедший в воздух под углом α к нормали в точке O . Расстояние AB может найдено как $AB = OB \cdot \operatorname{ctg} \alpha$. С другой стороны $OB = h \operatorname{tg} \beta$ и $AB = h \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$. Данное соотношение с учетом закона Снеллиуса и малости углов можно представить в виде $AB = h/n$, где n - показатель преломления жидкости. Для расстояния на котором наблюдается дно имеем следующее равенство:



$$\ell_1 = \ell - h + AB = \ell - h \left(1 - \frac{1}{n}\right) \implies \frac{\ell - \ell_1}{h} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Если опустить в воду стакан и смотреть на дно сквозь него, то толщина слоя воды, сквозь который производится наблюдение будет меньше и видимое положение дна окажется ниже, чем в исходной ситуации. При погружении в жидкость стакан будет плавать, вытеснив объем V' и погрузившись на глубину $d = V'/S$, а уровень жидкости в сосуде поднимется до высоты $h' = h + V'/S_0$. Следовательно толщина слоя жидкости под дном стакана будет равна

$$h'' = h' - d = h + V' \left(S_0^{-1} - S^{-1}\right).$$

Используя соотношение связывающее наблюдаемую координату дна, толщину слоя и показатель преломления жидкости несложно записать уравнение для нахождения V' :

$$\frac{\ell - \ell_1}{h} = \frac{\ell - \ell_2}{h''} \implies \frac{\ell - \ell_1}{h} = \frac{\ell - \ell_2}{h + V' \left(S_0^{-1} - S^{-1}\right)}.$$

$$V' = \frac{h}{S_0^{-1} - S^{-1}} \cdot \frac{\ell - \ell_1}{\ell_2 - \ell_1}.$$

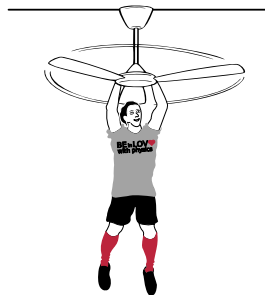
Из условия свободного плавания стакана ($mg = \rho g V'$) при известном объеме вытесненной жидкости можно получить ответ задачи — найти плотность жидкости.

Ответ: $\rho = \frac{m}{h} \cdot \frac{\ell - \ell_1}{\ell_2 - \ell_1} \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{S_0} \right).$

9-10 класс

Задача 1

Коля решил подпрыгнуть и зацепиться за очень прочный потолочный вентилятор. В полете, прежде чем схватиться за ось вращения, он подумал, а будет ли он висеть вертикально или отклонится от вертикальной оси. Единственное, что он знал, так это свои анатомические параметры, а также зависимость частоты вращения вентилятора от подаваемого напряжения, которая имеет вид $\nu(U) = \alpha U$, где α — известная константа.



Чему должно быть равно максимально допустимое напряжение, чтобы Коля вращался вертикально?

Считать Колю тонким однородным двойным стержнем, который может сгибаться в районе тазобедренного сустава. Расстояние ℓ от точки подвеса при вытянутых руках до талии точно такое же как расстояние от талии до пяток.

Исходя из условия задачи, можно понять, что Коля представляет из себя систему из двух стержней, которые соединены через шарнир, с массами на конце каждого из стержней. В зависимости от частоты вращения положение равновесия системы (углы отклонения верхней (φ_1) и нижней (φ_2) половин туловища) будет разным. Интуитивно понятно, что при малых скоростях вращения мы получим устойчивое положение с нулевыми углами отклонения от вертикальной оси ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$). Равновесное состояние соответствует минимуму потенциальной энергии. Давайте же ее запишем. Она будет состоять из двух компонент — в поле силы тяжести и в поле центробежных сил (для простоты описания мы

перешли в неинерциальную систему отсчета):

$$U = -mg\ell \cos \varphi_1 - mg\ell(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) - \dots \\ \dots - \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2 \sin^2 \varphi_1 - \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)^2.$$

Аналитическое решение мы сможем получить, если предположим, что углы малы, но именно такая ситуация будет наблюдаться при равномерном увеличении скорости вращения. Вспоминая, что синус и косинус малого угла могут быть аппроксимированы следующим образом: $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$. Тогда, отбросив несущественную постоянную часть, придадим выражению для потенциальной энергии Николая следующий вид:

$$U(\varphi_1, \varphi_2) = m\ell \left[\varphi_1^2 (g - \omega^2\ell) + \varphi_2^2 (g/2 - \omega^2\ell/2) - \varphi_1\varphi_2\omega^2\ell \right].$$

Нам необходимо найти минимум потенциальной энергии, но такой минимум, который отвечал бы ненулевой паре φ_1 и φ_2 . Для этого необходимо потребовать, чтобы квадратичная форма, которой по факту является потенциальная энергия, была бы отрицательно определенной. По-простому данный момент можно понять, если сделать так называемое приведение к канонической форме:

$$U(\varphi_1, \varphi_2) = m\ell \left[(g - \omega^2\ell) \left(\varphi_1 - \varphi_2 \frac{\omega^2\ell}{2(g - \omega^2\ell)} \right)^2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \varphi_2^2 \left(g/2 - \omega^2\ell/2 - \frac{\omega^4\ell^2}{4(g - \omega^2\ell)} \right) \right].$$

Так как углы входят квадратичным образом в состав выражения, то в случае положительности коэффициентов при квадратах углов, потенциальная энергия будет принимать минимальное значение (ноль) только лишь в случае нулевых значений углов (нулевое значение второго угла приводит к нулевому значению первого, что хорошо видно из выражения). Тогда, чтобы равновесию соответствовала конфигурация с Колей, где его тело образует ненулевые углы с вертикалью, достаточно потребовать отрица-

тельности любого из коэффициентов:

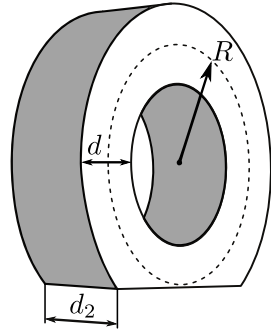
$$\omega > \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad \text{или} \quad \omega > \sqrt{\frac{g(2 - \sqrt{2})}{\ell}}.$$

Выбираем условие, которое позволяет найти минимальное значение угловой скорости, достаточной чтобы Коля крутился не вертикальным образом, т.е. $\omega > \sqrt{g/(2 - \sqrt{2})\ell}$.

Ответ: $u_{\min} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{g(2 - \sqrt{2})}{\ell}}.$

Задача 2

Костя, масса которого m , любит сидеть за рулем своего современного сверхлегкого велосипеда, да настолько, что даже во время подкачки шин, которую осуществляет его отец, он старается не слезать с него. У Кости весьма широкая кость, что значительно усложняет жизнь его отца. Известно, однако, что дыхалки папы хватает на N проходов насоса. Папа Кости наивно подумал, что для упрощения процесса надо вежливо попросить Костика слезть с велосипеда.



Во сколько больше раз ему удастся провести циклов накачки, если считать, что усталость пропорциональна оказываемому усилию по движению насоса?

Считать избыточное давление в шинах неизменным, взяв в качестве среднего значения p . Атмосферное давление считать известным и равным p_0 . Считать, что сечение камеры колеса - прямоугольник, и все ее геометрические размеры известны (см.рис.): радиус (доходит до центра камеры) обода R , высота самого колеса d , а ширина колеса равна d_2 .

Считать, что колесо под весом Кости деформируется на высоту ΔR , а изменение объема при этом равно:

$$\Delta V = \frac{4d_2}{3} \sqrt{2\Delta R^3(R + d/2)}.$$

Когда Костя встает с велосипеда, то объем покрышки увеличивается на ΔV , это приводит к тому, что давление внутри падает на Δp . Давайте напишем соответствующее соотношение для изотермического процесса: $(V - \Delta V)(p_0 + p) = V(p_0 + p - \Delta p)$, где V — объем недеформированного колеса. Этот объем легко найти, он равен: $V = d_2\pi(R^2 - (R - d)^2)$. Отсюда понятно, что выигрыш в количестве совершенных актов накачивания шины за

один подход можно оценить как:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{(p_0 + p)}{(p_0 + p - \Delta p)} = \frac{V}{(V - \Delta V)},$$

где N_2 — количество актов накачивания, которые может совершить отец Кости на одном дыхании, если тот слезет с велосипеда. Теперь зададимся целью найти объем ΔV , на который уменьшаются колеса велосипеда при нахождении на нем Кости. Очевидно, что для этого надо найти площадь, на которую уменьшается колеса при взгляде на него сбоку. Для этого можно найти площадь сектора и вычесть площадь соответствующего треугольника:

$$\begin{aligned}\Delta S &= S_{sec} - S_{tri} = R^2 \arcsin \left[\frac{\sqrt{R^2 - (R - \Delta R)^2}}{R} \right] - \dots \\ &\dots - (R - \Delta R) \sqrt{R^2 - (R - \Delta R)^2} \approx \dots \\ &\dots \approx \Delta R \sqrt{R^2 - (R - \Delta R)^2}.\end{aligned}$$

Изменение объема равно $\Delta V = \Delta S d_2 = d_2 \Delta R \sqrt{R^2 - (R - \Delta R)^2}$.

Нам необходимо написать еще одно уравнение, которое будет выражать условие равновесия, когда Костя сидит на велосипеде. На область покрышки, которая является областью соприкосновения с асфальтом, с внутренней стороны действует сила $(p + p_0)S$, а с внешней $p_0 S + mg/2$. Эти силы должны быть равны. Зная ΔR , легко найти площадь соприкосновения S , она будет равна $2d_2 \sqrt{R^2 - (R - \Delta R)^2}$. Подставляя это в соотношение на равенство сил: $2pd_2 \sqrt{R^2 - (R - \Delta R)^2} = \frac{mg}{2}$, получаем (с учетом малости ΔR):

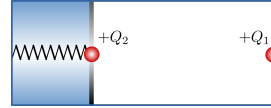
$$d_2 \sqrt{R^2 - (R - \Delta R)^2} = mg/4p, \quad \Delta R \approx \frac{mg}{8\pi d_2 p R}.$$

Из всех полученных выше соотношений, после тривиальных подстановок может быть получен окончательный ответ.

Ответ:
$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta V}{V}} = \frac{1}{1 - \frac{(mg)^3}{128\pi p^3 d_2^3 R(R^2 - (R - d)^2)}}.$$

Задача 3

Массивный диэлектрический поршень может перемещаться без трения в закрытом теплоизолированном цилиндре. Поршень соединен с левой стенкой цилиндра пружиной. В центре поршня и на правой стенке цилиндра закреплены точечные одноименные электрические заряды. Справа от поршня вакуум, а слева - идеальный газ при температуре T_1 . При этом значении температуры газ занимает одну четверть объема цилиндра, а пружина не напряжена. Если температуру газа увеличить до T_2 он будет занимать половину объема.



При какой температуре газ займет $3/4$ объема цилиндра?

Введем следующие обозначения: V - полный объем цилиндра, S - площадь его поперечного сечения, ℓ - длина цилиндра, $k = 1/4\pi\epsilon_0$ - электрическая постоянная в законе Кулона, κ - коэффициент упругости пружины.

Запишем условие механического равновесия поршня при температуре T_1 , когда пружина не напряжена, сила газового давления слева на поршень уравнивается только силой электростатического отталкивания одноименных зарядов:

$$P_1 S = \frac{4\nu RT_1}{V} S = \frac{4\nu RT_1}{\ell} = k \frac{Q_1 Q_2}{(3\ell/4)^2} \implies k \frac{Q_1 Q_2}{\ell^2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{\nu RT_1}{\ell}.$$

Здесь для нахождения связи давления, объема и температуры было использовано уравнение Менделеева-Клапейрона $PV = \nu RT$.

Условия равновесия при температурах T_2 и T_3 будут включать силу упругости растянутой пружины:

$$\begin{cases} \frac{2\nu RT_2}{\ell} = k \frac{Q_1 Q_2}{(\ell/2)^2} + \kappa \frac{\ell}{4} \\ \frac{4\nu RT_3}{3\ell} = k \frac{Q_1 Q_2}{(\ell/4)^2} + \kappa \frac{\ell}{2}. \end{cases}$$

Исключив из данных уравнений с помощью соотношения $k \frac{Q_1 Q_2}{\ell^2} = \frac{9\nu R T_1}{4\ell}$ электрические заряды, получим более простую систему:

$$\begin{cases} \frac{\nu R}{\ell} (2T_2 - 9T_1) = \kappa \frac{\ell}{4} \\ \frac{\nu R}{\ell} \left(\frac{4}{3}T_3 - 36T_1 \right) = \kappa \frac{\ell}{2}, \end{cases}$$

из которой путем тривиальных подстановок получим окончательный ответ.

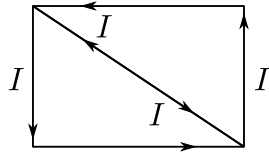
Ответ: $T_3 = \frac{3}{4} (18T_1 + 4T_2).$

Задача 4

Вова (тот самый, который очень любит прямоугольные треугольники), взял тонкий однородный проводящий стержень длиной L , разрезал его на три части и шарнирно соединив их концы, сделал свой любимый объект. Затем Вова поместил получившийся треугольник в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ перпендикулярное его плоскости и пропустил в получившемся проводящем контуре постоянный ток силы I . При этом сила натяжения одного из катетов оказалась равна T .

Найдите длины сторон получившегося треугольника и значения сил натяжения второго катета и гипотенузы. Собственным магнитным полем треугольника можно пренебречь.

Предположим, что ток циклирует по треугольному контуру против часовой стрелки, а вектор магнитной индукции направлен «на нас» из плоскости рисунка. В этом случае на стороны треугольника перпендикулярно им будут действовать силы Ампера, направленные «наружу». Действие этих сил приведет к натяжению катетов, но никак не скажется на напряжении гипотенузы.



Проще всего это понять, представив *прямоугольный* контур с током со сторонами, равными длинам катетов исходного треугольника. Силы взаимодействия сторон в таком контуре с током в перпендикулярном магнитном поле будут направлены вдоль них самих и не будут приводить к изменению формы контура, даже если его стороны соединены между собой шарнирами. Таким образом, диагональные углы этого контура можно соединить между собой еще одним стержнем, который не будет натянут или сжат.

Далее представим, что по добавленному стержню идут в противоположных направлениях токи, равные по модулю друг другу и току, текущему во «внешнем» контуре – в рассматриваемой ситуации ничего не поменяется. А теперь разделим получившуюся токовую систему на две одинаковые части, эквивалентные исходному треугольнику – в каждой из них гипотенуза не будет натянута.

Заметим, что силы взаимодействия гипотенузы с катетами в шарнирах будут отличны от нуля, но направлены они будут перпендикулярно к ней (в противном случае возникло бы натяжение). Также ввиду суммарного нулевого момента всех сил, действующих на гипотенузу модули сил $\vec{F}$, действующих на гипотенузу на каждом из ее концов будут равными, что означает, что каждая из них будет равна половине от силы Ампера, действующей на гипотенузу:

$$F = \frac{IB\ell}{2},$$

где $\ell = \sqrt{a^2 + b^2}$ — длина гипотенузы. Продольные к катетам составляющие сил $\vec{F}$ и будут определять их натяжение:

$$\begin{cases} T_a = F \cos \varphi = \frac{IB\ell}{2} \frac{b}{\ell} = \frac{IBb}{2} \\ T_b = F \sin \varphi = \frac{IB\ell}{2} \frac{a}{\ell} = \frac{IBa}{2}. \end{cases}$$

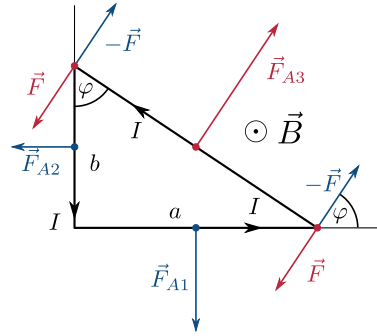
Предположим, что в условии задачи задана сила натяжения T катета с длиной a , тогда мы мгновенно находим длину другого катета: $b = 2T/IB$. Длину a находим с помощью теоремы Пифагора и заданного значения периметра треугольника:

$$L = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \implies a = \frac{L/2 - b}{1 - b/L} = \frac{L}{2} \cdot \frac{IBL - 4T}{IBL - 2T}.$$

При известной длине a силу натяжения для катета с длиной b находим из соотношения $T_b = IBa/2$.

Ответ:

$$\begin{cases} a = \frac{L}{2} \cdot \frac{IBL - 4T}{IBL - 2T}, & b = \frac{2T}{IB} \\ T_\ell = 0, & T_a = T, & T_b = \frac{IBL}{2} \cdot \frac{IBL - 4T}{IBL - 2T}. \end{cases}$$

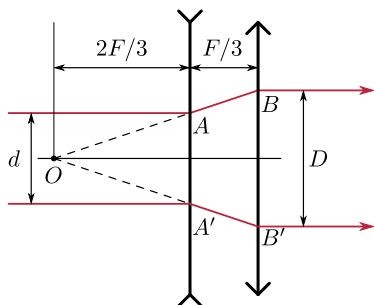


Задача 5

Сотруднику оптической лаборатории физического факультета ИТМО Трофиму поставлена определенная задача: увеличить диаметр параллельного пучка лазерного излучения, оставив, разумеется, пучок параллельным. Для выполнения этой задачи Трофим получил n собирающих линз с фокусным расстоянием F и n рассеивающих линз с фокусным расстоянием $2F$ с обязательным требованием использовать всех их в оптической схеме.

Сможет ли Трофим полностью справиться с поставленной задачей? Как должен он расположить линзы и во сколько раз увеличится диаметр пучка?

Рассмотрим один элемент данной оптической схемы, состоящий из одной рассеивающей и одной собирающей линзы. Параллельный пучок лучей, падающий на рассеивающую линзу, станет после прохождения сквозь нее расходящимся пучком, причем точка пересечения продолжений расходящихся лучей будет находиться на главной оптической оси на расстоянии $2F$ от линзы. Будем считать, что в этой точке расположен мнимый источник. Для того чтобы лучи, исходящие из него, собирающая линза смогла превратить в параллельный пучок необходимо, чтобы источник был удален от нее на фокусное расстояние, но оно для собирающей линзы равно $F < 2F$. Таким образом пара линз, в которой оптическая сила собирающей линзы больше, не дает необходимо результата. Необходимо каким-либо образом сделать оптическую силу рассеивающей линзы больше, чем у собирающей. Этого можно достичь используя не одну, а три поставленные вплотную рассеивающие линзы. В этом случае их оптические силы, как известно, складываются и первый компонент конструируемой схемы будет обладать оптической силой $3/2F$ и, соответственно, фокусным расстоянием $2F/3$, что меньше, чем у собирающей линзы.



Полностью поставленную задачу Трофиму решить не сможет, так как в схеме будут задействованы все рассеивающие линзы (да и то, при условии, что их число кратно трем) и только треть из собирающих линз (хотя и тут, возможно, 1-2 останутся лишними).

В заключении найдем коэффициент расширения пучка для одного элемента схемы. Обратим внимание на рисунке на два подобных треугольника OAA' и OBB' . Соотношение между их вертикальными сторонами это искомый коэффициент расширения : $\Gamma_1 = \frac{D}{d} = \frac{BB'}{AA'}$, и он равен отношению их высот $\Gamma_1 = \frac{F}{2F/3} = \frac{3}{2}$. Общее количество таких элементов будет примерно равно $n/3$. Возводя коэффициент расширения для одного элемента в степень $n/3$, получим окончательный ответ задачи.

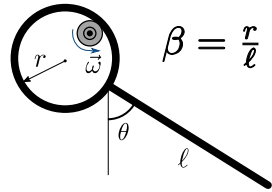
Ответ: $\Gamma = \left(\frac{3}{2}\right)^{n/3}$.

См.также решение этой задачи <https://youtu.be/QMwRbyUPbPg>.

11 класс

Задача 1

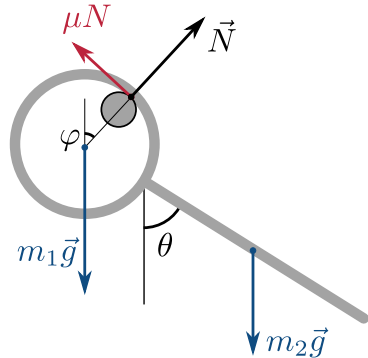
Учитель физики выдал Гоше держатель от лабораторного штатива, у которого отношение радиуса кольца к длине стержня равно β . Если кольцо надеть на патрон дрели, который вращается с некоторой частотой, то стержень отклонится от вертикали на некоторый угол.



Учитель дал Гоше задание - рассчитать значение этого угла, сообщив, что коэффициент трения между кольцом и патроном имеет значение $\mu = \alpha\beta$ (где α - известная константа).

Какова связь между углом отклонения θ и параметром β .

Обозначим φ угол между вертикалью и направлением на точку касания держателя и патрона дрели. Тогда уравнение баланса сил (II закон Ньютона) в проекции на горизонтальное направление будет иметь вид $\mu N \cos \varphi = N \sin \varphi$, что дает нам равновесное значение данного угла: $\operatorname{tg} \varphi = \mu = \alpha\beta$. Следовательно



$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{1 + \alpha^2\beta^2}}.$$

Второе уравнение, необходимое для решения задачи получим из равенства нулю проекций всех сил на направление параллельное вектору силы реакции $\vec{N}$:

$$N = (m_1 + m_2)g \cos \varphi, \quad (*)$$

где m_1 и m_2 массы кольца и стержня, соответственно.

Третье уравнение появляется из баланса моментов сил отно-

сительно центра кольца:

$$\mu Nr = m_2 g(r + \ell/2) \sin \theta. \quad (**)$$

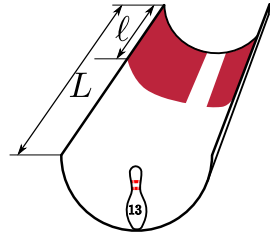
Последовательно исключая из уравнений (*) и (**) величину силы реакции N и тригонометрические функции угла φ получаем окончательный ответ задачи:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\mu Nr}{m_2 g(r + \ell/2)} = \frac{(m_1 + m_2) \mu r \cos \varphi}{m_2 (r + \ell/2)} = \dots \\ \dots &= \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \frac{r}{r + \ell/2} \mu \cos \varphi = \left(1 + \frac{2\pi r}{\ell}\right) \frac{r}{r + \ell/2} \sin \varphi = \dots \\ \dots &= \left(1 + \frac{2\pi r}{\ell}\right) \frac{r}{r + \ell/2} \frac{\alpha \beta}{\sqrt{1 + \alpha^2 \beta^2}} = (1 + 2\pi \beta) \frac{2\beta}{1 + 2\beta} \frac{\alpha \beta}{\sqrt{1 + \alpha^2 \beta^2}}. \end{aligned}$$

Ответ: $\theta(\beta) = \arcsin \left(\frac{1 + 2\pi \beta}{1 + 2\beta} \cdot \frac{2\alpha \beta^2}{\sqrt{1 + \alpha^2 \beta^2}} \right).$

Задача 2

Группа товарищей решила сыграть в необычный боулинг. Дорожки такого боулинга представляют из себя половинку цилиндра длиной L и радиусом кривизны R . Ось цилиндра составляет с горизонтом угол α . Сами шары и кегли имеют настолько маленькие размеры, что их можно принять за материальные точки. Главное правило такого боулинга, что шар можно запускать из любой точки, находящейся на удалении от начала дорожки не более чем на расстояние ℓ , за исключением некой центральной полосы (на рисунке разрешенные области для старта выделены красным цветом). Шары бросают по очереди. Побеждает тот, кто сбивает последнюю кеглю.



В какой-то момент осталась одна кегля, которая находится в самой нижней точке желоба, а очередь дошла до Иннокентия. Иннокентий хорошо разбирался в механике и понял, что есть множество особых точек, куда можно поставить шар с нулевой скоростью и он точно собьет последнюю кеглю.

Чему равно минимальное расстояние от начала дорожки до одной из таких точек?

Любым трением в системе можно пренебречь.

Выберем систему координат таким образом, чтобы ось Ox была направлена вдоль образующей цилиндра и составляла угол α с горизонтом, а ось Oy находилась в вертикальной плоскости. Тогда проекции вектора ускорения свободного падения на эти оси будут иметь вид:

$$\begin{cases} g_x = g \sin \alpha \\ g_y = -g \cos \alpha \end{cases}$$

Наличие g_y будет приводить к возникновению колебательного движения, подобного качанию математического маятника, в плос-

кости yOz . Циклическая частота данного процесса будет равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g_y}{R}} = \sqrt{\frac{g \cos \alpha}{R}}.$$

Необходимым условием попадания в кеглю является то, что за время спуска шара должно произойти целое число полупериодов его колебаний плюс одна четверть периода, которая будет соответствовать его переходу из стартовой точки на наинизшую образующую цилиндра. Данное условие может быть записано в виде:

$$\omega_0 t = \pi(k + 1/2), k \in \mathbb{Z}.$$

В свою очередь время спуска к кегле определяется ускорением g_x и путем $S = L - x$, который должен пройти шар до столкновения с кеглей (здесь x - искомое расстояние от начала дорожки до точки старта).

$$S = \frac{g_x t^2}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \pi^2 R (k + 1/2)^2.$$

Найти минимальное значение x можно минимизируя значение выражения $L - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \pi^2 R (k + 1/2)^2$ по параметру k

Ответ: $x_{\min} = \min_k \left[L - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \pi^2 R (k + 1/2)^2 \right].$

Задача 3

Цилиндрический сосуд длиной ℓ с теплоизолирующей боковой поверхностью заполнен идеальным газом и расположен в горизонтальном положении. Основания цилиндра имеют равные температуры T_0 .

На какое расстояние и в каком направлении переместится центр массы газа, если температуру одного из оснований увеличить на ΔT ? Коэффициент теплопроводности газа не зависит от температуры и $\Delta T \ll T_0$.

Так как данная система находится в стационарном (хотя и неравновесном состоянии) и отсутствуют тепловые потери через боковую стенку, то поток тепла в любом поперечном сечении цилиндра должен иметь постоянное значение, что возможно только при наличии постоянного (не зависящего от продольной координаты) градиента температуры. Найдем распределение температуры как функцию координаты x , отсчитываемой от более холодного торца сосуда:

$$T(x) = T_0 + \frac{dT}{dx}x = T_0 + \frac{\Delta T}{\ell}x = T_0(1 + \alpha x),$$

где $\alpha = \Delta T/T_0\ell$.

В условия механического равновесия давление $P = nkT$ в любой точке цилиндра должно иметь постоянное значение, а значит концентрация (плотность) газа должна зависеть от координаты. Учитывая условие задачи $\Delta T \ll T_0$, определим характер этой зависимости как линейный $n(x) = n_0(1 - \beta x)$ и найдем из условия постоянства давления в линейном приближении величину параметра β :

$$dP = n dT + T dn = 0 \implies \beta = -\frac{1}{n_0} \frac{dn}{dx} = \frac{1}{T_0} \frac{dT}{dx} = \frac{\Delta T}{T_0 \ell} = \alpha.$$

Координату центра масс ищем исходя из ее определения:

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^\ell n(x) x dx}{\int_0^\ell n(x) dx} = \frac{\int_0^\ell x(1 - \alpha x) dx}{\int_0^\ell (1 - \alpha x) dx} = \dots \\&\dots = \frac{\ell^2/2 - \alpha \ell^3/3}{\ell - \alpha \ell^2/2} = \frac{3 - 2\alpha \ell}{6 - 3\alpha \ell} \ell.\end{aligned}$$

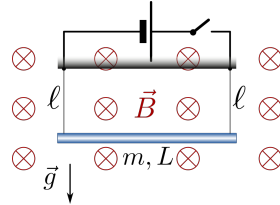
Величину смещения центра масс найдем вычтя из его «старого» месторасположения $\ell/2$ новое.

Ответ: $\Delta x_c = \frac{\Delta T/T_0}{6(2 - \Delta T/T_0)} \approx \frac{\Delta T}{12T_0}.$

См.также решение этой задачи <https://youtu.be/XAoNElo00iI>.

Задача 4

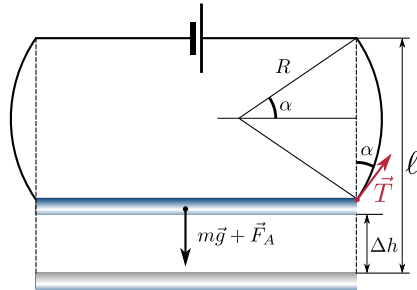
На двух невесомых и нерастяжимых проводящих нитях равной длины ℓ подвешен жесткий проводящий стержень массы m и длины L . Свободные концы нитей подключены к источнику постоянного тока силой I .



На какой высоте относительно начального уровня окажется стержень после очень медленного включения однородного магнитного поля с индукцией B , которое направлено перпендикулярно плоскости рисунка?

Собственное магнитное поле всех проводников системы пренебрежимо мало по сравнению с внешним. При малых углах $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3$.

Направления электрического тока в стержне и магнитного поля таковы, что сила Ампера, действующая на стержень, не будет способствовать его подъему, так как будет направлена вниз. Подъем происходит из-за изменения формы нитей - на них также действует сила Ампера, они принимают криволинейную форму, которую в первом приближении можно считать дугой окружности, расстояние между их концами становится меньше при неизменной длине и стержень поднимается на некоторую высоту. Обозначив новое расстояние между концами нитей ℓ' , найдем высоту подъема Δh :



$$\Delta h = \ell - \ell' + \begin{cases} \ell' = 2R \sin \alpha \\ \ell = 2R\alpha \end{cases} \Rightarrow \Delta h = \ell \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \approx \frac{\ell \alpha^2}{6}.$$

Необходимый для получения ответа угол α найдем из условий баланса сил, действующих в вертикальном направлении на стержень и горизонтальном направлении на одну из поддерживающих

нитей:

$$\begin{cases} mg + IBL = 2T \cos \alpha \\ IBl' = 2T \sin \alpha \end{cases} \implies \alpha = \frac{IB\ell}{mg + IBL}.$$

Ответ: $\Delta h = \left(\frac{IB\ell}{mg + IBL} \right)^2 \cdot \frac{\ell}{6}$

См.также решение этой задачи https://youtu.be/0vhjmPY4_oo.

Задача 5

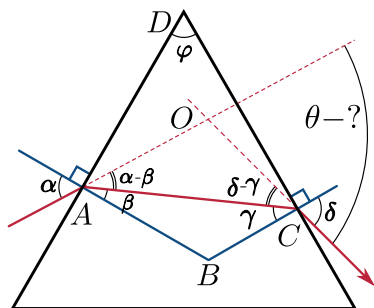
Мама Гавроши Зинаида не оценила предложенный им дизайн его будущей комнаты. Все дело в том, что Гавроша предложил окрасить одну из стен, высота которой $h = 3$ метра, целиком в белый цвет, но Зинаида решила настоять на чем-нибудь веселеньком. Гавроша решил отыгаться и выкрасить данную стену во все цвета радуги, однако он не хотел перманентного эффекта. Для этого он взял правильную (с преломляющим углом $\varphi = \frac{\pi}{3}$) очень высокую трехгранную призму и много источников направленных лучей дневного света. Установил данную призму одной из боковых граней на горизонтальный стол и выстроил все источники лучей в одну линию, параллельную оси призмы, направив их на саму призму под углом $\psi = 5\pi/18$ к вертикали. С высотой установки стола он вроде как разобрался, а вот с расстоянием от стены у Гавроши возникли трудности.

На каком расстоянии L от стены необходимо установить стол с призмой?

Размерами призмы и стола по сравнению с расстоянием до стены можно пренебречь.

Считать, что показатель преломления призмы зависит от длины волны следующим образом: $n(\lambda) = 1,3 + a/\lambda^2$, где $a = 10^4 \text{ нм}^2$. Видимый спектр находится в диапазоне от 400 до 760 нм.

Получим соотношение, связывающее угол α , под которым направлен падающий на призму луч, показатель преломления n , преломляющий угол призмы φ и угол отклонения луча от первоначального направления θ . В условии угол падения задан относительно вертикали, но существенно удобнее отсчитывать его от нормали к в призму. Нетрудно (см.рис.) заме-



Рассмотрим треугольник $АОС$. Искомый угол θ является смеж-

ным для этого треугольника, поэтому

$$\theta = (\alpha - \beta) + (\delta - \gamma) = (\alpha + \delta) - (\beta + \gamma). \quad (*)$$

Далее рассмотрим четырёхугольник $ABCD$. В этом четырёхугольнике два угла — прямые, а значит угол ABC равен $\pi - \varphi$. Далее рассмотрим треугольник ABC , сумма его углов равна π , то есть:

$$\beta + \gamma + (\pi - \varphi) = \pi$$

$$\varphi = \beta + \gamma.$$

Тогда уравнение $(*)$ примет вид:

$$\theta = \alpha + \delta - \varphi.$$

Из закона Снеллиуса $n \sin \gamma = \sin \delta$ и соотношения $\gamma = \varphi - \beta$ следует связь между углом преломления луча на выходе из призмы δ и углом β :

$$\delta = \arcsin(n \sin(\varphi - \beta)).$$

Чтобы найти угол β применим закон Снеллиуса в точке входа луча в призму $\sin \alpha = n \sin \beta$:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right).$$

Углы φ и α явно заданы в условии задачи, что при найденном значении угла β позволяет выразить угол отклонения луча θ :

$$\theta = \alpha - \varphi + \arcsin\left[n \sin\left(\varphi - \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)\right)\right].$$

Преломившийся в призме луч будет составлять с горизонталью направление $\xi = \frac{\pi}{2} - \theta - \psi$. Ввиду наличия у призмы дисперсии лучи, соответствующие красной и фиолетовой границе спектра будут отклонены на разные углы. Нам необходимо такое расстояние L от призмы до стены, чтобы разность высот красного и

фиолетового лучей на ней была равна заданной высоте стены h :

$$h = h_1 - h_2 = L \left(\operatorname{tg} \xi_1 - \operatorname{tg} \xi_2 \right),$$

где $\xi_{1,2} = \xi(n(\lambda_{1,2}))$ - углы отклонения лучей, соответствующие границам видимого диапазона.

Ответ: $L = \frac{h}{\operatorname{tg} \xi_1 - \operatorname{tg} \xi_2},$
где

$$\xi_{1,2} = \frac{\varphi}{2} - \arcsin \left[n_{1,2} \sin \left(\varphi - \arcsin \left(\frac{\cos(\psi - \varphi/2)}{n_{1,2}} \right) \right) \right],$$

$$n_{1,2} = 1,3 + \frac{a}{\lambda_{1,2}^2}, \quad \lambda_1 = 400 \text{ нм}, \lambda_2 = 760 \text{ нм}.$$

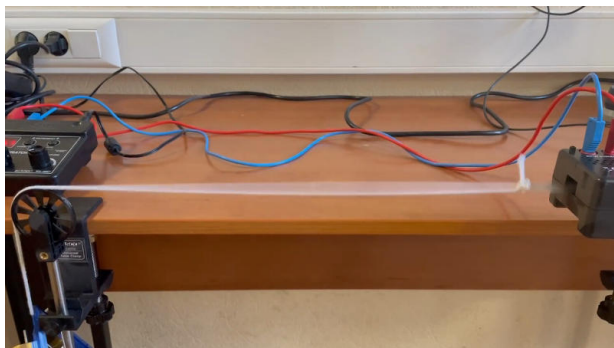
Экспериментальный тур финального этапа

7-8 класс

Условие задачи экспериментального тура

Найдите с максимально возможной точностью частоту колебаний упругого шнура, процесс которых представлен в видеофрагменте (<https://youtu.be/G6hFZcpNXkg>).

Расчет должен иметь подробное физическое обоснование.



Кадр из видеофрагмента <https://youtu.be/G6hFZcpNXkg>

Справочная информация о видеопотоке:

- Codec: H264 - MPEG-4 AVC (part 10) (avc1)
- Type: Video
- Video resolution: 1280x720
- Frame rate: 30
- Orientation: Top left
- Color space: ITU-R BT.709 Range

При просмотре видео несложно заметить, что объект совершает периодическое движение, но с достаточно низкой частотой, нехарактерной для процесса колебаний упругого шнура с длиной порядка одного метра. Наблюдаемое явление есть следствие того, что видеокамера фиксирует положение колеблющегося объекта не непрерывно, а в отдельные равноотстоящие моменты времени. Если бы частота кадров в точности совпадала бы с частотой колебаний шнура, то он казался бы в видео полностью неподвижным – это проявление т.н. стробоскопического эффекта. Поскольку частота колебаний немного отличается от частоты кадров шнур кажется медленно и плавно движущимся.

Определить «кажущийся» период колебаний шнура можно по видео, которое просматривается в «замедленном» режиме, подсчитав количество полных таких колебаний за достаточно длительный интервал экранного времени, например за 10 секунд. Найденная таким образом частота «биений» примерно равна $f \approx 1,5 \text{ с}^{-1}$. С другой стороны данная частота равна модулю разности частот видеосъемки f_1 и колебаний шнура f_2 :

$$f = |f_1 - f_2|,$$

где $f_1 = 30 \text{ с}^{-1}$. Таким образом, однозначно определить f_2 не получится: $f_2 = f_1 \pm f$.

Ответ: $f_2 = 31,5 \text{ Гц}$ или $f_2 = 28,5 \text{ Гц}$.

9-10 класс

Условие задачи экспериментального тура

Посмотрев видеофрагмент (<https://youtu.be/IRlHlW-HIhE>), объясните показанный в нем процесс: в какой-то момент вертикальное положение центрального подвеса с шариком становится неустойчивым.



Кадр из видеофрагмента <https://youtu.be/IRlHlW-HIhE>

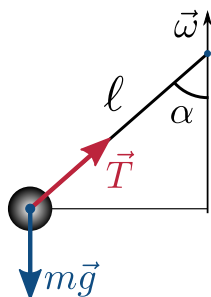
Помимо этого, необходимо выполнить ряд числовых оценок:

- оцените длину подвеса центрального шарика
- найдите угол отклонения ближайшего к центральному шарiku в тот момент, когда вертикальное положение центрального становится неустойчивым

Условие равновесия центрального шарика непосредственно следует из II закона Ньютона для него:

$$\begin{cases} T \cos \alpha = mg \\ T \sin \alpha = m\omega^2 R = m\omega^2 \ell \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 \ell}.$$

Если $\omega < \sqrt{g/\ell} \Rightarrow \alpha = 0$ - это устойчивое равновесие (и других решений нет). Угловая



скорость или связанная с ней центробежная сила недостаточно велика, чтобы вывести шарик из положения равновесия.

Если $\omega \geq \sqrt{g/\ell} \implies \alpha = \arccos \frac{g}{\omega^2 \ell}$. Равновесное положение возникает при ненулевом угле α .

Угловую скорость вращения удобно определять при просмотре видео в «замедленном» режиме. В момент выхода на ненулевой угол отклонения она примерно равна $f = 1,5$ (Гц). Дадим оценку длины подвеса:

$$\ell \approx \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{4\pi^2 f^2} = \frac{9,8 \text{ м/с}^2}{4\pi^2 2,25 \text{ с}^{-2}} \approx 11 \text{ см.}$$

Для шарика находящегося в «нецентральной» положении уравнения движения будут отличаться незначительно, увеличится только радиус вращения на расстояние между двумя ближайшими точками подвеса, которое примерно равно половине длины нити подвеса:

$$\begin{cases} T \cos \beta = mg \\ T \sin \beta = m\omega^2 R' = m\omega^2 \ell \left(\frac{1}{2} + \sin \beta \right) \end{cases} \implies \operatorname{tg} \beta = \left(\frac{1}{2} + \sin \beta \right).$$

Минимальный положительный корень этого уравнения $\beta \approx 52,1^\circ$.

Ответ: $\ell \approx 11 \text{ см}, \beta \approx 52,1^\circ$

11 класс

Условие задачи экспериментального тура

Посмотрев видеофрагменты и пользуясь всеми доступными в них данными (примерное значение высот, время падения и т.д.) оцените:

- долю потери энергии при соударении баскетбольного мяча с полом
- отношение масс теннисного и баскетбольного мячей



<https://youtu.be/kdLOmBhat1A>



<https://youtu.be/kEIGyVsLfjU>

Оценки должны иметь максимально подробное физическое обоснование, все этапы наблюдаемого явления должны иметь подробное объяснение.

В первом видеоклипе мы видим как баскетбольный мяч, отпущенный с высоты примерно равной полутора метрам после удара о пол подскакивает на высоту около полуметра. Очевидно, он испытывает неупругий удар, а отношение стартовой высоты к высоте подскока после удара равно отношению энергий мяча. Таким образом, оценить долю потерянной энергии можно следующим образом:

$$\eta = \frac{E - E'}{E} = 1 - \frac{0,5 \text{ м}}{1,5 \text{ м}} = \frac{2}{3}.$$

Во втором клипе систему из баскетбольного и теннисного мячей отпускают с некоторой высоты H . После столкновения баскетбольного мяча с полом отразившийся от него теннисный мяч подскакивает на высоту, существенно большую, чем стартовая.

Процесс, происходящий в этом случае, можно объяснить следующим образом - баскетбольный мяч, столкнувшись с полом и, конечно, потеряв определенное количество энергии, движется *навстречу* теннисному мячу. После их столкновения ввиду существенной разности масс теннисный мяч приобретает значительную скорость, которая и позволяет ему подняться на высоту $h > H$.

Запишем законы сохранения энергии и импульса для процесса столкновения мячей:

$$\begin{cases} MV - mv = MU' + mu \\ MV^2 + mv^2 = MU'^2 + mu'^2 \end{cases}$$

Совместное решение этих уравнений путем исключения скорости баскетбольного мяча после столкновения U позволяет найти отношение масс мячей:

$$\frac{M}{m} = \frac{u + v}{2V - u + v},$$

где $v = \sqrt{2gH}$ и $u = \sqrt{2gh}$ - скорости теннисного мяча до и после столкновения, соответственно, а $V = \sqrt{2gH/3}$ - скорость баскетбольного мяча перед столкновением (коэффициент "3" учи-

тывает количество энергии, оставшейся после удара о пол). Тогда выражению для отношения масс можно придать следующий вид:

$$\frac{M}{m} = \frac{\sqrt{h} + \sqrt{H}}{2\sqrt{H/3} - \sqrt{h} + \sqrt{H}}.$$

Оценив высоты точки старта и наивысшей точки траектории теннисного мяча, как $H = 1,0$ м и $h = 2,5$ м, получаем для $M/m \approx 4.5$, и это является заниженной примерно в два раза величиной. С учетом используемых приближений это достаточно неплохая оценка для искомого параметра.

Критерии определения победителей и призеров Олимпиады

На отборочном этапе участникам Олимпиады 2021/22 учебного года в каждом из двух последовательных туров было предложено решить по 10 (десять) задач. Каждая задача в каждом из туров оценивалась одним баллом. Таким образом, максимальное суммарное количество баллов, которые мог набрать участник вне зависимости от класса обучения составляло 20. Отборочный этап проводился в дистанционно-заочном формате, правильность решения проверялась по представляемому числовому ответу. В том случае, если представленный ответ попадал в границы погрешности, определяемые индивидуально для каждой задачи, участник Олимпиады получал максимальный балл за данную задачу. В случае представления ошибочного числового ответа или его полного отсутствия баллы за задачу не начислялись.

После завершения второго тура отборочного этапа количество баллов, набранных при решении всех задач отборочного этапа, как первого, так и второго тура, было просуммировано. На основании составленного рейтингового списка жюри Олимпиады определило критериальные баллы допуска к финальному этапу Олимпиады, которые составили:

- 7 класс – 6 баллов
- 8 класс – 6 баллов
- 9 класс – 6 баллов
- 10 класс – 8 баллов
- 11 класс – 9 баллов

Финальный (заключительный) этап Олимпиады состоял из двух последовательно проводимых туров: теоретического и экспериментального. На теоретическом туре в каждом из классов участникам были предложены пять задач, максимальные баллы за которые приведены в таблице ниже. На экспериментальном туре участники получили практическую задачу (в таблице №6), оцениваемую максимально 8 баллами (для 11 класса 6 баллами).

Максимально возможный индивидуальный балл участника заключительного этапа 30 баллов.

Баллы за задачи финального этапа

№ задачи	1	2	3	4	5	6	Σ
7 класс	4	5	4	4	5	8	30
8 класс	4	5	4	4	5	8	30
9 класс	5	4	4	5	4	8	30
10 класс	5	4	4	5	4	8	30
11 класс	5	4	5	5	5	6	30

Для определения победителей и призеров на основе индивидуальных результатов участников был сформирован общий рейтинг всех участников заключительного этапа по сумме баллов за теоретический и экспериментальный туры.

В седьмом и девятом классе победителей и призеров выявлено не было.

Пороговые баллы в остальных классах, необходимые для получения статуса победителя или призера приведены в таблице.

Критериальные баллы финального этапа

№ класса	Победитель	Призер
8 класс	-	7
10 класс	-	9
11 класс	13	10