Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

Физический факультет

Задачи Открытой Олимпиады по физике 2022/23 уч. года

16 октября 2023 г.

Оглавление

Отборочный этап

Первый тур отборочного этапа

7 класс

Задача 1

Вася решил покрасить стены своей комнаты с помощью валика, ширина которого 20 *см*. Сколько времени ему понадобится, чтобы покрасить стену высотой 3 *м*, шириной 4 *м*, и толщиной 15 *см*? Вася двигает валик со скоростью 1 *м/мин*.

Задача 2

Вася решил позагорать и, чтобы загар лег лучше, намазался специальным кремом. На это он потратил 5 *г* крема плотностью 960 *кг/м*^{3}. Какой толщины будет слой крема на Васе, если площадь тела Васи $S = 1{,}33$ *м*^{2}?

Задача 3

Вася прошел 3 *км* прямо, затем повернул налево и прошел еще 4 *км*. Во сколько раз быстрее прошел бы Вася это расстояние, если бы пошел сразу по прямой из начальной точки в конечную? Считать скорость движения Васи постоянной.

Задача 4

Поход пешком в школу и обратно занимает у Васи 1 *час*. Если брат Васи слегка приболеет, то Вася может взять у него самокат. Тогда дорога до школы и обратно займет 12 *мин*. Сколько времени затратит Вася на дорогу в школу и обратно, если утром Вася успеет раньше брата взять самокат, но ему придется вернуть самокат брату в школе?

Задача 5

Каковы показания спидометра, если погрешность равна половине цены деления шкалы спидометра.

Варианты ответов:

(A) 80 ± 10 *км/ч*	(B) 90 ± 10 *км/ч*	(C) 100 ± 10 *км/ч*	(D) 90 ± 20 *км/ч*	(E) 80 ± 5 *км/ч*

Задача 6

Известно, что длина удава из известного советского мультфильма 38 попугаев и одно попугайское крылышко. На самом деле длина этого удава 38,6 попугая. А в мартышках длина удава на самом деле равна 30.

Определите длину мартышки в попугайских крылышках. Ответ округлите до целого значения.

Задача 7

Скорость света зависит от того, в какой среде она распространяется. Она определяется скоростью света в вакууме c и абсолютным показателем преломления среды n: $v = c/n$.

Пусть у нас имеется прямой оптоволоконный кабель, который наполовину состоит из вещества с показателем преломления $n_1 = 2$, а наполовину - с $n_2 = 4$. С двух сторон оптоволоконного кабеля одновременно запускают лучи света (с левой стороны находится среда с $n_1 = 2$, справа - с $n_2 = 4$).

Определите отношение длины всего оптоволоконного кабеля к расстоянию от середины кабеля до места встречи лучей. Ответ округлите до целого значения.

Задача 8

Определите среднюю скорость левого луча в оптоволоконном кабеле из условия предыдущей задачи за время до встречи лучей.

Принять скорость света в вакууме равной $c = 300\,000$ *км/с*.

Ответ приведите в *км/с* и округлите до целого значения.

Задача 9

Имеются две жидкости. Плотность первой жидкости равна ρ, плотность второй в $k = 10$ раз больше. В каком соотношении объемов $N = V_1/V_2$ нужно смешать жидкости, чтобы результирующая плотность смеси была равна 4ρ?

Задача 10

Всегда интересно узнавать что-то новое. Перед вами видео (https://youtu.be/9usdzU6sWR8) затухающих колебаний. Затухающие колебания — колебания, энергия которых уменьшается с течением времени.

https://youtu.be/9usdzU6sWR8

Определите отношение средней путевой скорости тела за первый период к средней путевой скорости тела за пятый период.

Период колебаний — наименьший промежуток времени, за который система совершает одно полное колебание (то есть возвращается в то же состояние, в котором она находилась в первоначальный момент, выбранный произвольно). За начало отсчета времени примите момент, когда тело в первый раз находилось в крайнем правом положении.

8 класс

Задача 1

Группа из 25 сосновых буратин отправилась в круиз на пароходе «Плавучий нидерландец». Какой дополнительный груз сможет взять на борт владелец парохода, если объем одного буратина равен объему человека?

Плотность буратина $\rho_0 = 500$ *кг*$/$*м*^{3}, плотность человека $\rho_1 = 1000$ *кг*$/$*м*^{3}. Массу одного человека считать равной 80 *кг*.

Варианты ответов:

(A) 40 *кг*	(B) 400 *кг*	(C) 1000 *кг*	(D) 2000 *кг*	(E) 3000 *кг*

Задача 2

Один из буратин от скуки захотел принять ванну. На пароходе нашли ванну и наполнили ее дистиллированной водой. Но проблема в том, что сосновый буратин не тонет в воде, а буратин хотел полностью окунуться в воду. Друзья решили ему помочь и вычитали в учебниках по физике, что вес тела будет увеличиваться, если перемещать его вверх с ускорением по закону $P = m(g + a)$, где a – ускорение тела, P – вес тела, $g = 10$ *м*$/$*с*^{2} – ускорение свободного падения.

На сколько изменится уровень погружения буратина в воду, если ванну вместе с ним поднимать с ускорением g вверх.

Плотность буратина $\rho_0 = 500$ *кг*$/$*м*^{3}, плотность воды $\rho_1 = 1000$ *кг*$/$*м*^{3}.

Задача 3

Малоизвестный факт, но некоторые буратины имеют нос с площадью торца носа 20 *см*^{2}. Это так называемые тупоносые буратины. И среди наших путешественников такой буратин тоже есть. Остальные буратины имеют стандартный нос с площадью торца 5 *см*^{2}.

Наши буратины нашли следующее развлечение. Нужно сделать пробоину площадью 20 см^2 в доске. Известно, что нос буратина выбивает участок, равный площади торца носа, если удар будет создавать давление $p = 2 \cdot 10^7$ *Па*. Буратины могут бить носом с силой $F = 24$ *кН*.

Какое минимальное количество ударов носом нужно совершить буратинам, чтобы сделать требуемую пробоину?

Задача 4 Буратины занялись чем попало. Один из буратин забрался на самую верхнюю точку парохода и прилег. Второго буратина, лежащего неподвижно, катали на найденной где-то кровати с колесиками. У какого из буратин внутренняя энергия больше, если лежат буратины в одинаковых позах?

Варианты ответов:

(A)	У первого, так как его потенциальная энергия больше
(B)	У второго, так как его кинетическая энергия больше
(C)	Нельзя определить, т.к. неизвестны высота и скорость
(D)	Внутренние энергии буратин равны

Задача 5

Буратин, взобравшийся на самую верхнюю точку парохода, решил спрыгнуть с нее на палубу, до которой было 10 *метров*. Другие буратины поставили на место приземления батут. Прыгающий буратин благодаря батуту оказался на палубе только после того как сначала отпружинил на высоту 6 *м*, а потом на высоту 2 *м*.

Определите работу силы тяжести, если масса буратина 20 *кг*.

Задача 6

Прогуливаясь по пароходу буратины нашли литровую банку синей жидкости и двухлитровую банку с красной жидкостью. Буратины опустили камушек в банку с синей жидкостью и увидели, что тот плавает, погрузившись на часть своего объема. После этого они смешали обе жидкости в трехлитровой банке и также опустили камушек. Камушек плавал и в смеси жидкостей. Буратины смогли определить, что объем погруженной части камушка в смесь жидкостей составляет 60% от объема погруженной части этого же камушка в синюю жидкость.

Найдите отношение плотности красной жидкости к плотности синей жидкости.

Задача 7

Пароход, на котором плыли буратины был достаточно медленным. Он плыл со скоростью всего лишь $v = 40$ *км/ч*. Плыть предстояло долго, поэтому буратины для развлечения решили измерить длину корабля. Для этого они отправили одного буратина прогуляться от кормы парохода к носу и обратно. В это время пароход проплывал мимо маяка и за шагающим буратином наблюдал служитель маяка в бинокль.

На сколько *км/ч* для служителя маяка отличались средние скорости буратина при движении от корме к носу и от носа к корме?

Задача 8

Буратины продолжали искать варианты развлечения на пароходе. Известно, что нос буратино имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Площадь торца носа равна 5 *см*^{2}. Длина носа также 5 *см*. Если буратин соврет, то длина носа увеличится на 5 *см*. На кончик носа одного из буратин повесили груз массой m, равный половине массы буратина.

Какое максимальное количество раз может соврать буратин, чтобы груз не перевесил его и он не упал? Толщина тела буратина 10 *см*. В нормальном состоянии масса носа буратина составляет 5 % от массы всего буратина.

Задача 9

На пароходе наступила ночь и стало прохладно (10 °C). Буратины решили согреться. Для этого они поставили два чайника. Один чайник заполнили водой наполовину, а второй чайник — полностью. Чтобы себя развлечь один буратин опустил нос в чайник, наполненный наполовину, а два других засунули носы в чайник, наполненный полностью. С точки зрения нагревания носов и воды полный чайник оказался в $\frac{8}{7}$ раз эффективнее.

Определите коэффициент полезного действия нагревания чайника, заполненного наполовину.

Задача 10

После того как буратины согрелись с помощью чайника, они продолжили бродить и зашли в комнату видеообучения, где увидели представленный ролик (https://youtu.be/9usdzU6sWR8). Ролик демонстрирует затухающие колебания. Затухающие колебания — колебания, энергия которых уменьшается с течением времени.

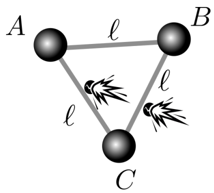
https://youtu.be/9usdzU6sWR8

Буратины решили занять себя простенькой задачкой: определить отношение средней путевой скорости тела за первый период к средней путевой скорости тела за пятый период (период колебаний — наименьший промежуток времени, за который система совершает одно полное колебание (то есть возвращается в то же состояние, в котором она находилась в первоначальный момент, выбранный произвольно). За начальный момент колебаний буратины взяли момент времени, когда тело находилось в крайнем правом положении.

Какой результат получили буратины?

9-10 класс

Задача 1



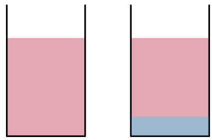
Межгалактическая космическая станция состоит из трех одинаковых сферических отсеков, которые расположены в вершинах равностороннего треугольника и соединены длинными герметичными коридорами длиной $\ell = 22$ *км*. Для создания искусственной гравитации станция вращается вокруг оси своей симметрии с периодом T.

Внезапно налетевший метеоритный поток привел к одновременному разрушению двух коридоров из трех.

На каком расстоянии окажется отсек C относительно середины коридора AB спустя время $1{,}4 \cdot T$ после произошедшей аварии?

Ответ дайте в километрах, округлив до целой части.

Задача 2



Теплоизолированный сосуд содержит некоторую жидкость объемом V с плотностью ρ при температуре T_1. Коэффициент объемного термического расширения этой жидкости равен α, а удельная массовая теплоемкость c.

В сосуд доливают другую, не смешивающуюся с первой, жидкость с коэффициентом термического расширения 2α и массовой теплоемкостью $5c$. Исходные плотность и объем добавленной жидкости равны 2ρ и $V/10$, соответственно, а температура T_2.

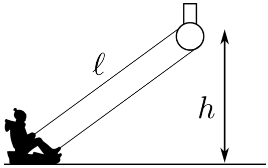
После установления теплового равновесия оказалось, что суммарный объем содержимого сосуда остался равен V.

Какова разность температур $\Delta T = T_1 - T_2$? Тепловым расширением сосуда можно пренебречь.

Варианты ответов:

(A) $1/2\alpha$	(B) $1/5\alpha$	(C) $2/\alpha$	(D) $10/\alpha$	(E) $1/4\alpha$

Задача 3

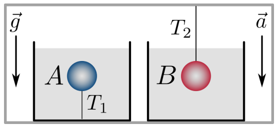


Для того чтобы покататься на санках самостоятельно Степан придумал следующую конструкцию. Один конец каната длиной $2\ell = 24$ *м* привязал к санкам и перекинул канат через блок, который закреплен на высоте $h = 4$ *м* над землей. Затем Степан уселся на санки и начал тянуть свободный конец каната, прикладывая постоянную силу $F = 378$ *Н*.

С какой скоростью будут двигаться санки, когда окажутся непосредственно под блоком?

Масса мальчика с санками равна $m = 70$ *кг*. Трением полозьев о снег можно пренебречь.

Задача 4



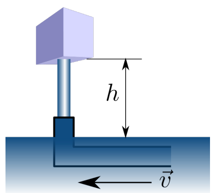
Шары A и B равных объемов помещены в два контейнера с одной и той же жидкостью, как показано на рисунке. Силы натяжения канатов при этом равны: $T_1 = T_2 = 10$ *Н*.

Далее контейнеры с шарами разместили в лифте, который начал двигаться вниз с ускорением $a = 2$ *м/с*^{2}.

Какими будут силы натяжения канатов в этой ситуации?

Ускорение свободного падения в этой и последующих задачах считать равным $g = 10$ *м/с*^{2}.

Задача 5



В реку, скорость течения которой равна $v = 4$ *м/с*, погружена изогнутая труба с площадью поперечного сечения $S = 100$ *см*^{2}. Вода, выходящая из трубы, направляется в куб «левитирующий» на высоте $h = 35$ *см* над поверхностью воды, ударяется о нижнюю плоскость куба и равномерно разбрызгивается в стороны.

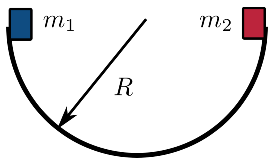
Какова масса этого куба? (плотность воды - $\rho = 1000$ *кг/м*^{3})

Задача 6

К межпланетной космической станции пристыковался транспортный грузовой корабль. Относительная влажность в отсеках космической станции равна $\varphi_1 = 62\%$, а в грузовом корабле - $\varphi_2 = 91\%$. Общий объем помещений космической станции равен $V_1 = 74$ *м*3, а у грузового корабля - $V_2 = 46$ *м*3.

Какая установится относительная влажность на станции после открытия люков шлюзового отсека? Температуру воздуха в космических аппаратах считать одинаковой.

Задача 7



Участок трассы на аттракционе «Американские горки» представляет собой дугу полуокружности радиуса R, расположенную в вертикальной плоскости.

По недосмотру обслуживающего персонала одновременно с двух противоположных концов этого участка навстречу друг другу были запущены две тележки, между которыми произошло абсолютно неупругое столкновение.

Каково соотношение масс тележек $\frac{m_1}{m_2}$, если после столкновения они, сцепившись, смогли подняться по трассе на высоту $h = R/n$, $(n > 1)$?
Силой трения при движении тележек по треку можно пренебречь.

Варианты ответов:

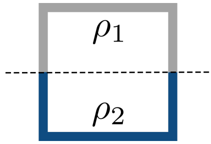
(A) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n^2+1}{n^2-1}$	(B) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}$	(C) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n+1}{n-1}$	(D) $\frac{m_1}{m_2} = n$	(E) $\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2$

Задача 8

Два спутника летают по круговым орбитам, лежащим в одной общей плоскости, вокруг планеты «KMP866247» с орбитальными скоростями $v_1 = 6{,}7$ *км/с* и $v_2 = 5{,}9$ *км/с*, периодически сближаясь на минимальное расстояние $h = 990$ *км*. Радиус планеты равен $R = 4{,}2 \cdot 10^3$ *км*.

Найдите ускорение свободного падения на поверхности «KMP866247».

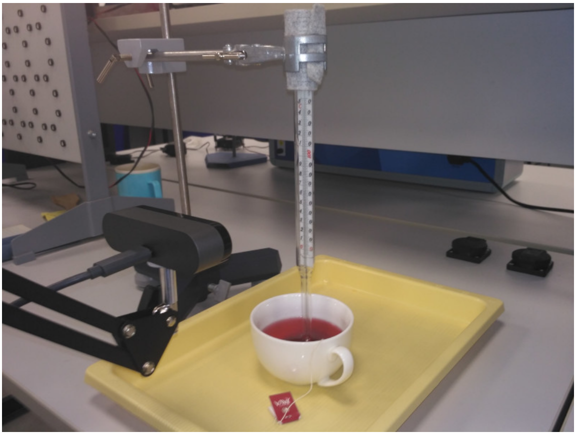
Задача 9



В рамке из квадратной тонкой стеклянной трубки со стороной $\ell = 32$ *см* находятся две не смешивающиеся жидкости с плотностями $\rho_1 = 0{,}73$ *г/см*^{3} и $\rho_2 = 2{,}37$ *г/см*^{3}. Граница, разделяющая две жидкости, проходит точно через центр рамки.

Какой будет максимальная скорость жидкости, если рамка внезапно перевернется на 180° вокруг горизонтальной оси? Силами вязкого трения можно пренебречь.

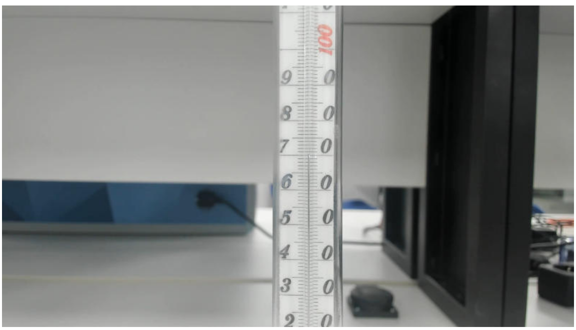
Задача 10 (Эксперимент)



Общий вид экспериментальной установки

Правильно заваривать чай (даже в пакетиках!) - большое искусство. Нужно правильно выбрать начальную температуру воды и продолжительность времени заваривания чая.

Посмотрите запись видео (https://youtu.be/hgv3jhpo54Y) и определите с максимальной точностью какую температуру будет иметь чай спустя $\tau = 425\,с$ после начала его заваривания, когда температура равнялась $t = 80\,°\mathrm{C}$.



https://youtu.be/hgv3jhpo54Y

Результат представьте в градусах Цельсия.

11 класс

Задача 1

Михаилу было поручено вычислить скорость теплоносителя (воды) в трубах, которые были подведены к теплообменнику вентиляционной системы. Он знает, что вентиляционная установка прокачивает $V = 13500$ $м^3$ воздуха за $\Delta t = 1$ *ч*. От теплообменников требуется нагревать воздух от $t_0 = 0$ °C до $t_1 = 30$ °C. Известно, что температура теплоносителя, прошедшего через теплообменник, не должна опускаться ниже $t_{out} = 60$ °C, тогда как температура подачи теплоносителя равна $t_{in} = 80$ °C.

Какова минимальная скорость воды в трубах, если их радиус равен $r = 3$ *см*? Воздух считать сухим.

Задача 2

Алессандро захотел сделать кофейный лед из небольшой чашечки эспрессо при помощи большого куска обычного льда, чья температура равна $t_л = -40$ °C. Объем кофе равен $V_к = 25$ *мл*, а его температура уже опустилась до комнатной, которая равна $t_к = 20$ °C.

Какая минимальная масса льда потребуется Алессандро? Удельная теплоемкость воды равна $c_в = 4200$ *Дж/кг·К*. Удельная теплоемкость льда равна $c_л = 2100$ *Дж/кг·К*. Удельная теплота кристаллизации воды равна $\lambda = 334$ *кДж/кг*. Плотность кофе считать равной плотности воды.

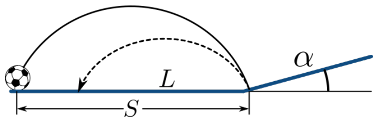
Задача 3

Саша сидит в кабине башенного подъемного крана на высоте $h = 10$ *м* от земли. Кран движется по рельсам, которые проложены вдоль оси Ox, по закону $x(t) = x_0 \cos \omega t$, где $\omega = 1$ c^{-1}. В момент времени $t = 3\pi/2$ *с* Саша бросает в горизонтальном направлении два камушка. Один камушек он бросает вдоль оси Ox со скоростью $v = 2$ *м/с*, а другой с точно такой же скоростью в перпендикулярном к движению направлении.

На каком расстоянии друг от друга приземлятся брошенные Сашей камушки?

Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ *м/с*^{2}.

Задача 4



Ефим решил пнуть футбольный мяч к подножью наклонной плоскости, которая находится на расстоянии $S = 50$ *м* от места удара. При этом мяч попадает именно на наклонную плоскость и отлетает от нее под прямым углом. Наклонная плоскость составляет угол α с горизонтом. После соударения с наклонной плоскостью мяч отлетает назад на расстояние $L = 40$ *м*.

Какую долю энергии $\frac{E-E'}{E}$ потерял мяч при соударении с наклонной плоскостью? (E - энергия мяча непосредственно перед соударением, E' - энергия сразу после удара).

Задача 5

Сноубордист Николай решил прокатиться по «пухляку» (рыхлый снег), однако конец такого спуска заканчивается выездом на длинный плоский участок одной из стационарных трасс. Заезд он делает на прямых ногах без какого-либо торможения.

Как высоко ему надо забраться от уровня расположения плоского участка, чтобы его проехать полностью?

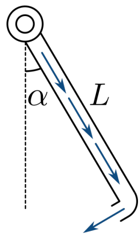
Угол наклона спуска относительно горизонта равен $\pi/6$. Длина плоского участка равна $L = 200$ *м*. Коэффициент трения на трассе равен $\mu = 0.1$, коэффициент трения между доской и рыхлым снегом в три раза больше. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 6

Егор поспорил с Макаром, что при помощи ружья с резиновыми пулями сможет заставить свободно падающий объект спускаться с «практически» постоянной скоростью. Для этого с большой высоты было сброшено тело массой $M = 11$ *кг*. Егор знал, что ему надо стрелять в падающее тело вертикально вверх каждые $\tau = 0{,}8$ *с*, чтобы заставить его двигаться вниз со скоростью v. Под «практически» необходимо понимать, что изменением скорости тела за промежуток времени между попаданиями шариков по сравнению с самой величиной его скорости можно пренебречь. Масса каждой резиновой пули равна $m = 30$ *г*. Скорость вылета пули равна $V = 1160$ *м/с*. Считать, что пули отражаются абсолютно упруго и вертикально вниз от падающего тела. Чему будет равна скорость v?

Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ *м/с*^{2}.

Задача 7



Коля наблюдал за тем, как ведет себя поилка для скота. Она представляет из себя металлическую трубку с радиусом поперечного сечения $R = 2$ *см*, длиной $L = 0{,}8$ *м* и массой $M = 3$ *кг*, один из концов которой закрепили так, что трубка может свободно вращаться в вертикальной плоскости. К этому же концу подсоединили шланг, по которому пустили воду. Другой же конец трубки загнут на $90°$.

Папа Николая поинтересовался у сына, с какой скоростью должна выходить из трубки вода, чтобы трубка отклонилась от вертикали на угол $\alpha = \pi/6$.

Массой воды нельзя пренебречь по сравнению с массой трубки. Ускорение свободного падения равно $g = 10$ *м/с*^{2}.

Задача 8

Антуан решил спроектировать чайник, который будет нагреваться при помощи плиты (газовой или электрической). При расчетах он закладывает, что мощность конфорки плиты равна $N = 1{,}0$ *кВт* а КПД чайника $\eta = 0{,}7$. Исходя из этих данных, Антуан хочет, чтобы при достижении температуры кипения, чайник начинал бы издавать свист. Известно, что свист будет слышно, если скорость пара будет равна $v = 4$ *м/с*.

Какой должна быть максимальная площадь отверстий в специальном колпачке-свистке для носика чайника, чтобы был слышен свист? Удельная теплота парообразования воды при температуре ее кипения $\lambda = 539$ *кал/г*.

Задача 9

Андрий решил построить детский бассейн. Для этого ему было необходимо подвести центральное отопление к своему комплексу, чтобы зимой в помещениях было тепло. Центральное отопление должно компенсировать дефицит энергии от собственной котельной. Строители сообщили Андрию, что на каждые $\Delta S = 9$ *м*^{2} комплекса в самое холодное время года потери составляют $\Delta N = 1{,}7$ *кВт*. Вода центрального теплоснабжения заходит в комплекс с температурой $t_{in} = 83\ ^\circ$C, а выходит из него с температурой $t_{out} = 40\ ^\circ$C. Помимо этого, известно, что радиус труб отопления равен $r = 3$ *см*, а скорость потока $v = 0{,}3$ *м/с*.

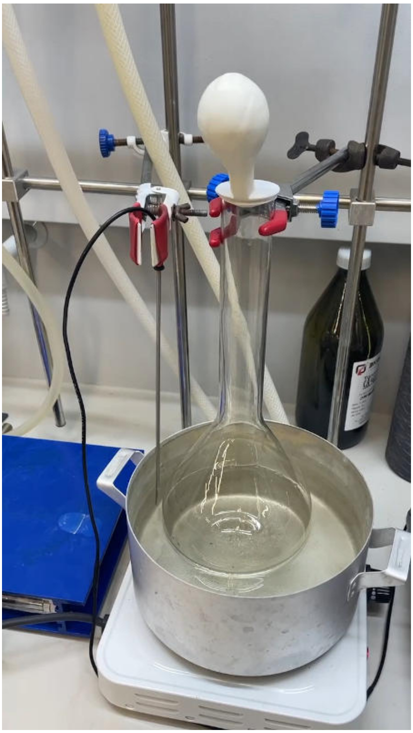
Какую площадь Андрию удастся отопить в самое холодное время года?

Удельная теплоемкость воды равна $C_{H_2O} = 4200$ *Дж/кг·К*.

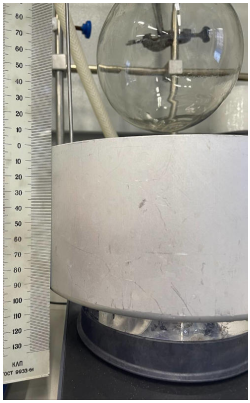
Задача 10 (Эксперимент)

Оцените мощность электроплитки. Ответ приведите в ваттах с точностью до целой части.

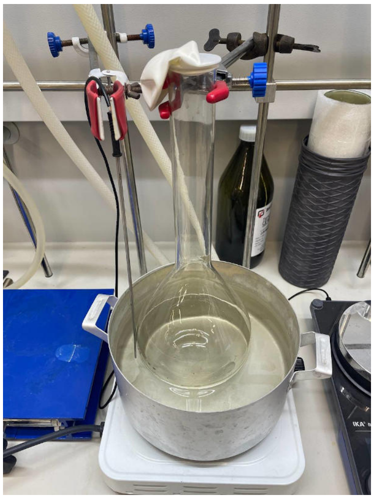
При расчетах необходимо пренебречь любым теплообменом, кроме теплообмена между плиткой и водой. Теплоемкостями кастрюли, колбы и воздуха в колбе пренебречь. Подчеркнем, что в процессе съемки режим, когда необходимо при расчете давления учитывать жесткость шарика, не достигается. Нагрев считать равномерным.



https://youtu.be/cRBEmcASwPI


Эффективность передачи тепла воде в системе плитка-кастрюля считать равным 75%. Объем стеклянной колбы равен $V_{bulb} = 1{,}2$ *литра*, а объем шарика в надутом, но не растянутом состоянии равен $V_{ball} = 125$ *миллилитров*. Всю остальную информацию можно найти в видео (https://youtu.be/cRBEmcASwPI), либо на фотографиях.

Второй тур отборочного этапа

7 класс

Задача 1

Сотрудникам нанолаборатории для проведения важного эксперимента необходимо сделать квадратную рамку и подвесить ее к потолку так, чтобы боковые ребра были перпендикулярны земле, а верхнее и нижнее ребра — параллельны. Сотрудники нашли 4 геометрически одинаковых стержня. Но один из стержней оказался из другого материала в отличие от остальных. В результате рамка была подвешена так, что точка подвеса делит верхний стержень в отношении 1 к 3.

Определите отношение массы отличающегося стержня к массе любого из остальных стержней.

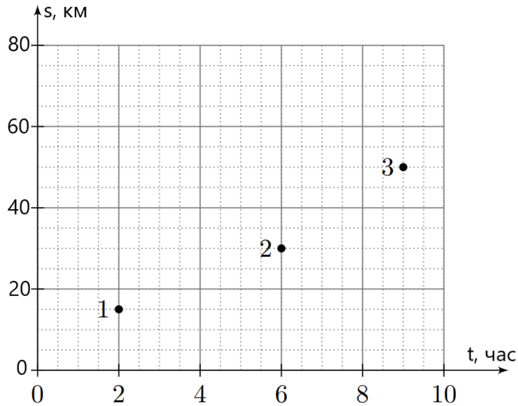
Задача 2

Сотрудник нанолаборатории ехал на работу на электричке с постоянной скоростью. На пути электрички оказался мост длиной L. Затем электричку, в которой ехал сотрудник, догнал товарный поезд, который ехал со скоростью в шесть раз больше скорости электрички. Поезд в 8 раз длиннее моста. Поезд обогнал электричку за то же время, за которое электричка проехала мост (с учетом длины электрички).

Найдите длину электрички в единицах длины моста.

Задача 3

В секретной нанолаборатории города Среднеболтанска был изобретен робот Суперстеп, который мог двигаться с тремя различными скоростями v_1, v_2, v_3 и только в каком-то одном направлении. К сожалению, этот робот сбежал. Как установили по камерам наблюдения, побег произошел в 00 часов 00 минут. Полиция смогла установить всего три места нахождения робота и те моменты времени, когда робот был там (при этом движение робота было со скоростями v_1, v_2, v_3 соответственно). Сотрудники лаборатории отметили эти точки на графике.



Они знали особенности робота. Суперстеп определенно двигался одну часть пути со скоростью v_1, другую часть пути со скоростью v_2 и третью часть пути со скоростью v_3. При этом скорость v_3 в два раза больше скорости v_1. Про скорость v_2 мало знают даже сотрудники лаборатории.

Чему равна скорость v_1, с которой робот двигался на первом участке?

Задача 4

На каком расстоянии от лаборатории сотрудники могут найти робота через 10 часов после побега?

Задача 5

Каким может быть максимальное значение скорости v_2?

Ответ дайте в *км/ч* точностью до сотых долей.

Задача 6

Какое минимальное время Суперстеп мог двигаться со скоростью v_2?

Ответ дайте в минутах с точностью до целой части.

Задача 7

За одним очень ценным сотрудником нанолаборатории, в котором изобрели робота Суперстепа, всегда отправляли машину, которая забирала его с остановки в $07:00$. Однажды сотрудника вечером посетила гениальная идея, в результате он не смог уснуть и пошел на работу раньше. На остановке он оказался в $06:25$ и решил идти навстречу машине (скорость сотрудника $5\,км/ч$). В итоге он оказался на работе на $20\,мин$ раньше обычного.

Определите скорость служебной машины (машина движется с постоянной скоростью, время на посадку сотрудника не учитывать).

Задача 8

Сотруднику нанолаборатории нужно перенести из одного кабинета в другой сверхсекретную жидкость плотностью $\rho_1 = 900\,кг/м^3$ и кусок неизвестного металла, массой $m_2 = 560\,кг$. Для этого он взял уникальное сверхпрочное ведро массой $3\,кг$ и объемом $0{,}1\,м^3$. Сотрудник поместил в это ведро кусок металла и потом доверху залил сверхсекретной жидкостью. Масса полностью заполненного ведра составила $590\,кг$.

Определите плотность неизвестного металла. Ответ дайте в $кг/м^3$ с точностью до целой части.

Задача 9

В нанолабораторию доставили коробку, похожую на коробку с сахаром-рафинадом. На коробке написано «Кубики из очень опасного металла $m_1 = 13{,}44\,г$. Количество:1344 шт. Размеры коробки $140 \times \dots \times \dots\,мм$» (два размера коробки стерлись).

Сотрудники лаборатории сообразили, что это длина наибольшего ребра коробки. Сквозь небольшую трещину в коробке сотрудники смогли разглядеть, что вдоль самой короткой стороны умещается 8 кубиков.

Помогите сотрудникам определить плотность опасного металла. Ответ дайте в $кг/м^3$ с точностью до целой части.

Задача 10

Сотрудники нанолаборатории провели два опыта, которые представлена в данном видеофрагменте https://youtu.be/JTFRMWO3muw. При этом они знают, что пройденный путь зависит от времени следующим образом:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

где v_0 — начальная скорость тележки при пересечении передним краем фотоэлектрического датчика, a — ускорение тележки. Зависимость скорости от времени

$$v = v_0 + at.$$

Время Δt, показываемое прибором, это продолжительность перекрытия датчика флажком тележки.

https://youtu.be/JTFRMWO3muw

Определите ускорение тележки, считая его постоянным.

8 класс

Задача 1

Любопытный буратин Каляндрий поднял кирпич массой 1 *кг* на веревке на высоту 1 *м*. Для этого он приложил к веревке силу 13 *Н*. Какую работу при этом совершила сила тяжести?

Варианты ответов:

(A) 13 *Дж*	(B) 23 *Дж*	(C) 10 *Дж*	(D) 3 *Дж*	(E) −10 *Дж*

Задача 2

Отдыхая на пляже буратин Каляндрий построил из песка замок массой 10 *кг*. Его друг буратин Васяндрий построил в ответ точную копию замка Каляндрия, увеличив высоту замка Каляндрия в 4 раза.

Какова масса замка Васяндрия ?

Варианты ответов:

(A) 40 *кг*	(B) 160 *кг*	(C) 640 *кг*	(D) 100 *кг*	(E) 80 *кг*

Задача 3

Буратин Каляндрий пошел в гости в буратину Васяндрию. Между домами Каляндрия и Васяндрия 15 *км*. Каляндрий потратил на этот путь 4 *часа*. Средняя скорость движения Каляндрия 4 *км/ч*.

Сколько времени провел Каляндрий в кафе по дороге к Васяндрию ?

Варианты ответов:

(A) 12 *мин*	(B) 15 *мин*	(C) 25 *мин*	(D) 10 *мин*	(E) 30 *мин*

Задача 4

Буратины Каляндрий и Васяндрий играли в кубики. У Каляндрия были кубики из материала A, а у Васяндрия — из материала B. Каляндрий поставил свой кубик на пол. Васяндрий положил такой же по размерам свой кубик на кубик Каляндрия. Затем Каляндрий взял кубик со стороной в 2 раза большей, чем в первом случае. Васяндрий взял кубик, сторона которого в 3 раза больше и поставил его на новый кубик Каляндрия. При этом выяснилось, что давление на пол во втором случае было в 4 раза больше.

Найдите отношение плотностей $\frac{\rho_A}{\rho_B}$.

Задача 5

У Буратина Каляндрия есть линейка длиной ℓ. Он решил определить ее массу. Он положил на расстоянии $\frac{\ell}{8}$ от одного из краев линейки груз массой $100\,г$. Конец линейки, на котором находился груз он начал выдвигать за край стола. Линейка падает, когда оказывается выдвинута на четверть своей длины.

Какова масса линейки?

Задача 6

Буратины Каляндрий и Васяндрий решили принять участие в гонках на тазах на воде. Чтобы потренироваться они взяли практически невесомый цилиндрический таз с площадью основания $S = 2\,м^2$ и залезли в него в бассейне. Но тут начался дождь и Васяндрий решил не участвовать в тренировках. После выхода Васяндрия из таза высота выступающей части таза над водой стала в 2 раза больше.

Через сколько минут Каляндрий вместе с тазом уйдет под воду, если вода поднимается в тазе со скорости $20\,мм/мин$? Массы Каляндрия и Васяндрия равны $100\,кг$ у каждого.

Задача 7

Буратин Каляндрий решил попить чай. Для этого он вскипятил 1 *литр* воды с начальной температурой 20 °C в чайнике. Буратин заметил, что на это потребовалось 2 *минуты*. Экспериментатор взял над буратином верх, и Каляндрий измерил время, за которое вода после отключения чайника остыла на 10 °C. На это потребовалось 5 *минут*.

Определите мощность чайника в *ваттах*, считая, что чайник перестал передавать тепло воде сразу после отключения.

Задача 8

Каляндрий и Васяндрий вечерами любят прогуливаться. Они идут до дома друг друга и возвращаются обратно. Они выходят одновременно и встречаются на расстоянии $\ell_1 = 7$ *км* от дома Каляндрия. Вторая встреча произошла на расстоянии $\ell_2 = 3$ *км* от дома Васяндрия.

Определите в *км* расстояние их между домами, если буратины шли с постоянными скоростями и время на разворот не тратили.

Задача 9

Буратин Каляндрий обнаружил на дне своего бассейна глубиной $h = 2$ *м* цилиндр из материала с плотностью $\rho = 2000$ *кг/м*^{3}. Площадь основания цилиндра $S = 5$ *см*^{2}. Высота цилиндра $\ell = 10$ *см*. Цилиндр стоит вертикально.

Найдите минимальную работу, которую должен совершить Каляндрий, чтобы полностью вытащить цилиндр из воды.

Задача 10

Буратины Каляндрий и Васяндрий провели два опыта, видеозапись которых представлена в данном клипе https://youtu.be/JTFRMWO3muw. При этом они знают, что пройденный путь зависит от времени следующим образом:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

где v_0 — начальная скорость тележки при пересечении передним краем фотоэлектрического датчика, a — ускорение тележки. Зависимость скорости от времени

$$v = v_0 + at.$$

Время Δt, показываемое прибором, это продолжительность перекрытия датчика флажком тележки.

https://youtu.be/JTFRMWO3muw

Определите ускорение тележки, считая его постоянным.

9-10 класс

Задача 1

Прогуливаясь во Французских Альпах, туристы Жан и Жак по только им ведомой причине зашли вместе в узкий железнодорожный тоннель. Они уже успели пройти $\eta = \frac{4}{9}$ его полной длины, как заметили приближающийся ко входу в тоннель скоростной поезд «TGV». В панике Жан побежал к выходу из тоннеля, а Жак, наоборот, ко входу. Максимальная скорость с которой могут бегать нагруженные рюкзаками туристы равна $v = 12$ *км/ч*.

С какой скоростью ехал поезд, если Жану и Жаку удалось выскочить из тоннеля буквально за мгновение до встречи с ним?

Задача 2

Малоизвестный факт: помимо создания основополагающих трудов в области физики и математики Исаак Ньютон также очень серьезно занимался алхимией.

В одной из найденных недавно рукописей Ньютона содержится описание некоторого алхимического эксперимента:
«…*полученное вещество было разделено на две неравные части. Часть объемом* $V_1 = \ldots$ *пинты была подвешена к левой части коромысла рычажных весов, а часть объемом* $V_2 = \ldots$ *пинты - к правой части. При этом весы находились в равновесии. При погружении левого тела в дистиллированную воду, а правого тела в спирт равновесие устанавливается путем перемещения левого тела на трехкратное расстояние от опоры, а правого тела — на двукратное расстояние от опоры по сравнению с исходными …*»

К сожалению, пропуски в рукописи восстановить не удалось. Но какой же была плотность вещества, синтезированного Ньютоном?

Плотность дистиллированной воды $\rho_{H_2O} = 1000$ *кг/м*^{3}

Плотность спирта $\rho_{C_2H_5OH} = 900$ *кг/м*^{3}

Задача 3

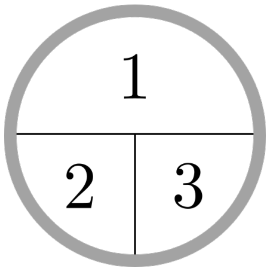
В одном из своих походов туристы Жан и Жак оказались на тропическом острове. Жак решил сплавать на бамбуковом плоту за коралловый риф, окружавший остров, для занятий подводным плаванием, а Жан остался на берегу готовить ужин.

Уже отплыв на расстояние $S = 12\,\textit{м}$ от берега Жак внезапно вспомнил, что оставил мешок массой $m = 35$ *кг* со всем снаряжением для дайвинга на берегу. Возвращаться Жаку было лень. Он остановил плот и попросил Жана перекинуть ему мешок на плот. Тщательно прицелившись, Жан максимально быстро перекинул мешок на плот, придав ему скорость $v = 15\,\textit{м}/\textit{с}$.

Какую скорость приобрел плот с Жаком (их суммарная масса равна $M = 80$ кг) после того, как он поймал мешок со снаряжением?

Ускорение свободного падения в этой и последующих задачах считать равным $g = 10\,\textit{м}/\textit{с}^2$.

Задача 4



Собираясь в очередной поход, Жан и Жак столкнулись с некоторой проблемой. Жак утром пьет кофе, вечером - апельсиновый сок, а Жан и утром и вечером предпочитает пить чай, но термос у них на двоих всего один. Туристам пришла в голову идея - разделить внутреннее пространство термоса на три части для различных напитков герметичными вертикальными перегородками, так что поперечное сечение термоса стало выглядеть, примерно так, как показано на рисунке.

В часть 1 был налит чай с температурой $t_1 = 80\,°\mathrm{C}$, в часть 2 - кофе с температурой $t_2 = 40\,°\mathrm{C}$, часть 3 наполнили соком с комнатной температурой $t_3 = 20\,°\mathrm{C}$. Все жидкости заполняют термос "до краев".

Но перегородки оказались хоть и герметичными, но идеально проводящими тепло и температура напитков стала меняться. В частности, чай остыл на $\Delta t_1 = 4\,°\mathrm{C}$.

На сколько градусов изменилась к этому же времени температура кофе Δt_2 и сока Δt_3?

(Считать, что поток тепла через перегородку пропорционален ее площади и разности температур по обе стороны от нее. Потерями тепла в окружающее пространство можно пренебречь. Теплоемкости и плотности напитков одинаковы.)

Варианты ответов:

(A)	$\Delta t_2 = 4.5\ °C$ и $\Delta t_3 = 5.2\ °C$
(B)	$\Delta t_2 = 3.0\ °C$ и $\Delta t_3 = 2.5\ °C$
(C)	$\Delta t_2 = 4.0\ °C$ и $\Delta t_3 = 1.7\ °C$
(D)	$\Delta t_2 = 1.5\ °C$ и $\Delta t_3 = 5.5\ °C$
(E)	$\Delta t_2 = 1.6\ °C$ и $\Delta t_3 = 6.4\ °C$

Задача 5

Космическая станция состоит из двух спутников массы m, соединенных тросом длиной ℓ и вращается вокруг планеты массы M и радиуса R на низкой круговой орбите радиусом $r \approx R \gg \ell$. Трос, соединяющий спутники, располагается в плоскости орбиты и всегда ориентирован строго на центр планеты.

Какова сила натяжения этого троса? (γ - универсальная гравитационная постоянная)

Варианты ответов:

(A) $\gamma\dfrac{3mM\ell}{2R^3}$	(B) $\gamma\dfrac{mM\ell}{2R^3}$	(C) $\gamma\dfrac{3mM\ell}{R^3}$	(D) $\gamma\dfrac{2mM\ell}{3R^3}$	(E) $\gamma\dfrac{mM\ell}{3R^3}$

Задача 6

В палатке, в которой ночевали Жак и Жак температура воздуха опустилась до $t = 11\,°C$. Приятели решили соорудить обогреватель из подручных материалов. В рюкзаке нашлись: портативный аккумулятор (с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением) и карандаш. Освободив грифель карандаша от деревянной оболочки, туристы подключили его торцы к клеммам аккумулятора. При этом температура боковой поверхности грифеля стала равна $t_1 = 32\,^{\circ}\mathrm{C}$, но температура воздуха в палатке существенно не изменилась.

Для увеличения производительности обогревателя Жан и Жак разломили грифель на две равные части, расположили их параллельно и снова подключили их торцы к аккумулятору.

Какой в этом случае будет температура боковой поверхности частей грифеля?

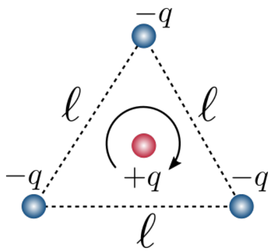
Задача 7

Инженер компании «Fēilóng» («Летящий дракон») Си Лу Хань проектирует новую модель беспилотного летающего аппарата. При силе тока в тяговых электродвигателях постоянного тока $I_1 = 2\ A$ беспилотник поднимает вертикально вверх груз массой в 1 цзинь со скоростью $v_1 = 20\ см/с$. При увеличении силы тока до $I_2 = 4\ A$ скорость подъема при той же нагрузке достигает $v_2 = 40\ см/с$.

Какой будет скорость подъема, если сила тока будет равна $I_3 = 10\ A$?

Коэффициент полезного действия воздушных винтов летательного аппарата считать не зависящим от скорости их вращения.

Задача 8



В вершинах правильного равностороннего треугольника со стороной ℓ расположены точечные отрицательные заряды $-q$, а в центре - такой же по модулю положительный заряд $+q$. Масса каждого заряда равна m.

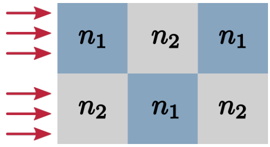
С какой угловой скоростью ω должны вращаться отрицательные заряды вокруг положительного чтобы расстояние между ними оставалось неизменным?

($k = 1/4\pi\varepsilon_0$, где ε_0 - электрическая постоянная)

Варианты ответов:

(A) $\sqrt{\frac{3kq^2}{m\ell^3}(\sqrt{3}-1)}$	(B) $\sqrt{\frac{4kq^2}{m\ell^3}(\sqrt{2}-1)}$	(C) $\sqrt{\frac{4kq^2}{m\ell^3}(\sqrt{2}+1)}$	(D) $\sqrt{\frac{3kq^2}{m\ell^3}(\sqrt{3}+1)}$	(E) $\sqrt{\frac{3kq^2}{m\ell^3}(\sqrt{5}+1)}$

Задача 9



Некоторый элемент оптической схемы состоит из шести кубиков, изготовленных из стекол с различным показателем преломления: n_1 и n_2 и расположенных в шахматном порядке, так как показано на рисунке.

Световой поток падает на левую грань данного элемента по нормали к поверхности. Известно что, отношение времен прохождения света сквозь верхнюю и нижнюю половину элемента равно $t_{up}/t_{down} = 13/14$.

Найдите отношение показателей преломления материала кубиков n_2/n_1.

Задача 10 (Эксперимент)

В видеоклипах показан процесс крутильных колебаний тонкого металлического стержня длиной 2ℓ, прикрепленного к спиральной пружине.

https://youtu.be/9St45bKFyPA

https://youtu.be/CQ6FJBgV2OM

https://youtu.be/88KBUoE2zmA

В первом клипе дополнительные грузы на стержне отсутствовали. В втором клипе два груза были размещены на стержне симметрично на расстоянии $\ell/2$ от оси вращения. В третьем клипе грузы были перенесены на концы стержня.

Определите максимально точно период колебаний данной системы, если грузы расположить на расстоянии $\ell/\sqrt{2}$ от оси вращения. Ответ представьте в секундах.

11 класс

Задача 1

Коля при помощи лестницы залез на большую крышу, чья форма напоминает сферу. Коля захотел скатиться с крыши и определить скорость, при которой он оторвется от нее. Для этого у него с собой была веревка, один из концов которой он сбросил вниз, а другой привязал к вершине крыши. Веревкой он воспользовался следующим образом: свое скатывание он начал с вершины крыши вдоль сброшенной вниз веревки, и в тот момент, когда оторвался от поверхности, он быстро сделал отметку на самой веревке. Длины веревки не хватает даже на четверть максимального сечения сферы, однако хватает, чтобы Коля сделал на ней риску в нужный момент.

Чему же равна скорость Николая в момент отрыва, если длина веревки от риски до вершины крыши равна $L = 6$ *м*?

Трением между крышей и штанами Коли пренебречь. Ускорение свободного падения в этой и последующих задачах считать равным $g = 10$ *м/с*^{2}.

Задача 2

Дмитрий купил себе дом на колесах. Масса домика равна $m = 5000$ *кг*. Дмитрий задался вопросом: а с какой максимальной скоростью он сможет ехать в небольшую горку, если угол ее наклона равен $\alpha = 12°$. Его автомобиль обладает мощностью $N = 45$ *кВт*.

Чему будет равна максимальная скорость автомобиля с домиком?

Известно, что коэффициент трения качения между колесами его автомобиля и дорогой равен $\mu = 0.009$. Любым другим трением в системе пренебречь.

Задача 3

Никита полез на высокую стенку. С собой он взял упругую веревку, длина которой $L = 6$ *м*. Долезши до высоты $H = 12$ *м*, он решил привязать один из концов веревки за выступ, а другой к своему телу. После чего залез еще выше на высоту $H + L$. На этой высоте Никита сорвался. Известно, что масса Никиты равна $m = 75$ *кг*.

Если веревка сработала практически на пределе своих возможностей, то на каком минимальном расстоянии S от земли после падения оказался Никита?

Из спецификации веревки известно, что ее максимальное натяжение равно $T_{max} = 25$ *кН*.

Задача 4

Костя решил пригласить друзей в баню. Особенность парной его бани заключается в том, что дверь открывается внутрь парилки. Костя знает, что его друзья любят, чтобы пар был очень плотным. По этой причине Костя решил сделать все щели парной общим объемом $V = 10$ *м*^{3} герметичными. Герметизировав все щели, он затопил печь. Друзья приехали. Температура воздуха дошла до 100°C. Костя зашел в парную и подлил полный черпак воды, объем которого $v = 200$ *мл*. К нему в парилку начали заходить друзья, но у них ничего не вышло, ибо для открытия двери площадью $S = 2$ *м*^{2} нужна большая сила.

Чему равна сила, которую надо приложить к ручке двери в парную?

Задача 5

Маша работает инженеркой на кафедре общей физики. Заведующий попросил ее придумать способ измерения массы легких шариков. Мария решила остановиться на способе, который использует точный прибор измерения времени, плоский конденсатор, размещенный в вакуумной камере, и очень чувствительный вольтметр, подключенный к конденсатору.

Известно, что пластины конденсатора параллельны горизонтальной плоскости. Конденсатор было решено зарядить до напряжения $U = 15$ *кВ*. Расстояние между пластинами $d = 1.5$ *см*, а площадь каждой пластины $S = 450$ *см*^{2}. Мария берет маленький изначально электронейтральный шарик и помещает его непосредственно у нижней пластины. Через какое-то время шарик отрывается, а Мария запускает отсчет времени. В тот момент, когда шарик достиг верхней пластины, Мария записывает время полета шарика $\Delta t = 60$ *мс* и изменение показаний вольтметра $\Delta U = -120$ *В*.

Чему равна масса шарика?

Задача 6

События происходят в далеком будущем.

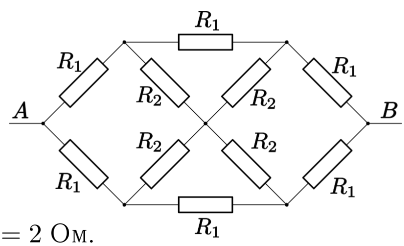
Леша изготовил (при этом ему удалось выжить!) три шарика радиусом $r = 0.65$ *см* из вещества нейтронной звезды плотностью $\rho = 10^{15}$ *г/см*^{3}. Оказывается, что они нужны ему для построения гравитационных часов.

Алексей поступил следующим образом: два шарика он надежно закрепил на расстоянии $L = 18$ *м* друг от друга, а третий установил строго между ними. Третий шарик может совершать движение только в направлении перпендикулярном к оси, соединяющей первые два шарика. После сборки системы, Леша очень слабо вывел средний шарик из положения равновесия.

Чему будет равен период колебаний такой системы?

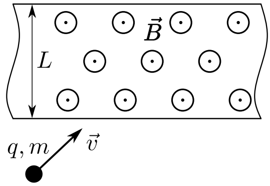
Эффектами общей теории относительности можно пренебречь.

Задача 7



Чему будет равен полный ток, текущий из точки A в точку B, если к ним приложить разность потенциалов $U = 15$ В? Сопротивления резисторов равны $R_1 = 1$ Ом и $R_2 = 2$ Ом.

Задача 8



Никита нашел кусок магнита в виде узкой, но очень длинной (можно считать, что бесконечной) полосы и решил из нее сделать зеркало для заряженных частиц. Толщина слоя (см. рис.), в котором существует создаваемое магнитной полосой однородное поле, равна $L = 30$ *см*.

Никите необходимо понять, какие ограничения он должен наложить на летящие в плоскости XY частицы (под разными углами) с зарядом $q = e$, чтобы они всегда отражались от созданной магнитом воображаемой стенки.

В частности, чему должна быть равна максимальная скорость частиц?

Величина магнитного поля равна $B = 2{,}5$ *Тл*. Масса частиц равна $m = 2{,}7 \cdot 10^{-27}$ *кг*.

Задача 9

Вдоль главной оптической оси тонкой собирающей линзы ползет божья коровка Маня. Когда Маня находится на расстоянии $d = 80$ *см* $(F < d < 2F)$ от линзы ее скорость в $n = 3{,}5$ раз меньше скорости ее изображения.

Найдите оптическую силу этой линзы. Ответ представьте в *диоптриях* с точностью до десятых долей.

Задача 10 (Эксперимент)

В видеоклипе (https://youtu.be/wdtzLHqh5f0) показан процесс нагрева и последующего плавления некоторого металла. Тигель с металлом можно увидеть в левой нижней части кадра.

https://youtu.be/wdtzLHqh5f0

Определите с максимально возможной точностью с какой скоростью менялась температура вещества в тигле в процессе его плавления.

Ответ представьте в °C/*час*.

Финальный этап

Теоретический тур финального этапа

7 класс

Задача 1

В XVIII веке в России использовалась температурная шкала, изобретенная французским астрономом Жозефом Николя Делилем. В этой шкале за ноль градусов Делиля (0 °D) выбрана температура кипения воды. В изначальном варианте шкалы температура таяния льда равнялась 2400 °D.

Во Франции некоторое время использовалась температурная шкала Реомюра. По этой шкале температура замерзания воды 0 °R, а температура кипения воды 110 °R.

Определите температуру 40 °R в градусах Делиля °D.

Представим выражения для температур в виде некоторой линейной зависимости $T = kx + b$. x − цена деления некоторого термометра (число делений, на которое разбивается температурный диапазон от замерзания воды/плавления льда до температуры кипения воды).

Тогда для шкалы Реомюра $R = k_1x + b_1 = k_1x$. Для шкалы Делиля $D = k_2x + b_2$. Разобъем температурный диапазон на 110 частей. Тогда с учетом, что температура кипения воды по шкале Реомюра 110 °R, получим $k_1 = \frac{R}{x} = \frac{110}{100} = 1$.

Для шкалы Делиля $b_2 = 2400$ и $k_2 = \frac{D - b_2}{x} = \frac{0 - 2400}{110} = -\frac{240}{11}$. Для температуры 40 °R $x_{40} = \frac{40}{1} = 40$. Тогда температура в Делилях $D_{40} = b_2 + k_2x_{40} = 2400 - \frac{240}{11} \cdot 40 \approx 1527\,(°D)$

Ответ: 1527

Задача 2

Гепард может пробежать со своей максимальной скоростью V расстояние $2s$. Считаем, что гепард сразу бежит с максимальной скоростью и останавливается, пробегая расстояние $2s$. Антилопа может пробегать со своей максимальной скоростью v расстояние во много раз превышающее $2s$.

Гепард увидел антилопу, которая находилась на расстоянии s от него. Антилопа тоже увидела гепарда. Началась погоня. Антилопе не хватило 6 секунд, чтобы спастись.

В другой раз гепард заметил натренированную антилопу, находящуюся на расстоянии s от него, которая может бежать со скоростью $1.5v$. Натренированная антилопа тоже увидела гепарда. Началась погоня. Гепарду не хватило 6 секунд, чтобы догнать натренированную антилопу.

На сколько гепарду необходимо увеличить свою выносливость (увеличить длину пробега в единицах s с максимальной скоростью), чтобы догнать натренированную антилопу?

Обозначим время нехватки Δt. Рассмотрим все три случая отдельно. В первой ситуации

$$\begin{cases} Vt_1 = 2s \\ v\left(t_1 + \Delta t\right) = s \end{cases}$$

или

$$vt_1 = s - v\Delta t$$

Тогда

$$\frac{v}{V} = \frac{s - v\Delta t}{2s}$$

Вторая ситуация

$$\begin{cases} Vt_2 = 2s \\ 1.5vt_2 = s + 1.5v\Delta t \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1.5v}{V} = \frac{s + 1.5v\Delta t}{2s}$$

Третья ситуация

$$\begin{cases} Vt_3 = 2s + x \\ 1.5vt_3 = s + x \end{cases}$$

$$\frac{1.5v}{V} = \frac{s+x}{2s+x} = \frac{1+x/s}{2+x/s}$$

Из первых двух ситуаций

$$\begin{cases} 1.5\dfrac{s - v\Delta t}{2s} = \dfrac{s + 1.5v\Delta t}{2s} \\ 1.5s - 1.5v\Delta t = s + 1.5v\Delta t \\ v = \dfrac{0.5s}{3\Delta t} \end{cases}$$

Из второй и третей ситуаций

$$\begin{cases} \dfrac{s + 1.5v\Delta t}{2s} = \dfrac{1+x/s}{2+x/s} \\ \dfrac{s + 1.5\frac{0.5s}{3\Delta t}\Delta t}{2s} = \dfrac{1+x/s}{2+x/s} \\ \dfrac{s + 0.25s}{2s} = 0.625 = \dfrac{1+x/s}{2+x/s} \end{cases}$$

Выразим x/s

$$\begin{cases} 0.625\left(2 + \frac{x}{s}\right) = 1 + \frac{x}{s} \\ 0.375\frac{x}{s} = 0.25 \\ \frac{x}{s} = \frac{0.25}{0.375} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Ответ: $\Delta s = \frac{2}{3}s$

Задача 3

Горный турист поднимался в гору со скоростью на Δv меньшей его средней скорости, а спускался с горы со скоростью на Δv большей его средней скорости.

Определите Δv, если средняя скорость туриста v, а путь с горы в k раз больше, чем путь в гору. Принять при расчетах $v = 5$ *км/ч*, $k = 3$.

Средняя скорость $v = \ell/t$. Обозначим путь в гору x. Тогда путь с горы kx, а весь путь

$$\ell = kx + x = (k+1)\,x.$$

Общее время пути

$$t = \frac{x}{v - \Delta v} + \frac{kx}{v + \Delta v}$$

$$t = \frac{(k+1)\,v - (k-1)\,\Delta v}{v^2 - (\Delta v)^2}x$$

Средняя скорость

$$v = \frac{\ell}{t} = \frac{(k+1)\,x}{x}\frac{v^2 - (\Delta v)^2}{(k+1)\,v - (k-1)\,\Delta v}$$

$$v = (k+1)\,\frac{v^2 - (\Delta v)^2}{(k+1)\,v - (k-1)\,\Delta v}$$

$$(k+1)\,v^2 - (k-1)\,v\Delta v = (k+1)\,v^2 - (k+1)\,(\Delta v)^2$$

$$(k-1)\,v\Delta v = (k+1)\,(\Delta v)^2$$

$$\Delta v = \frac{(k-1)}{(k+1)}v$$

$$\Delta v = \frac{(3-1)}{(3+1)} \cdot 5 = 2{,}5$$

Ответ: $\Delta v = 2{,}5$ *км/ч*

Задача 4. (3 балла)

Маленький мальчик играя, положил на игрушечный батут кубик и заметил на какой высоте от пола находится верхняя грань кубика. Затем он положил сверху еще один кубик и заметил, что верхняя грань второго кубика находится на той же высоте от пола, что и в опыте с первым кубиком.

Считая, что растяжение батута подчиняется закону Гука, определите плотность кубика, если площадь одной грани кубика 100 $см^2$, а коэффициент жесткости батута $k = 100$ $Н/м$.

Условие равновесия для одного кубика:$mg = kx$, а для двух кубиков с учетом того, высота над уровнем пола не поменялась $2mg = k(x + a)$, где a - сторона кубика.

Тогда

$$\begin{cases} 2mg = mg + mg = mg + kx = kx + ka \\ mg = \rho a^3 g = ka \end{cases}$$

$$\rho = \frac{k}{a^2 g} = \frac{k}{gS}$$

Ответ: $\rho = 1000$ $кг/м^3$

Задача 5

В сосуде с водой вертикально плавает цилиндрическое тело, погруженное в воду на k-ую часть своей высоты ℓ, $(k < 1)$. Тело испаряется так, что его высота уменьшается со скоростью $v = v_0 + \alpha t$ м/с.

Какая часть изначальной высоты ℓ тела будет погружена в воду спустя время $t_0 = \frac{2v_0}{\alpha}$? Испарением воды пренебречь.

Обозначим плотность тела ρ, плотность воды ρ_0. Площадь основания цилиндра S. Изначальное состояние равновесия: $\rho g S\ell = \rho_0 g S k\ell$.

Высота цилиндра будет уменьшаться со скоростью, которая линейно зависит от времени. Для того, чтобы понять, насколько уменьшилась высота цилиндра можно определить среднюю скорость испарения. Так как зависимость линейная, то среднее значение $\overline{v} = \dfrac{v_0 + v_0 + \alpha t}{2} = v_0 + \dfrac{\alpha t}{2}$. Тогда высота цилиндра в момент времени t_0:

$$\ell_0 = \ell - \overline{v} t_0 = v_0 t_0 + \frac{\alpha t_0^2}{2} = \ell - \frac{4v_0^2}{\alpha}.$$

Обозначим погруженную высоту от изначальной $x\ell$. Тогда условие равновесия для новой высоты цилиндра:

$$\rho g S \ell_0 = \rho g S\left(\ell - \frac{4v_0^2}{\alpha}\right) = \rho_0 g S x\ell$$

$$\rho_0 g S k\left(\ell - \frac{4v_0^2}{\alpha}\right) = \rho_0 g S x\ell$$

$$k\left(\ell - \frac{4v_0^2}{\alpha}\right) = x\ell$$

$$x = k\left(1 - \frac{4v_0^2}{\alpha\ell}\right)$$

Ответ: $k\left(1 - \dfrac{4v_0^2}{\alpha\ell}\right)$.

8 класс

Задача 1

В XVIII веке в России использовалась температурная шкала, изобретенная французским астрономом Жозефом Николя Делилем. В этой шкале за ноль градусов Делиля (0 °D) выбрана температура кипения воды. В изначальном варианте шкалы температура таяния льда равнялась 2400 °D.

Во Франции некоторое время использовалась температурная шкала Реомюра. По этой шкале температура замерзания воды 0 °R, а температура кипения воды 110 °R.

Определите температуру 40 °R в градусах Делиля °D.

Представим выражения для температур в виде некоторой линейной зависимости $T = kx + b$. x — цена деления некоторого термометра (число делений, на которое разбивается температурный диапазон от замерзания воды/плавления льда до температуры кипения воды).

Тогда для шкалы Реомюра $R = k_1x + b_1 = k_1x$. Для шкалы Делиля $D = k_2x + b_2$. Разобъем температурный диапазон на 110 частей. Тогда с учетом, что температура кипения воды по шкале Реомюра 110 °R, получим $k_1 = \dfrac{R}{x} = \dfrac{110}{110} = 1$.

Для шкалы Делиля $b_2 = 2400$ и $k_2 = \dfrac{D - b_2}{x} = \dfrac{0 - 2400}{110} = -\dfrac{240}{11}$. Для температуры 40 °R $x_{40} = \dfrac{40}{1} = 40$. Тогда температура в Делилях $D_{40} = b_2 + k_2x_{40} = 2400 - \dfrac{240}{11} \cdot 40 \approx 1527\,(\text{°D})$

Ответ: 1527

Задача 2

Гепард может пробежать со своей максимальной скоростью V расстояние $2s$. Считаем, что гепард сразу бежит с максимальной скоростью и останавливается, пробегая расстояние $2s$. Антилопа может пробегать со своей максимальной скоростью v расстояние во много раз превышающее $2s$.

Гепард увидел антилопу, которая находилась на расстоянии s от него. Антилопа тоже увидела гепарда. Началась погоня. Антилопе не хватило 6 секунд, чтобы спастись.

В другой раз гепард заметил натренированную антилопу, находящуюся на расстоянии s от него, которая может бежать со скоростью $1{,}5v$. Натренированная антилопа тоже увидела гепарда. Началась погоня. Гепарду не хватило 6 секунд, чтобы догнать натренированную антилопу.

На сколько гепарду необходимо увеличить свою выносливость (увеличить длину пробега в единицах s с максимальной скоростью), чтобы догнать натренированную антилопу?

Обозначим время нехватки Δt. Рассмотрим все три случая отдельно. В первой ситуации

$$\begin{cases} Vt_1 = 2s \\ v\left(t_1 + \Delta t\right) = s \end{cases}$$

или

$$vt_1 = s - v\Delta t$$

Тогда

$$\frac{v}{V} = \frac{s - v\Delta t}{2s}$$

Вторая ситуация

$$\begin{cases} Vt_2 = 2s \\ 1.5vt_2 = s + 1.5v\Delta t \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1.5v}{V} = \frac{s + 1.5v\Delta t}{2s}$$

Третья ситуация

$$\begin{cases} Vt_3 = 2s + x \\ 1.5vt_3 = s + x \end{cases}$$

$$\frac{1.5v}{V} = \frac{s+x}{2s+x} = \frac{1+x/s}{2+x/s}$$

Из первых двух ситуаций

$$\begin{cases} 1.5\dfrac{s - v\Delta t}{2s} = \dfrac{s + 1.5v\Delta t}{2s} \\ 1.5s - 1.5v\Delta t = s + 1.5v\Delta t \\ v = \dfrac{0.5s}{3\Delta t} \end{cases}$$

Из второй и третей ситуаций

$$\begin{cases} \dfrac{s + 1.5v\Delta t}{2s} = \dfrac{1+x/s}{2+x/s} \\ \dfrac{s + 1.5\frac{0.5s}{3\Delta t}\Delta t}{2s} = \dfrac{1+x/s}{2+x/s} \\ \dfrac{s + 0.25s}{2s} = 0.625 = \dfrac{1+x/s}{2+x/s} \end{cases}$$

Выразим x/s

$$\begin{cases} 0.625\left(2 + \frac{x}{s}\right) = 1 + \frac{x}{s} \\ 0.375\frac{x}{s} = 0.25 \\ \frac{x}{s} = \frac{0.25}{0.375} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Ответ: $\Delta s = \frac{2}{3}s$

Задача 3

У юных экспериментаторов есть два тела одинаковой массы, удельные теплоемкости которых зависят от температуры. Для первого тела $c_1 = c_0\left(1 + \alpha t\right)$, для второго тела $c_2 = c_0\left(1 - \alpha t\right)$. Тела нагрели до температур t_1 и t_2, соответственно, и привели в соприкосновение.

Какая температура t_0 тел установится в итоге?

Так как удельные теплоемкости изменяются линейно, то можно брать средние значения теплоемкостей в интервале температур:

$$\begin{cases} \overline{c_1} = \frac{c_0}{2}\left(1 + \alpha t_1 + 1 + \alpha t_0\right) = \frac{c_0}{2}\left(2 + \alpha t_1 + \alpha t_0\right) \\ \overline{c_2} = \frac{c_0}{2}\left(2 - \alpha t_2 - \alpha t_0\right) \end{cases}$$

Общая энергия системы не меняется, следовательно, по закону сохранения энергии

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = \overline{c_1} m\left(t_0 - t_1\right) + \overline{c_2} m\left(t_0 - t_2\right) = 0$$

$$\frac{c_0 m}{2}\left(2 + \alpha t_1 + \alpha t_0\right)\left(t_0 - t_1\right) + \frac{c_0 m}{2}\left(2 - \alpha t_2 - \alpha t_0\right)\left(t_0 - t_2\right) = 0$$

$$4t_0 - 2(t_1 + t_2) - \alpha\left(t_1^2 - t_2^2\right) = 0$$

Ответ: $t_0 = \dfrac{2(t_1 + t_2) + \alpha\left(t_1^2 - t_2^2\right)}{4}$

Задача 4

Кипятильник мощностью P нагревает 100 граммов воды на 1°C за 5 минут. А кипятильник мощностью $2P$ нагревает 100 граммов воды на 1°C за 4 минуты.

Определите мощность P кипятильника. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·°C).

Видно, что нет прямой пропорциональности между мощностью и увеличением температуры. Можно сделать вывод о наличии тепловых потерь. Введем мощность потерь N. Тогда для одного кипятильника закон сохранения энергии

$$Pt_1 = cm\Delta t + Nt_1$$
$$N = P - \frac{cm\Delta t}{t_1}$$

Для второго кипятильника

$$2Pt_2 = cm\Delta t + Pt_2 - \frac{cm\Delta t}{t_1}t_2$$

Тогда

$$Pt_2 = cm\Delta t - \frac{cm\Delta t}{t_1}t_2$$
$$P = cm\Delta t\left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)$$
$$P = 4200 \cdot 0.1 \cdot 1\left(\frac{1}{4 \cdot 60} - \frac{1}{5 \cdot 60}\right) = 035$$

Ответ: $P = 0{,}35$ Bm (вот такой смешной кипятильник)

Задача 5

Если к источнику тока последовательно подключить k одинаковых резисторов, то на них выделится такая же мощность P как при подключении к этому источнику одного резистора.

Какая мощность выделится на k параллельно подключенных резисторах?

Исходя из условия задачи можно сделать вывод, что где-то происходит потеря мощности, значит источник обладает собственным (внутренним) сопротивлением. Обозначим его r.

Мощность, выделяемая на резисторах

$$
\begin{aligned}
&P = I_1^2 R = I_k^2 kR \\
&\frac{\mathscr{E}^2}{(R+r)^2} R = \frac{\mathscr{E}^2}{(kR+r)^2} kR
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&k\,(R+r)^2 = (kR+r)^2 \\
&\sqrt{k}\,(R+r) = (kR+r) \\
&r = \sqrt{k}R
\end{aligned}
$$

При параллельном соединении резисторов общее сопротивление $R_0 = \frac{R}{k}$. Тогда мощность

$$
\begin{aligned}
&P_1 = I^2 \frac{R}{k} = \frac{\mathscr{E}^2}{\left(\frac{R}{k}+r\right)^2} \frac{R}{k} \\
&P_1 = \frac{\mathscr{E}^2}{\left(\frac{R}{k}+\sqrt{k}R\right)^2} \frac{R}{k} = \frac{\mathscr{E}^2}{R} \frac{k}{\left(1+k\sqrt{k}\right)^2}
\end{aligned}
$$

Вспомним

$$P = I_1^2 R = I_k^2 kR$$

$$P = \frac{\mathscr{E}^2}{(R+r)^2} R = \frac{\mathscr{E}^2}{\left(R + \sqrt{k}R\right)^2} R = \frac{\mathscr{E}^2}{R} \frac{1}{\left(1+\sqrt{k}\right)^2}$$

$$\frac{\mathscr{E}^2}{R} = \left(1+\sqrt{k}\right)^2 P.$$

Ответ: $P_1 = \dfrac{k\left(1+\sqrt{k}\right)^2}{\left(1+k\sqrt{k}\right)^2} P.$

9 класс

Задача 1. Наш паровоз вперед летит...

Ехавший со скоростью v_0 товарный поезд, когда его локомотив миновал станцию «Масленкино», начал разгон с некоторым постоянным ускорением. С какой скоростью хвостовой вагон поезда проедет мимо следующей по пути следования станции «Буренкино»?

Времена прохождения перегона «Масленкино - Буренкино» для локомотива и хвостового вагона отличаются в два раза, а расстояние между этими станциями равно длине поезда. Длина каждого вагона мала по сравнению с длиной всего состава.

Выбрав в качестве начала отсчета по времени момент, когда поезд начал двигаться с ускорением, введем обозначения для последующих характерных ситуаций данной задачи: t_1 - момент, когда локомотив миновал «Буренкино», а хвостовой вагон проехал мимо «Масленкино», t_2 - момент, когда хвостовой вагон достиг «Буренкино». Если длину поезда и расстояние между станциями обозначить как ℓ, то система кинематических уравнений для этих моментов времени будет иметь вид:

$$\begin{cases} \ell = v_0 t_1 + \frac{a t_1^2}{2} \\ 2\ell = v_0 t_2 + \frac{a t_2^2}{2}. \end{cases}$$

Первое из них относится к перемещению локомотива между станциями, а второе - к перемещению хвостового вагона до момента проезда мимо «Буренкино». Из условия задачи о соотношении между временами прохождения перегона

$$t_1 = 2(t_2 - t_1) \;\Leftrightarrow\; t_1 = 2t_2/3$$

и данной системы легко найти величину приращения скорости поезда за время t_2: $\Delta v = a t_2 = 6 v_0$.

Ответ: $v = v_0 + \Delta v = 7 v_0$.

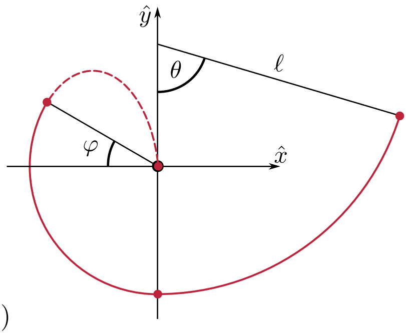
Задача 2. Гвоздь программы

Маленький шарик подвешен на нити, длина которой ℓ. В точке O на расстоянии $\ell/2$ ниже точки подвеса в стену вбит гвоздь. Шарик отводят в сторону так, что нить отклоняется от вертикали на угол θ и отпускают без начальной скорости.

Каким должен быть угол θ чтобы в процессе последующего движения шарик смог столкнуться с гвоздем?

Согласно второму закону Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$



При проекции на радиальное направление в точке, где обнуляется сила натяжения:

$$ma_{\text{ц.с.}} = mg\sin(\varphi)$$

$$\frac{mv^2}{\ell/2} = mg\sin(\varphi) \Rightarrow v^2 = \frac{g\ell\sin(\varphi)}{2}$$

Выберем нулевое значение потенциальной энергии на уровне закрепления верхнего конца нити. Согласно закону сохранения энергии:

$$-mg\ell\cos(\theta) = \frac{mv^2}{2} - mg\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell\sin(\varphi)}{2}\right)$$

Подставим в ЗСЭ значение v^2 из второго закона Ньютона:

$$\cos\theta = \frac{1-\sin\varphi}{2} - \frac{v^2}{2g\ell} = \frac{1-\frac{3}{2}\sin\varphi}{2}$$

Уравнения движения после перехода на баллистическую траекторию в проекциях на координатные оси Ox и Oy при условии попадания в гвоздь будут иметь вид:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\ell\cos\varphi}{2} + v_x t \;\Rightarrow\; t = \frac{\ell\cos\varphi}{2v\sin\varphi} \\ 0 = \frac{\ell\sin\varphi}{2} + v_y t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Подставим в уравнение движения вдоль оси Oy время полета, полученное из уравнения движения вдоль оси Ox:

$$0 = \frac{\ell\sin\varphi}{2} + v\cos\varphi\frac{\ell\cos(\varphi)}{2v\sin(\varphi)} - \frac{g\ell^2\cos^2\varphi}{8v^2\sin^2\varphi}$$

$$0 = \frac{1}{\sin(\varphi)} - \frac{g\ell\cos^2(\varphi)}{4v^2\sin^2(\varphi)}$$

$$0 = 1 - \frac{2\cos^2\varphi}{4\sin^2\varphi} \Rightarrow \mathrm{tg}^2\,\varphi = \frac{1}{2}$$

Найдем $\sin\varphi$:

$$\sin^2\varphi = \frac{\mathrm{tg}^2\,\varphi}{1+\mathrm{tg}^2\,\varphi} \;\Rightarrow\; \sin^2\varphi = \frac{1}{3}$$

Подставив значение $\sin\varphi$ в формулу для $\cos\theta$ получаем окончательный ответ задачи:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

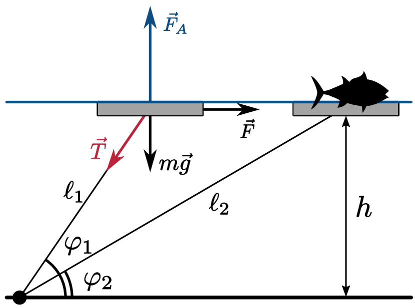
Ответ: $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \quad\Rightarrow\quad \theta \approx 86^\circ.$

Задача 3. На маленьком плоту...

Рыбак Сантьяго отправился в океан на бамбуковом плоту для ловли тунцов. Прибыв на место рыбалки, где глубина была равна h, Сантьяго закрепил плот, бросив за борт якорь на тросе длиной ℓ_1. Однако поверхностное течение было настолько сильным, что плот погрузился в воду практически полностью. После того, как был пойман первый тунец, рыбаку пришлось увеличить длину якорного троса до ℓ_2.

Какое максимальное количество рыб сможет привезти с собой на плоту Сантьяго на берег, если масса каждого пойманного им тунца примерно равна массе самого рыбака?

Запишем уравнения баланса сил, действующих на плот после прибытия на место рыбалки, в проекции на координатные оси (см.рис.):



$$\begin{cases} F_{\text{АРХ}} = T\sin\varphi_1 + mg \\ F = T\cos\varphi_1, \end{cases}$$

где $F_{\text{АРХ}}$ - сила Архимеда, F - сила напора течения воды, T - сила натяжения троса, m - масса рыбака (массой самого плота пренебрегаем, так как плот сделан из легкого бамбука и маленький, о чем есть подсказка в названии задачи).

Исключив из данной системы уравнений для плота без пойманных рыб и из аналогичной системы для плота с первой пойманной рыбой (в этом случае mg заменяется на $2mg$) величину силы натяжения якорного троса получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} F_{\text{АРХ}} = F\operatorname{tg}\varphi_1 + mg \\ F_{\text{АРХ}} = F\operatorname{tg}\varphi_2 + 2mg. \end{cases}$$

Предельное условие плавучести плота при N пойманных рыбах определяется минимальным значением угла наклона троса ($\varphi = 0$) и может записано в следующем виде: $F_{\text{АРХ}} = (N+1)mg$. Из последних трех уравнений непосредственно следует ответ задачи:

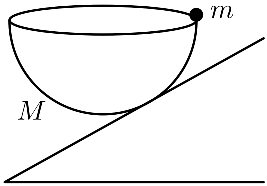
$$N = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Выразив тангенс угла наклона троса через его длину и глубину океана в месте рыбалки $\operatorname{tg}\varphi_{1,2} = \dfrac{d}{\sqrt{\ell_{1,2}^2 - d^2}}$, получаем окончательную форму записи ответа.

Ответ: $N = \operatorname{int}\left(\frac{\sqrt{\ell_2^2-h^2}}{\sqrt{\ell_2^2-h^2}-\sqrt{\ell_1^2-h^2}}\right)$, где int - оператор взятия целой части от аргумента.

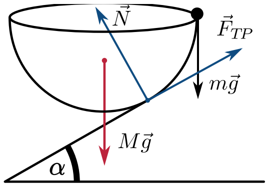
(*У самых любопытных участников Олимпиады может возникнуть вопрос, почему Сантьяго затаскивал пойманных тунцов на плот, а не оставлял «за бортом». Ответ очень простой - после неудачи с марлином он больше так не делает* ;)

Задача 4. Держи равновесие!



Полусфера массы M расположена на наклонной плоскости, как показано на рисунке. Для того чтобы верхняя граница полусферы оставалась параллельной земле, к ее краю прикреплена точечная масса m.

Каким должно быть минимальное значение коэффициента трения покоя между сферой и наклонной плоскостью для того, чтобы вся эта конструкция находилась в равновесии?



Условия равновесия конструкции определяются балансом внешних сил, сумма которых в проекции как на горизонтальное,так и на вертикальное направление должна быть равна нулю:

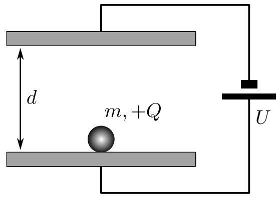
$$\begin{cases} Ox: \ \mu N \cos\alpha = N \sin\alpha \\ Oy: \ (\mu \sin\alpha + \cos\alpha) = (M+m)g, \end{cases}$$

где α - угол наклона плоскости. Добавим к этим соотношениям уравнение баланса моментов сил относительно центра кривизны полусферы - в него будут входить только моменты силы тяжести mg и силы трения μN, причем ввиду равенства плечей этих сил это уравнение будет иметь очень простой вид: $mg = \mu N$.

Исключая из всех вышеприведенных уравнений тригонометрические функции угла α и модуль силы нормальной реакции N получаем предельное значение коэффициента трения.

Ответ: $\mu = \dfrac{m}{\sqrt{M(M+2m)}}$.

Задача 5. Прыг-скок



Очень маленький металлический шарик массы m совершает периодическое движение между двумя обкладками плоского конденсатора в направлении перпендикулярном к ним. На обкладках поддерживается постоянная разность потенциалов U, расстояние между ними d. При ударе шарик теряет половину своей скорости и приобретает заряд Q того же знака, что и заряд обкладки.

Каков период движения этого шарика? (*влиянием силы тяжести можно пренебречь*).

Расстояние d, проходимое между столкновениями с обкладками, может быть найдено как произведение средней скорости движения на время перемещения t:

$$d = \frac{v + v/2}{2}t = \frac{3}{4}vt.$$

С другой стороны, величина ускорения $a = F/m$ шарика определяет величину изменения скорости за то же самое время:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m} = \frac{\Delta v}{t} = \frac{v - v/2}{t} = \frac{v}{2t},$$

где $E = \frac{U}{d}$ - напряженность электрического поля в объеме конденсатора. Исключая из представленных соотношений значение максимальной скорости шарика и учитывая, что период движения равен $T = 2t$ получаем окончательный ответ задачи.

Ответ: $T = \sqrt{\frac{8md^2}{3QU}}$.

10 класс

Задача 1. Экспресс из Ромашково

Скоростной поезд «Сапсан», когда его головной вагон со скоростью v_0 миновал станцию «Ромашково», начал разгон с некоторым постоянным ускорением. С какой скоростью хвостовой вагон поезда проедет мимо следующей по пути следования станции «Васильково»?

Времена прохождения перегона «Ромашково - Васильково» для головного и хвостового вагонов отличаются в два раза, а расстояние между этими станциями в n раз больше длины поезда.

Выбрав в качестве начала отсчета по времени момент, когда поезд начал двигаться с ускорением, введем обозначения для последующих характерных ситуаций данной задачи: t_1 - момент, когда хвостовой вагон миновал «Ромашково», t_2 - момент, когда головной вагон проехал «Васильково», t_3 - момент, когда хвост поезда миновал «Васильково». Если длину поезда обозначить как ℓ, то расстояние между станциями будет равно $n\ell$. Запишем систему кинематических уравнений:

$$\begin{cases} \ell = v_0 t_1 + \frac{a t_1^2}{2} \\ \ell = v_0(t_3 - t_2) + \frac{a}{2}(t_3^2 - t_2^2) \\ n\ell = v_0 t_2 + \frac{a t_2^2}{2} \\ n\ell = v_0(t_3 - t_1) + \frac{a}{2}(t_3^2 - t_1^2) \end{cases}$$

Первая пара из них относится к перемещению головного вагона относительно станций, а вторая - к перемещению головного и хвостового вагонов, соответственно, *между* станциями. Данная система уравнений содержит в себе решение - значение скорости поезда в момент времени t_3: $v = v_0 + at_3$. Решать ее можно разными способами. Например, можно приравняв правые части третьего и четвертого уравнений системы и использовав условие задачи $t_2 = 2(t_3 - t_1)$, получить следующие соотношения для at_1 и at_2:

$$at_1 = \tfrac{3at_3+2v_0}{5}, at_2 = \tfrac{4at_3-4v_0}{5} \quad \Leftrightarrow \quad at_1 = \tfrac{3v-v_0}{5}, at_2 = \tfrac{4v-8v_0}{5}.$$

Далее можно, например, умножив первое уравнение исходной системы слева и справа на n, приравнять правые части первого и третьего уравнений и подставить в полученное выражение полученные выше соотношения для $at_{1,2}$. После тривиальных преобразований получим квадратное уравнение для v:

$$v^2 + 24\frac{n+1}{9n-16}v_0 v - v_0^2 = 0,$$

из корней которого в качестве окончательного ответа выбираем тот, который имеет положительное значение.

Ответ: $v = \dfrac{\sqrt{225n^2+400}+12(n+1)}{16-9n}v_0.$

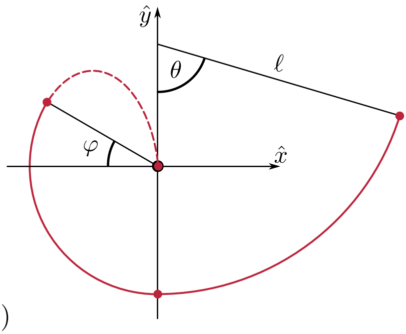
Задача 2. Гвоздь программы

Маленький шарик подвешен на нити, длина которой ℓ. В точке O на расстоянии $\ell/2$ ниже точки подвеса в стену вбит гвоздь. Шарик отводят в сторону так, что нить отклоняется от вертикали на угол θ и отпускают без начальной скорости.

Каким должен быть угол θ чтобы в процессе последующего движения шарик смог столкнуться с гвоздем?

Согласно второму закону Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$



При проекции на радиальное направление в точке, где обнуляется сила натяжения:

$$ma_{\text{ц.с.}} = mg\sin(\varphi)$$
$$\frac{mv^2}{\ell/2} = mg\sin(\varphi) \Rightarrow v^2 = \frac{g\ell\sin(\varphi)}{2}$$

Выберем нулевое значение потенциальной энергии на уровне закрепления верхнего конца нити. Согласно закону сохранения энергии:

$$-mg\ell\cos(\theta) = \frac{mv^2}{2} - mg\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell\sin(\varphi)}{2}\right)$$

Подставим в ЗСЭ значение v^2 из второго закона Ньютона:

$$\cos\theta = \frac{1-\sin\varphi}{2} - \frac{v^2}{2g\ell} = \frac{1-\frac{3}{2}\sin\varphi}{2}$$

Уравнения движения после перехода на баллистическую траекторию в проекциях на координатные оси Ox и Oy при условии попадания в гвоздь будут иметь вид:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\ell\cos\varphi}{2} + v_x t \;\Rightarrow\; t = \frac{\ell\cos\varphi}{2v\sin\varphi} \\ 0 = \frac{\ell\sin\varphi}{2} + v_y t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Подставим в уравнение движения вдоль оси Oy время полета, полученное из уравнения движения вдоль оси Ox:

$$0 = \frac{\ell\sin\varphi}{2} + v\cos\varphi\frac{\ell\cos(\varphi)}{2v\sin(\varphi)} - \frac{g\ell^2\cos^2\varphi}{8v^2\sin^2\varphi}$$

$$0 = \frac{1}{\sin(\varphi)} - \frac{g\ell\cos^2(\varphi)}{4v^2\sin^2(\varphi)}$$

$$0 = 1 - \frac{2\cos^2\varphi}{4\sin^2\varphi} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{2}$$

Найдем $\sin\varphi$:

$$\sin^2\varphi = \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} \;\Rightarrow\; \sin^2\varphi = \frac{1}{3}$$

Подставив значение $\sin\varphi$ в формулу для $\cos\theta$ получаем окончательный ответ задачи:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \theta \approx 86^\circ.$

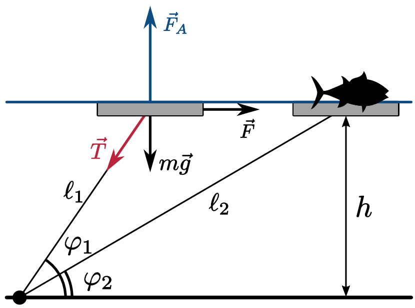
Задача 3. На маленьком плоту...

Рыбак Сантьяго отправился в океан на бамбуковом плоту для ловли тунцов. Прибыв на место рыбалки, где глубина была равна h, Сантьяго закрепил плот, бросив за борт якорь на тросе длиной ℓ_1. Однако поверхностное течение было настолько сильным, что плот погрузился в воду практически полностью. После того, как был пойман первый тунец, рыбаку пришлось увеличить длину якорного троса до ℓ_2.

Какое максимальное количество рыб сможет привезти с собой на плоту Сантьяго на берег, если масса каждого пойманного им тунца примерно равна массе самого рыбака?

Запишем уравнения баланса сил, действующих на плот после прибытия на место рыбалки, в проекции на координатные оси (см.рис.):

$$\begin{cases} F_{\text{АРХ}} = T\sin\varphi_1 + mg \\ F = T\cos\varphi_1, \end{cases}$$



где $F_{\text{АРХ}}$ - сила Архимеда, F - сила напора течения воды, T - сила натяжения троса, m - масса рыбака (массой самого плота пренебрегаем, так как плот сделан из легкого бамбука и маленький, о чем есть подсказка в названии задачи).

Исключив из данной системы уравнений для плота без пойманных рыб и из аналогичной системы для плота с первой пойманной рыбой (в этом случае mg заменяется на $2mg$) величину силы натяжения якорного троса получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} F_{\text{АРХ}} = F\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 + mg \\ F_{\text{АРХ}} = F\,\mathrm{tg}\,\varphi_2 + 2mg. \end{cases}$$

Предельное условие плавучести плота при N пойманных рыбах определяется минимальным значением угла наклона троса ($\varphi = 0$) и может записано в следующем виде: $F_{\text{АРХ}} = (N+1)mg$. Из последних трех уравнений непосредственно следует ответ задачи:

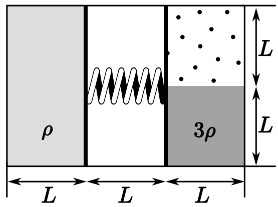
$$N = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Выразив тангенс угла наклона троса через его длину и глубину океана в месте рыбалки $\operatorname{tg}\varphi_{1,2} = \dfrac{d}{\sqrt{\ell_{1,2}^2 - d^2}}$, получаем окончательную форму записи ответа.

Ответ: $N = \operatorname{int}\left(\frac{\sqrt{\ell_2^2 - h^2}}{\sqrt{\ell_2^2 - h^2} - \sqrt{\ell_1^2 - h^2}}\right)$, где int - оператор взятия целой части от аргумента.

(*У самых любопытных участников Олимпиады может возникнуть вопрос, почему Сантьяго затаскивал пойманных тунцов на плот, а не оставлял «за бортом». Ответ очень простой - после неудачи с марлином он больше так не делает* ;)

Задача 4. Компрессия!



Гениальный механик-самоучка Пин для испытания новой модели батискафа построил компрессионную камеру. Прямоугольный контейнер шириной $3L$ и высотой $2L$ он разделил на три герметичных равных отсека двумя легкоподвижными поршнями. Левый отсек целиком заполнен некоторой жидкостью №1, а правый отсек наполовину - жидкостью №2 у которой плотность в три раза больше, а наполовину воздухом. В вакуумированном среднем отсеке Пин закрепил напряженную пружину, при этом вся конструкция оказалась стабильной.

Чтобы убедится в прочности камеры Пин добавил еще две такие же пружины в средний отсек. При этом давление в **верхней** части левого отсека возросло в $n = 14\frac{1}{2}$ раз, а правый поршень переместился на расстояние $L/3$.

Какова длина использованных пружин в ненапряженном состоянии (ответ запишите в единицах L)?

Запишем условия равновесия левого поршня при наличии одной и трех пружин в центральной части:

$$\begin{cases} k(L_0 - L) = (P + \rho g L)S \\ 3k(L_0 - 4L/3) = (nP + \rho g L)S. \end{cases}$$

Здесь введены обозначения: k - коэффициент жесткости пружин, L_0 - их длина в ненапряженном состоянии, P - исходное давление в верхней части левого отсека, S - площадь поршня. Исключив из этих уравнений P, получим следующее соотношение:

$$k\Big((n-3)L_0 - (n-4)L\Big) = (n-1)\rho g L S.$$

Аналогично запишем условия равновесия правого поршня:

$$\begin{cases} k(L_0 - L) = P_A S + \frac{1}{2} 3\rho g L \frac{S}{2} \\ 3k(L_0 - 4L/3) = 3P_A S + \frac{1}{2} 3\rho g \frac{3}{2} L \frac{3S}{4} S = 3P_A S + \frac{27}{16}\rho g L S, \end{cases}$$

где P_A - исходное давление воздуха в правом отсеке. При записи второго уравнения системы учтено, что в случае наличия трех пружин объем воздуха уменьшился в три раза (из-за смещения поршня и подъема уровня жидкости) и, соответственно, его давление в три раза возросло.

Исключив из уравнений последней системы P_A, получим второе уравнение, в которое входит основной параметр задачи $\frac{\rho g L S}{k}$:

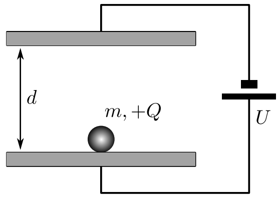
$$kL = \frac{9}{16}\rho g L S.$$

Из этих уравнений легко получить как ответ задачи в общем виде, так и в частном случае с заданным в условии значением параметра $n = 14\frac{1}{2}$:

$$L_0 = \frac{25n - 52}{9n - 27} L = 3L.$$

Ответ: $L_0 = 3L$.

Задача 5. Прыг-скок



Очень маленький металлический шарик массы m совершает периодическое движение между двумя обкладками плоского конденсатора в направлении перпендикулярном к ним. На обкладках поддерживается постоянная разность потенциалов U, расстояние между ними d. При ударе шарик теряет половину своей скорости и приобретает заряд Q того же знака, что и заряд обкладки.

Каков период движения этого шарика? (*влиянием силы тяжести можно пренебречь*).

Расстояние d, проходимое между столкновениями с обкладками, может быть найдено как произведение средней скорости движения на время перемещения t:

$$d = \frac{v + v/2}{2} t = \frac{3}{4} vt.$$

С другой стороны, величина ускорения $a = F/m$ шарика определяет величину изменения скорости за то же самое время:

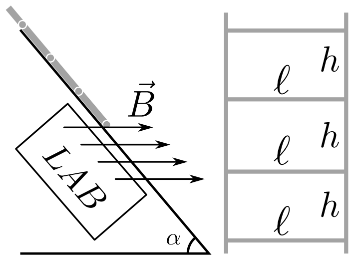
$$a = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m} = \frac{\Delta v}{t} = \frac{v - v/2}{t} = \frac{v}{2t},$$

где $E = \frac{U}{d}$ - напряженность электрического поля в объеме конденсатора. Исключая из представленных соотношений значение максимальной скорости шарика и учитывая, что период движения равен $T = 2t$ получаем окончательный ответ задачи.

Ответ: $T = \sqrt{\frac{8md^2}{3QU}}$.

11 класс

Задача 1. Магнитные санки



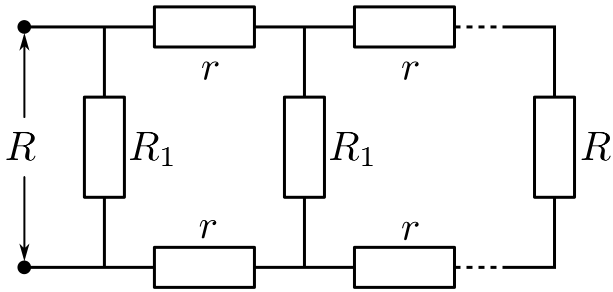
Петр решил покататься с горки на очень-очень длинной пластине, в которую для жесткости была вмонтирована стальная решетка (см. рис.). Ширина решетки ℓ, расстояние между каждой парой ребер - h, а ребер в решетке очень много. Диаметр проволоки, из которой сделана решетка равен d. Петя выбрал несанкционированное место для катания: под склоном находилась секретная лаборатория, создававшая в достаточно широкой области сильное горизонтальное магнитное поле с индукцией B. Попробовав скатиться с горки он обнаружил, что на каком-то участке замедляется и начинает скользить с постоянной скоростью.

Чему равна эта скорость? Удельное сопротивление стали ρ считать известным. Масса Пети вместе с решеткой равна M. Считать, что все упомянутые длины в системе удовлетворяют условию, того что Петр начал скатываться с постоянной скоростью.

При движении в магнитном поле в образующих решетку контурах возникают индукционные токи, что и приводит к торможению из-за действия силы Ампера. Ускорение исчезает в тот момент, когда сила Ампера компенсирует проекцию силы тяжести на направление движения. Для нахождения токов необходимо знать сопротивление цепи и величину ЭДС индукции.

Для вычисления сопротивления рассмотрим нашу конструкцию сверху. Данная решетка является электрической цепью, в которой r — сопротивление короткого проводника, соединяющее два поперечных проводника сопротивления R_1. В этом случае можно записать для сопротивлений участков:

$$r = \frac{\rho\ell}{\pi\left(d/2\right)^2}\frac{h}{\ell}, \quad R_1 = \frac{\rho\ell}{\pi\left(d/2\right)^2}.$$



Так как решетка очень длинная, то можно представить, что данная структура будет повторяться практически бесконечно, тогда:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2r+R} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{R_1(2r+R)}{2r+R+R_1}$$
$$\Longrightarrow R\cdot 2r + R^2 + RR_1 = 2rR_1 + RR_1$$
$$R^2 + 2rR - 2rR_1 = 0.$$

Перепишем полученное квадратное уравнение для нахождения R, введя обозначение $\xi = h/\ell$, и решим его:

$$R^2 + 2\xi R_1 R - 2\xi R_1^2 = 0$$
$$R = -\xi R_1 + \sqrt{\xi^2 R_1^2 + 2\xi R_1^2} = \xi R_1\left(\sqrt{1+\frac{2}{\xi}} - 1\right)$$
$$R = \rho\frac{h}{\pi(d/2)^2}\left[\sqrt{1+\frac{2\ell}{h}} - 1\right].$$

Суммарное сопротивление интересующего нас контура будет равно $2r + 2R$. Теперь разберемся с ЭДС индукции. Оно равно производной от магнитного потока:

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -B\ell\frac{\Delta x}{\Delta t}\cdot\sin\alpha.$$

Вычислив величину ЭДС, мы можем найти суммарный ток, который будет циркулировать в цепи $I_{\mathscr{E}}$:

$$I_{\mathscr{E}} = \frac{|\mathscr{E}|}{2R+2r} = \frac{B\ell v\sin\alpha}{2r + \frac{2\rho h}{\pi(d/2)^2}\left(\sqrt{1+\frac{2\ell}{h}}-1\right)}.$$

Модуль силы Ампера может быть найдем суммированием по всем поперечным элементам решетки, находящимся в магнитном поле:

$$F_A = \sum_i I_i\ell_i B = B\ell\sum_i I_i = B\ell I_{\mathscr{E}}.$$

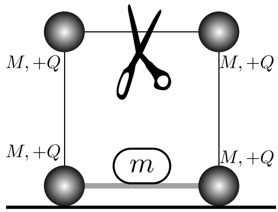
Так как сила тяжести $M\vec{g}$ направлена вертикально вниз, а сила Ампера $\vec{F}_A$ - вертикально вверх, то для их баланса достаточно потребовать равенства их модулей:

$$Mg = \frac{B^2\ell^2 v\sin\alpha}{2r + \frac{2\rho h}{\pi(d/2)^2}\left(\sqrt{1+\frac{2\ell}{h}}-1\right)}$$

Из данного выражения непосредственно следует окончательный ответ задачи.

Ответ: $v = \dfrac{2Mg}{B^2\ell^2\sin\alpha}\left(r + \dfrac{\rho h}{\pi(d/2)^2}\left(\sqrt{1+\frac{2\ell}{h}}-1\right)\right).$

Задача 2. Электрокатапульта



Коля решил сделать катапульту из четырех одинаковых заряженных шариков. Масса каждого шарика равна M, а заряд Q. Они все между собой связаны нитями, кроме двух нижних, которые соединены жесткой перекладиной очень малой массы. Нити и перекладина имеют одинаковую длину ℓ. Вся конструкция находится в вертикальной плоскости. Положив на перекладину груз, чья масса равна $m \ll M$, Коля разрезал нить между двумя верхними зарядами.

На какую максимальную высоту подлетит груз m? Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения равно g. Действием силы тяжести до момента отрыва груза от перекладины можно пренебречь.

Все шарики отталкиваются из-за кулоновских сил и в момент разрезания нити пытаются отдалиться друг от друга. Верхние при этом летят вниз, а нижние — вверх. Все силы в системе являются консервативными, поэтому можно воспользоваться законом сохранения энергии, учитывая то, что по условию задачи влиянием силы тяжести до момента отрыва груза можно пренебречь.

Энергия электростатического взаимодействия между парами шаров, которые остаются непосредственно соединенными нитями не будет меняться, поэтому ее можно не учитывать при записи ЗСЭ. Энергия системы в начальной конфигурации (сразу же после разрезания нити):

$$E_0 = \frac{2kQ^2}{\sqrt{2}\ell} + \frac{kQ^2}{\ell},$$

где первое слагаемое в правой части относится к энергии взаимодействия пар шариков расположенных на диагоналях квадрата, а второе слагаемое - к энергии взаимодействия в верхней паре.

При дальнейшем «распрямлении» данной конструкции расстояния в этих парах будут увеличиваться до момента, пока все четыре шарика не окажутся на одной горизонтальной прямой. В этот момент их скорости будут направлены вертикально, равны по модулю (вследствие сохранности полного импульса - мы договорились, что пока не учитываем влияние силы тяжести и пренебрегаем массой груза!) и будут иметь максимальное значение. Заметим, что перекладина на которой находится груз, поднимется до высоты $\ell/2$. Затем конструкция начнет «складываться», скорости заряженных шариков будут уменьшатся, а груз, оторвавшись от перекладины, перейдет в свободный полет. Запишем выражение для полной энергии в момент отрыва груза:

$$E_2 = \frac{2kQ^2}{2\ell} + \frac{kQ^2}{3\ell} + 4 \cdot \frac{Mv^2}{2},$$

и приравняв $E_0 = E_1$, найдем квадрат стартовой скорости груза:

$$v^2 = \frac{kQ^2}{2M}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right).$$

Высоту подъема над точкой старта также легко найти из ЗСЭ для груза $(mg\Delta h = \frac{mv^2}{2})$:

$$\Delta h = \frac{kQ^2}{4Mg}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right).$$

Сумма $\ell/2$ и Δh дает окончательный ответ задачи.

Ответ: $h_{max} = \frac{\ell}{2} + \frac{kQ^2}{4Mg}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right).$

Задача 3. Панда на бамбуке

Панда по кличке Цзя Паньпань очень любит взбираться на вершины бамбуковых стволов. Поднявшись на один из таких стволов, Панда решила немного покачаться вперед и назад, ведь упругость бамбука это позволяет. Какое количество качаний за одну секунду она будет совершать? Более того, напишите условие на массу Панды при котором качания вообще возможны.

Длина бамбукового ствола ℓ, а возвращающая сила зависит от радиуса кривизны его изгиба следующим образом: $F(R) = \alpha/R$, где α — известная константа. Трением в системе пренебречь. Отклонения считать малыми, масса ствола пренебрежимо мала по сравнению с массой панды, которая равна m.

Из-за сил упругости Панда будет совершать колебания в окрестности равновесия, однако такой режим возможен, если сила тяжести не слишком большая, в противном случае Панда отклонится из положения с нулевым углом и не вернется назад. Чтобы найти частоты, с которой Панда качается на бамбуке, можно записать выражение для полной энергии:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x),$$

где $U(x)$ — потенциальная энергия. Она состоит из двух вкладов: потенциальная энергия в поле силы тяжести и потенциальная энергия упругой деформации ствола. Выражение для первой имеет вид:

$$U_1 = mg(\ell - \Delta),$$

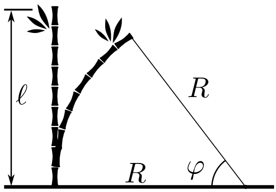
где Δ — величина изменения вертикальной координаты Панды. Ее можно найти из соотношения:

$$\Delta = \ell - R\sin\varphi \approx \ell - \ell\left(1 - \frac{\varphi^2}{6}\right) = \frac{\ell\varphi^2}{6},$$

где мы учли, что $R = \ell/\varphi$. Учтем также, что горизонтальная проекция отклонения Панды из положения равновесия связана с углом следующим образом: $x = R - R\cos\varphi \approx \ell\varphi/2$.

С учетом всех представленных выше соотношений для гравитационной составляющей потенциальной энергии имеем:

$$U_1 = mg(\ell - \Delta) = Const - \frac{2}{3}\frac{mg}{\ell}x^2.$$



Теперь получим вклад в потенциальную энергию от сил упругости. По условию задачи возвращающая сила возникающая при изгибе бамбукового ствола равна $F = -\alpha/R = -\alpha\varphi/\ell$, откуда мы сразу можем получить выражение для вклада в потенциальную энергию: $U_2 = \alpha(x/\ell)^2$. Тогда выражение для полной потенциальной энергии будет иметь следующей вид:

$$U = Const - \frac{2mg}{3\ell}x^2 + \alpha\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 = Const + \left(\frac{2\alpha}{\ell^2} - \frac{4mg}{3\ell}\right)\frac{x^2}{2}.$$

Если записать полную энергию в виде:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2},$$

то, как известно, циклическая частота гармонических колебаний выражается в виде $\sqrt{k/m}$. Окончательный ответ:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\alpha}{m\ell^2} - \frac{4g}{3\ell}}.$$

Условием того, что колебания вообще будут возможны, является положительность подкоренного выражения, что соответствует неравенству $3\alpha > 2mg\ell$.

Ответ: $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2\alpha}{m\ell^2} - \dfrac{4g}{3\ell}}$.

Задача 4. Картофельный поезд

Дима решил заняться транспортной торговлей - продавать картошку на развес в поездах. Как-то раз один из покупателей решил, что Дима его обсчитал, сказав, что в пакете m *кг* картошки. Оказывается, что в момент взвешивания картошки при помощи безмена поезд проходил через середину дугообразного участка железной дороги.

Какова настоящая масса картошки, если в момент захода в плавный поворот поезд имел скорость v_1, а в конце поворота по причине равномерного торможения его скорость была уже v_2? Путь, который прошел поезд за поворот, равен S. Поезд в результате поворота изменил свое направление на угол α.

Отклонения показаний безмена от истинного значения обусловлены наличием дополнительного ускорения, которое испытывает мешок с картошкой. Если m это показания безмена при движении поезда в момент прохождения половины дуги, то настоящая масса картофеля m_0 может быть найдена следующим образом:

$$m_0 = m\frac{g}{a} = m\frac{g}{\sqrt{g^2 + a_\tau^2 + a_n^2}},$$

где a_τ и a_n - тангенциальная и нормальная компонента полного эффективного ускорения, соответственно.

Тангенциальное ускорение можно легко найти, так как известна начальная и конечная скорость при прохождении участка длины S:

$$a_\tau = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2S}.$$

Для нахождения нормального (центростремительного) ускорения $a_n = \frac{v^2}{R}$ необходимо знать радиус кривизны участка дороги $(R = S/\alpha)$ и квадрат скорости в момент прохождения середины этого участка. Скорость можно найти из условия постоянства тангенциального ускорения:

$$a_\tau = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2S} = \frac{v^2 - v_1^2}{2(S/2)} \qquad \Longrightarrow$$
$$v^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2}.$$

Таким образом, выражение для нормального ускорения будет иметь вид:

$$a_n = \alpha \frac{v_1^2 + v_2^2}{2S}.$$

Ответ: $m_0 = \dfrac{2mgS}{\sqrt{(2gS)^2 + (v_2^2 - v_1^2)^2 + \alpha^2 (v_1^2 + v_2^2)^2}}$.

Задача 5. Холодильная машина

В жаркий летний день Коля захотел сделать машину по производству кубиков льда. Из артезианской скважины к нему поступает вода практически нулевой температуры ($t_1 = 0\,°\mathrm{C}$). Известно, что температура, которая стоит на улице равна $t_2\,°\mathrm{C}$. Из подручных материалов у него нашелся старенький мотор от мопеда, мощность которого P *кВт*. Какое максимальное количество кубиков он может произвести за время τ, если длина ребра каждого кубика ℓ *см*? Удельная теплота плавления льда λ.

При помощи мотора от мопеда мы можем сделать холодильную машину. Работа мотора, расходуемая на отвод тепла от воды нулевой температуры, будет приводить к образованию льда. Чтобы количество кубиков было бы максимальным, то в качестве цикла нам необходимо взять холодильный цикл Карно.

Если Q^- - тепло, забираемое у воды за время τ, то:

$$\frac{A_{\text{внешн}}}{Q^-} = \frac{P\cdot\tau}{Q^-} = \frac{T_2 - T_1}{T_1} \qquad \Longrightarrow$$

$$Q^- = \frac{T_1}{T_2 - T_1} P\tau,$$

где $T_1 = t_1 + 273\ °\mathrm{C}$, $T_2 = t_2 + 273\ °\mathrm{C}$ - абсолютные температуры воды и воздуха, соответственно.

С другой стороны, полное количество отведенного тепла определяет массу образовавшегося льда:

$$Q^- = m\lambda = \rho V\lambda = \rho N\ell^3\lambda,$$

где ρ - плотность льда.

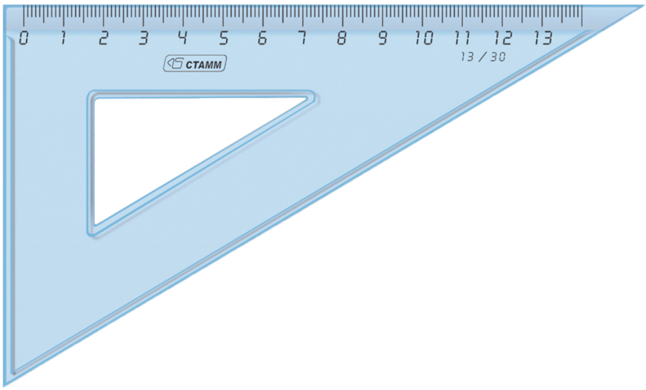
Из последних двух выражений непосредственно следует ответ задачи.

Ответ: $N = \dfrac{P\tau}{\lambda\rho\ell^3}\cdot\dfrac{t_1 + 273\ °\mathrm{C}}{t_2 - t_1}.$

Экспериментальный тур финального этапа

7-8 класс

Задача: Определить массу треугольной линейки.
Оборудование: треугольная линейка, стол, разновес массой $m = 5 \div 20$ *г*, таблица погрешностей разновесов.



Номинальное значение массы гири	Границы погрешности
10 мг, 20 мг, 50 мг, 100 мг	1 мг
200 мг	2 мг
500 мг	3 мг
1 г	4 мг
2 г	6 мг
5 г	8 мг
10 г	12 мг
20 г	20 мг
50 г	30 мг
100 г	40 мг

Решение

Для определения массы линейки M необходимо использовать правило рычага. Для этого линейка выдвигается за край стола и измеряются расстояния от линий действия сил до края стола.

На первом этапе нужно определить положение центра тяжести. Так как линейка будет поворачиваться при падении вокруг оси, совпадающей с краем стола, то достаточно определить только одну координату центра тяжести (вдоль выдвигаемой перпендикулярно столу стороны линейки).

Кладем линейку на стол так, чтобы проградуированная сторона линейки была перпендикулярна краю стола. Медленно двигаем линейку так, чтобы линейка начала свисать с края стола. Замечаем расстояние от края линейки до края стола в тот момент, когда линейка начинает поворачиваться вокруг оси (край стола), то есть падать. Будем определять это расстояние, начиная отсчет от того края линейки, который остается на столе. Получаем расстояние $x_1 \pm \Delta x$. Погрешность определяем как цену деления линейки или половину цены деления линейки. Повторяем эксперимент несколько раз. Определяем среднее значение $\overline{x_1} \pm \Delta x$.

Устанавливаем на линейку разновес (предлагается устанавливать разновес на ту часть линейки, которая остается на столе) массой m. Определяем ее положение по оси, перпендикулярной краю стола $x_2 \pm \Delta x$.

Выдвигаем линейку за край стола и определяем координату оси вращения по линейке $x_3 \pm \Delta x$. Повторяем эксперимент несколько раз. Находим средние значения $\overline{x_2} \pm \Delta x$ и $\overline{x_3} \pm \Delta x$.

По правилу рычага (в качестве сил выступают силы тяжести)

$$
\begin{aligned}
&Mg|(\overline{x_1} - \overline{x_3})| = mg|(\overline{x_3} - \overline{x_2})|,\\
&M = \frac{|(\overline{x_3} - \overline{x_2})|}{|(\overline{x_1} - \overline{x_3})|} m.
\end{aligned}
$$

9-10 класс

Задача: Найдите с максимальной точностью коэффициент трения скольжения поверхности мяча для настольного тенниса о миллиметровую бумагу. Оцените погрешность полученного результата. Опишите проведенные измерения и проведенные расчеты.

Оборудование:

- теннисный мяч
- миллиметровая бумага
- липкая лента
- 3 (три) металлические гайки M10
- электронный секундомер
- миллиметровая бумага
- карандаш

Решение

Прикрепив с помощью липкой ленты к «экваториальной» области мяча для тенниса (там где расположен шов) на равном удалении друг от друга три гайки, установим получившийся волчок на горизонтальную поверхность стола, покрытую миллиметровой бумагой и аккуратно раскрутим его. В процессе вращения угловая скорость волчка будет уменьшаться главным образом из-за наличия трения между его нижней точкой и опорной поверхностью. Измерим с помощью секундомера время τ до его полной остановки, одновременно посчитав полное количество оборотов N, которое успеет совершить за это время мяч. Таким образом мы получим возможность оценить угловое ускорение мяча β:

$$\Delta\varphi = 2\pi N = \frac{\beta\tau^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{4\pi N}{\tau^2}.$$

С другой стороны, угловое ускорение будет определятся моментом инерции системы $I = 3m\ell^2$ (где m - масса каждой гайки, ℓ - расстояние от них до оси вращения, которое легко измерить с помощью миллиметровой бумаги) и моментом сил сухого трения M, который легко найти, предположив что вес мяча с гайками равномерно распределен по области площади контакта с бумагой. Давление мяча на бумагу будет в этом случае равно:

$$P = \frac{3mg}{\pi R^2},$$

где R - радиус области контакта. Мысленно разбив область на ряд тонких концентрических колец с шириной dr найдем вклад в полный момент от каждого такого кольца:

$$dM = \mu r dN = \mu r P dS = \mu r \frac{3mg}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{6\mu mg}{R^2} r^2 dr.$$

Просуммировав вклады от всех колец получим выражение для полного момента сил трения:

$$M = 2\mu mgR.$$

Собрав все известные нам величины в общем уравнении динамики вращательного движения $I\beta = M$, получим рабочую формулу для нахождения коэффициента трения μ:

$$\mu = \frac{3\Delta\varphi\ell^2}{gR\tau^2} = \frac{6\pi N\ell^2}{gR\tau^2}.$$

Осталось только оценить размеры области контакта R. Для этого, плотно заштриховав грифельным карандашом нижний участок на поверхности мяча, аккуратно поставим его на поверхность миллиметровой бумаги. На ней останется достаточно хорошо различимы отпечаток, размеры которого можно оценить с помощью масштабной сетки. Таким образом, все входящие в формулу параметры становятся нам известны.

11 класс

Задача: Найдите с максимальной точностью электрическую емкость выданного электролитического конденсатора. Оцените погрешность полученного результата. Опишите проведенные измерения и проведенные расчеты.

Оборудование:

- конденсатор
- магазин сопротивлений
- источник постоянного напряжения
- цифровой вольтметр
- соединительные провода
- механический секундомер

Решение

Соединим последовательно магазин сопротивлений и исследуемый конденсатор, а параллельно конденсатору подключим вольтметр. При подаче постоянного напряжения от источника на выводы данной цепи по прошествии некоторого времени установления равновесия напряжение на конденсаторе станет равно напряжению на выходе источника. Отключим цепь от источника и соединим ее выводы между собой. Конденсатор будет разряжаться через магазин сопротивлений, а напряжение на нем будет меняться в соответствии со следующим соотношением:

$$U(t) = U_0 \exp\Big(-\frac{t}{RC}\Big),$$

где U_0 - стартовое напряжение на конденсаторе. Измерим с помощью секундомера время τ, за которое напряжение уменьшится в $n > 1$ раз. В качестве значения удобно выбирать основание натурального логарифма $e = 2{,}718281828$. При известном сопротивлении магазина R величина электроемкости конденсатора определяется по формуле:

$$C = \frac{\tau}{R\ln n}.$$

Проведя ряд последовательных измерений при различных значения R и n можно получить зависимость вида:

$$\tau_i = R_i \ln n_i \cdot C,$$

которая является линейной функцией, связывающей параметры τ_i и $R_i \ln n_i$. Угловым коэффициентом данной функции является искомая емкость. Оценить погрешность ее определения можно используя любые стандартные методы, например парных точек или графически.

Критерии определения победителей и призеров Олимпиады

Баллы за задачи первого тура отборочного этапа

№ задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
7 класс	1	1	2	2	1	2	3	3	2	3	20
8 класс	2	2	3	1	1	1	2	2	3	3	20
9 класс	3	1	2	1	2	1	1	3	3	3	20
10 класс	3	1	2	1	2	1	1	3	3	3	20
11 класс	1	1	2	2	1	2	3	3	2	3	20

Баллы за задачи второго тура отборочного этапа

№ задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
7 класс	2	1	2	2	2	2	1	3	3	2	20
8 класс	1	1	1	2	2	3	2	3	3	2	20
9 класс	1	3	2	2	2	2	3	1	1	3	20
10 класс	1	3	2	2	2	2	3	1	1	3	20
11 класс	2	1	2	2	3	3	1	1	3	2	20

На отборочном этапе участникам Олимпиады в каждом из двух последовательных туров было предложено решить по 10 (десять) задач. Распределение максимальных баллов по задачам приведено в таблицах выше. В каждом из туров максимальное суммарное количество баллов, которые мог набрать участник вне зависимости от класса обучения составляло 20. Отборочный этап проводился в дистанционно-заочном формате, правильность решения проверялась по представляемому числовому ответу. В том случае, если представленный ответ попадал в границы погрешности, определяемые индивидуально для каждой задачи, участник Олимпиады получал максимальный балл за данную задачу. В случае представления ошибочного числового ответа или его полного отсутствия баллы за задачу не начислялись.

После завершения второго тура отборочного этапа количество баллов, набранных при решении всех задач отборочного этапа, как первого, так и второго тура, было просуммировано. На основании составленного рейтингового списка жюри Олимпиады определило критериальные баллы допуска к финальному этапу Олимпиады, которые составили:

- 7 класс - **11** баллов
- 8 класс - **6** баллов
- 9 класс - **6** баллов
- 10 класс - **6** баллов
- 11 класс - **6** баллов

Финальный (заключительный) этап Олимпиады состоял из двух последовательно проводимых туров: теоретического и экспериментального. На теоретическом туре в каждом из классов участникам были предложены пять задач, максимальные баллы за которые приведены в таблице ниже. Максимальное суммарное количество баллов, которые мог набрать участник на теоретическом туре вне зависимости от класса обучения составляло 20 баллов. На экспериментальном туре участники получили практическую задачу (в таблице №6), оцениваемую максимально 10 баллами. Максимально возможный индивидуальный балл участника заключительного этапа 30 баллов.

Баллы за задачи финального этапа

№ задачи	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Σ
7 класс	3	5	4	3	5	10	30
8 класс	3	5	4	3	5	10	30
9 класс	3	5	4	4	4	10	30
10 класс	5	4	4	4	3	10	30
11 класс	5	4	4	3	4	10	30

Для определения победителей и призеров на основе индивидуальных результатов участников был сформирован общий рейтинг всех участников заключительного этапа по сумме баллов за теоретический и экспериментальный туры. При достижении порогового значения в 66% от максимального балла (20 баллов) участник становился победителем Олимпиады, а при достижении порогового значения в 50% от максимального балла (15 баллов) - призером Олимпиады.