

Санкт-Петербургский национальный исследовательский
университет информационных технологий, механики и оптики

Физический факультет

Задачи Открытой Олимпиады по физике 2023/24 уч. года

ІІТМО

25 апреля 2024 г.

Оглавление

Отборочный этап

Первый тур отборочного этапа	3
7 класс	3
8 класс	13
9 класс	23
10 класс	32
11 класс	41
Второй тур отборочного этапа	50
7 класс	50
8 класс	63
9 класс	76
10 класс	92
11 класс	101

Финальный этап

Теоретический тур финального этапа	110
7 класс	110
8 класс	121
9 класс	132
10 класс	147
11 класс	158
Экспериментальный тур финального этапа	171
7-8 класс	171
9 класс	175
10 класс	177
11 класс	179

Отборочный этап

Первый тур отборочного этапа

7 класс

Задача 1. (1,5 балла) Зимой Ёжик обнаружил, что квадратный ковер с длиной стороны $l = 40$ см и толщиной $h = 0.5$ см в его доме уже очень пыльный и его надо "выбить". Для этого он попросил Медвежонка свернуть ковер и вынести на улицу. Медвежонок свернул ковер, вынес его на улицу и поставил в сугроб. Ковер оставил на снегу круглое пятно площадью $S = 16$ см². Ёжик задумался, во сколько раз плотность свернутого ковра больше плотности расправленного ковра. Помогите Ёжику это определить.

Масса ковра до выбивания пыли не изменится. Тогда

$$m = \rho_0 l^2 h = \rho S l$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{lh}{S} = \frac{40 \cdot 0.5}{16} = 1.25$$

Ответ: 1.25

Задача 2. (1,5 балла) Ёжик и Медвежонок сидели дома у Ёжика. Они решили попить чая с малиновым вареньем. Но варенье было дома у Медвежонка, поэтому они поспешили в дом Медвежонка. Медвежонок очень хотел порадовать Ёжика чаем, поэтому он пошел со скоростью $v_1 = 5$ м/с. Ёжик же двигался со скоростью $v_2 = 2$ м/с. Расстояние между домами Ёжика и Медвежонка $s = 12$ км.

Какой путь пройдет Ёжик за 45 минут? (ответ выразите в км)

Путь, пройденный Ёжиком

$$s_2 = v_2 t$$

Скорость Ёжика в км/ч $v_2 = 2 \cdot 3.6 = 7.2$ км/ч, время в часах $t = 45/60 = 0.75$

$$s_2 = 7.2 \cdot 0.75 = 5.4$$

Ответ: 5.4 км

Задача 3. (1,5 балла) Ёжик и Медвежонок сидели дома у Ёжика. Они решили попить чая с малиновым вареньем. Но варенье было дома у Медвежонка, поэтому они поспешили в дом Медвежонка. Медвежонок очень хотел порадовать Ёжика чаем, поэтому он пошел со скоростью $v_1 = 5$ м/с. Ёжик же двигался со скоростью $v_2 = 2$ м/с. Расстояние между домами Ёжика и Медвежонка $s = 12$ км.

Чему равно расстояние между Медвежонком и Ёжиком через 1.5 часа? (ответ выразите в км)

За 1.5 часа Медвежонок пройдет путь $s_1 = v_1 t = 5 \cdot 3.6 \cdot 1.5 = 27$ км. Но между домами расстояние $s = 12$ км. Значит Медвежонок будет находиться у себя дома. Значит можно считать, что Медвежонок пройдет $s_2 = 12$ км.

Ёжик за это время пройдет путь $s_2 = v_2 t = 2 \cdot 1.5 = 3$ км. Расстояние между Медвежонком и Ёжиком

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 12 - 10.8 = 1.2$$

Ответ: 1.2 км

Задача 4. (1,5 балла) Ёжик и Медвежонок сидели дома у Ёжика. Они решили попить чая с малиновым вареньем. Но варенье было дома у Медвежонка, поэтому они поспешили в дом Медвежонка. Медвежонок очень хотел порадовать Ёжика чаем, поэтому он пошел со скоростью $v_1 = 5$ м/с. Ёжик же двигался со скоростью $v_2 = 2$ м/с. Расстояние между домами Ёжика и Медвежонка $s = 12$ км.

Какова общая средняя скорость Ёжика и Медвежонка за время, когда оба окажутся дома у Медвежонка? (ответ выразите в км/ч)

Время, через которое оба окажутся у Медвежонка дома определяется временем движения Ёжика.

$$t = \frac{s}{v_2}$$

Путь, пройденный Ёжиком и Медвежонок суммарно равен $2s$. Общее время движения (и покоя) $2t$ Тогда средняя скорость

$$\bar{v} = \frac{2s}{2t} = \frac{sv_2}{s} = v_2 = 2$$

Ответ: 2 км/ч

Задача 5. (2,5 балла) Медвежонок решил покрасить стены своего дома и Ёжик вызвался ему помочь. Медвежонок тратит $V_1 = 4$ литра краски в час и мажет краску слоем в $l_1 = 4$ мм. Ёжик расходует в 2 раза меньше краски в час и мажет краску слоем в $l_2 = 3$ мм. Медвежонок из-за быстрой работы быстро утомился и Ёжик докрашивал оставшиеся 10% стен дома в одиночку, потратив на это еще 1.5 часа. Сколько краски потратил Медвежонок ? (ответ выразите в л)

Скорость покраски площади стен дома Медвежоном $v_1 = \frac{V_1}{l_1} = \frac{4}{0.04} = 100 \text{ дм}^2/\text{ч}$. Скорость покраски площади стен дома Ёжиком $v_2 = \frac{V_2}{l_2} = \frac{2}{0.01} = \frac{200}{3} \text{ дм}^2/\text{ч}$.

Ёжик покрасил за 1.5 часа $S_{10\%} = v_2 \cdot 1.5 = \frac{1.5 \cdot 200}{3} = 100 \text{ дм}^2$. Тогда площадь стен дома $S = 10S_{10\%} = 1000 \text{ дм}^2$. Площадь стен, которые Ёжик и Медвежонок красили вместе равна 900 дм^2 .

Отношение площадей, покрашенных Ёжиком и Медвежоном равна отношению скоростей покраски. Значит Медвежонок покрасил в $\frac{3 \cdot 100}{200} = 1.5$ раза большую площадь, которая равна $S_1 = \frac{900}{2.5} = 360 \text{ дм}^2$. Для этого нужно потратить объем краски $V = S_1 l_1 = 360 \cdot 0.04 = 14.4 \text{ дм}^3$.

Ответ: 14.4 л

Задача 6. (2,5 балла) Ёжик и Медвежонок решили сварить сироп. Для этого они взяли 1 кг сахара и 1 л воды. Сколько воды испарилось и выкипело при приготовлении сиропа, если плотность сахара $\rho_1 = 1.3$ кг/л, плотность воды $\rho_2 = 1$ кг/л, плотность сахарного сиропа $\rho = 1$ кг/л. (ответ дайте в г)

Объем сиропа $V = V_1 + V_2$. V_1 — объем сахара, V_2 — объем воды в сиропе. Объем сиропа

$$V = \frac{m_1 + m_2}{\rho} = \frac{m_1 + m_2}{\rho} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}$$

$$\frac{m_1}{\rho} + \frac{m_2}{\rho} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}$$

$$m_2 \frac{\rho - \rho_2}{\rho \rho_2} = m_1 \frac{\rho_1 - \rho}{\rho \rho_1}$$

$$m_2 = m_1 \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1} \frac{\rho_2}{\rho - \rho_2} = \frac{10}{16}$$

Тогда объем испарившейся воды

$$\Delta m = \rho_1 V_0 - m_2 = 1 - \frac{10}{16} = 0.375$$

Ответ: 375 г

Задача 7. (2,5 балла) Ёжик нашел в тумане градусник, который проградуирован в единицах температуры, называемых Фаренгейтами. Он измерил свою температуру с помощью этого градусника. Какую температуру показал градусник, если известно, что температуре 0°C соответствует температура 32°F , температуре 100°C соответствует температура 212°F , а температура Ёжика 34°C ? (ответ округлите до десятых)

Изменению температуры на 1°C соответствует изменение температуры $\frac{212 - 32}{100} = 1.8^{\circ}\text{F}$. Так как 0°C соответствует температура 32°F , то температуре 34°C будет соответствовать температура

$$tF = 32 + 1.8 \cdot 34 = 93.2$$

Ответ: 93.2°F

Задача 8. (3,5 балла) Туман очень любил, когда Ёжик ходил в гости к Медвежонку и подгонял его, сообщая ему дополнительную скорость. Но, когда Ёжик возвращался домой от Медвежонка, то туман замедлял Ёжика на такую же величину скорости. Скорость Ёжика относительно тумана всегда была одна и та же.

Однажды Ёжик пошел к Медвежонку в гости, взяв с собой яблоко. Но в какой-то момент яблоко выпало. Дойдя до дома Медвежонка Ёжик обнаружил пропажу. Ёжик пошел обратно и через 20 минут нашел свое яблоко. Сколько времени прошло между моментом когда яблоко выпало и моментом когда Ёжик обнаружил пропажу? Туман все это время двигал яблоко со скоростью, которую добавлял Ёжику. (ответ выразите в минутах)

Пусть t_1 — время, за которое Ёжик дошел до дома Медвежонка после того, как яблоко выпало, $t_2 = 20$ мин — время пути обратно до яблока, v_0 — скорость тумана, v — скорость Ёжика относительно тумана.

За время, пока Ёжик ходил туда и обратно, яблоко переместилось на расстояние $x = v_0(t_1 + t_2)$ относительно точки падения. В этой точке Ёжик снова встретится с яблоком. Ёжик начал путь обратно от дома Медвежонка. Положение дома Медвежонка относительно места падения яблока можно определить как $(v + v_0)t_1$. Тогда положение Ёжика относительно точки падения яблока при движении обратно можно описать $(v + v_0)t_1 - (v - v_0)t$. В момент встречи яблока и Ёжика их положение одинаково, следовательно

$$v_0(t_1 + t_2) = (v + v_0)t_1 - (v - v_0)t_2$$

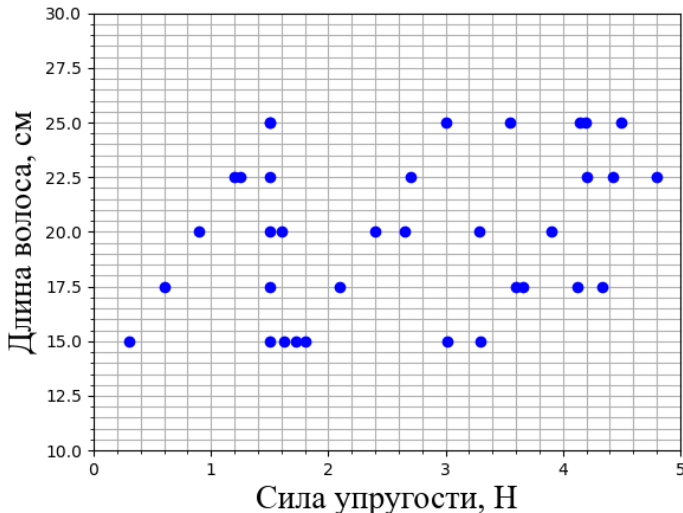
$$v_0(t_1 + t_2) = v_0(t_1 + t_2) + v(t_1 - t_2)$$

$$0 = v(t_1 - t_2)$$

$$t_1 = t_2$$

Ответ: 20 минут

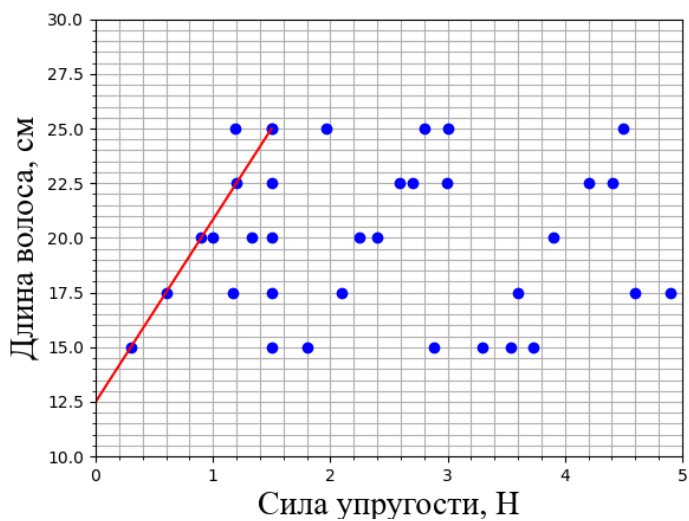
Задача 9. (3,0 балла) Однажды Ёжик нашел в тумане волос (скорее всего Лошадки) и решил исследовать его на упругость. Он измерял длину волоса и силу упругости, которая возникает в волосе при данной длине. Все результаты он представил в виде графика. Но, когда Ёжик отвлекся, Медвежонок добавил на этот график точек. Найдите результаты измерений, проведенные Ёжиком и определите коэффициент жесткости волоса, считая, что выполняется закон Гука. (ответ выразите в Н/м)



Так как волос имеет начальную длину, то закон Гука нужно использовать в виде

$$F = k(l - l_0)$$

При анализе графика видно, что условиям прямолинейности и ненулевой длины при нулевой силе упругости соответствует набор точек, через которые на графике проведена прямая



Начальная длина $l_0 \approx 12.5$ см. Выберем точку $l \approx 15$ см и соответственно силу $F \approx 0.3$ Н.

$$k = \frac{F}{l - l_0} = \frac{0.3}{0.15 - 0.125} = 12$$

Ответ: 12 ± 0.5 Н/м

8 класс

Задача 1. (1,5 балла) Ёжик и Медвежонок бегали на соседнем стадионе. Медвежонок пробежал $N = 25$ кругов и обогнал Ёжика на $\Delta N = 15$ кругов. Найдите среднюю скорость Медвежонка, если средняя скорость Ёжика $v_2 = 7.2$ км/ч. (ответ дайте в км/ч)

Пусть длина 1 круга равна s . Тогда

$$v_1 = \frac{Ns}{t},$$
$$v_2 = \frac{(N - \Delta N)s}{t}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N}{(N - \Delta N)},$$
$$v_1 = \frac{N}{(N - \Delta N)} v_2 = \frac{25}{10} \cdot 7.2 = 18$$

Ответ: 18 км/ч

Задача 2. (1,5 балла) Ёжик решил охладить свой чай и бросил в кружку с чаем кусочек льда (с нулевой температурой). Масса воды $m_1 = 200$ г, масса кусочка льда $m_2 = 8.4$ г. Площадь основания кружки $S = 33$ см². Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4.2$ кДж/(кг[∘]С).

Найдите отношение сил давления на дно сосуда в состояниях, когда лед только оказался в кружке и когда лед растаял.

Сила давления определяется весом тела, которая в данном случае будет равна силе тяжести mg . Масса тела после того как лед растает, не изменится.

Ответ: 1

Задача 3. (1,5 балла) Ёжик решил охладить свой чай и бросил в кружку с чаем кусочек льда (с нулевой температурой). Масса воды $m_1 = 200$ г, масса кусочка льда $m_2 = 8.4$ г. Площадь основания кружки $S = 33$ см². Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4.2$ кДж/(кг°С).

На сколько градусов удалось охладить чай в момент времени, когда лед только-только весь растаял?

Количество теплоты, которое выделяет вода идет на плавление льда

$$cm_1\Delta t = \lambda m_2,$$
$$\Delta t = \frac{\lambda m_2}{cm_1} = \frac{330 \cdot 8.4}{4.2 \cdot 200} = 3.3$$

Ответ: 3.3

Задача 4. (1,5 балла) Ёжик нашел в тумане градусник, который проградуирован в единицах температуры, называемых Фаренгейтами. Он измерил свою температуру с помощью этого градусника. Какую температуру показал градусник, если известно, что температуре 0°C соответствует температура 32°F , температуре 100°C соответствует температура 212°F , а температура Ёжика 34°C ? (ответ округлите до десятых)

Изменению температуры на 1°C соответствует изменение температуры $\frac{212 - 32}{100} = 1.8^{\circ}\text{F}$. Так как 0°C соответствует температура 32°F , то температуре 34°C будет соответствовать температура

$$tF = 32 + 1.8 \cdot 34 = 93.2$$

Ответ: 93.2°F

Задача 5. (2,5 балла) Ёжик выходит из своего дома и идет к дому Медвежонка со скоростью $v_1 = 7.2$ км/ч. Через некоторое время t_0 (менее $t_1 = 40$ с) навстречу Ёжику вышел Медвежонок. Через $t_1 = 40$ с после выхода Ёжика расстояние между Ёжиком и Медвежонком $s_1 = 40$ м, а через $t_2 = 60$ с — $s_2 = 100$ м. С какой скоростью движется Медвежонок? Считать, что движения равномерные и прямолинейными. (ответ дайте в м/с)

Пусть расстояние между домами Ёжика и Медвежонка s . Расстояние проходимое Ёжиком $v_1 t$, а Медвежонком $v_2 (t - t_0)$. Для момента времени t_1 сумма пути, пройденного героями и расстояния между ними равна расстоянию между домами

$$v_1 t_1 + v_2 (t_1 - t_0) + s_1 = l$$

В момент времени t_2 герои прошли мимо друг друга и сумма пройденных ими путей равна сумме расстояния между домами и расстояния между героями.

$$v_1 t_2 + v_2 (t_2 - t_0) = l + s_2$$

Вычтем из второго выражения первое

$$v_1 (t_2 - t_1) + v_2 (t_2 - t_1) = s_1 + s_2$$

$$v_2 = \frac{s_1 + s_2}{t_2 - t_1} - v_1 = \frac{140}{20} - 2 = 5$$

Ответ: 5 м/с

Задача 6. (2,5 балла) Ёжик и Медвежонок решили сварить сироп. Для этого они взяли 1 кг сахара и 1 л воды. Сколько воды испарилось и выкипело при приготовлении сиропа, если плотность сахара $\rho_1 = 1.6$ кг/л, плотность воды $\rho_2 = 1$ кг/л, плотность сахарного сиропа $\rho = 1,3$ кг/л. (ответ дайте в г)

Объем сиропа $V = V_1 + V_2$. V_1 — объем сахара, V_2 — объем воды в сиропе. Объем сиропа

$$V = \frac{m_1 + m_2}{\rho} = \frac{m_1 + m_2}{\rho} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}$$

$$\frac{m_1}{\rho} + \frac{m_2}{\rho} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}$$

$$m_2 \frac{\rho - \rho_2}{\rho \rho_2} = m_1 \frac{\rho_1 - \rho}{\rho \rho_1}$$

$$m_2 = m_1 \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1} \frac{\rho_2}{\rho - \rho_2} = \frac{10}{16}$$

Тогда объем испарившейся воды

$$\Delta m = \rho_1 V_0 - m_2 = 1 - \frac{10}{16} = 0.375$$

Ответ: 375 г

Задача 7. (2,5 балла) Туман очень любил, когда Ёжик ходил в гости к Медвежонку и подгонял его, сообщая ему дополнительную скорость. Но, когда Ёжик возвращался домой от Медвежонка, то туман замедлял Ёжика на такую же величину скорости. Скорость Ёжика относительно тумана всегда была одна и та же.

Однажды Ёжик пошел к Медвежонку в гости, взяв с собой яблоко. Но в какой-то момент яблоко выпало. Дойдя до дома Медвежонка Ёжик обнаружил пропажу. Ёжик пошел обратно и через 20 минут нашел свое яблоко. Сколько времени прошло между моментом когда яблоко выпало и моментом когда Ёжик обнаружил пропажу? Туман все это время двигал яблоко со скоростью, которую добавлял Ёжику. (ответ выразите в минутах)

Пусть t_1 — время, за которое Ёжик дошел до дома Медвежонка после того, как яблоко выпало, $t_2 = 20$ мин — время пути обратно до яблока, v_0 — скорость тумана, v — скорость Ёжика относительно тумана.

За время, пока Ёжик ходил туда и обратно, яблоко переместилось на расстояние $x = v_0(t_1 + t_2)$ относительно точки падения. В этой точке Ёжик снова встретится с яблоком. Ёжик начал путь обратно от дома Медвежонка. Положение дома Медвежонка относительно места падения яблока можно определить как $(v + v_0)t_1$. Тогда положение Ёжика относительно точки падения яблока при движении обратно можно описать $(v + v_0)t_1 - (v - v_0)t$. В момент встречи яблока и Ёжика их положение одинаково, следовательно

$$v_0(t_1 + t_2) = (v + v_0)t_1 - (v - v_0)t_2$$

$$v_0(t_1 + t_2) = v_0(t_1 + t_2) + v(t_1 - t_2)$$

$$0 = v(t_1 - t_2)$$

$$t_1 = t_2$$

Ответ: 20 минут

Задача 8. (3,5 балла) Ёжик и Медвежонок захотели попить чай, но увлеклись и провели научный эксперимент. Они налили в чайник $V = 2$ л холодной воды и поставили его на плиту. Через 30 минут вода закипела. Медвежонок долил в чайник еще 2 л холодной воды. Ёжик с Медвежоном дождались, когда вода снова закипела (на это потребовалось $t_2 = 20$ минут), и выключили плиту. После этого они дождались, когда плита полностью остынет и смогли определить массу воды, которая испарилась из чайника после выключения плиты. Какой результат в граммах они получили? Удельная теплоёмкость воды $c = 4.2$ кДж/(кг°C), удельная теплота парообразования $L = 2.3 \cdot 10^3$ кДж/кг, плотность воды $\rho = 1$ кг/л. Потерями тепла в окружающую среду пренебречь. Начальная температура воды 8°C.

Мощность плитки можно найти из второго нагрева воды, так как плитка уже разогрета (при этом нагревается только вторая порция воды)

$$P = \frac{cm_2\Delta T}{t_2} = \frac{c\rho V\Delta T}{t_2}$$

При нагревании первой порции воды, часть времени нагревалась плитка и она запасла теплоту. Для нагрева $V = 2$ л воды необходимо время t_2 . Значит в течение времени $t_1 - t_2$ плитка нагревалась и запасла теплоту

$$Q = P(t_1 - t_2) = c\rho V\Delta T \frac{t_1 - t_2}{t_2}$$

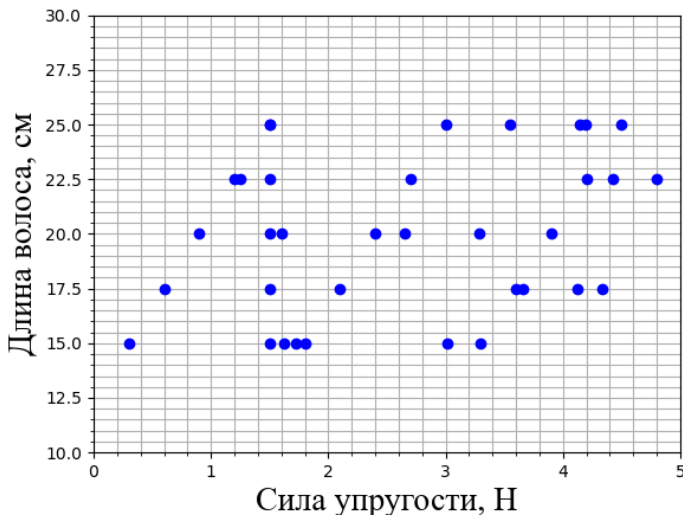
После выключения плитки эта теплота передастся воде и масса испарившейся воды

$$m = \frac{Q}{L} = \frac{c\rho V\Delta T}{L} \frac{t_1 - t_2}{t_2}$$

$$m = \frac{4.2 \cdot 2 \cdot 92 \cdot 10}{2.3 \cdot 10^3 \cdot 20} = 0.168$$

Ответ: 168 г

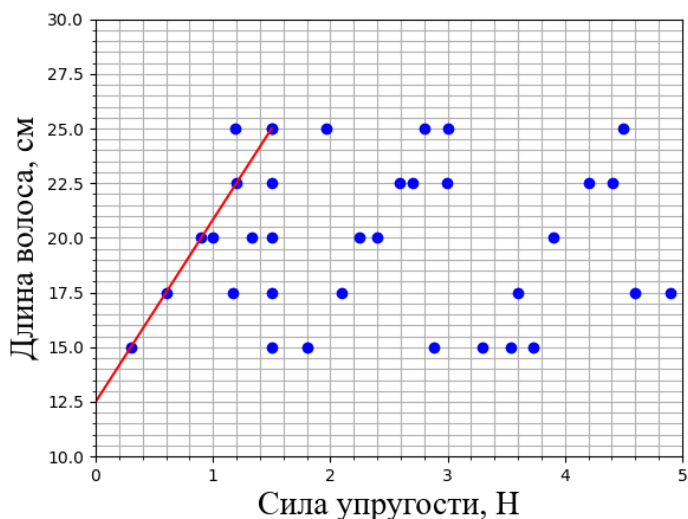
Задача 9. (3,0 балла) Однажды Ёжик нашел в тумане волос (скорее всего Лошадки) и решил исследовать его на упругость. Он измерял длину волоса и силу упругости, которая возникает в волосе при данной длине. Все результаты он представил в виде графика. Но, когда Ёжик отвлекся, Медвежонок добавил на этот график точек. Найдите результаты измерений, проведенные Ёжиком и определите коэффициент жесткости волоса, считая, что выполняется закон Гука. (ответ выразите в Н/м)



Так как волос имеет начальную длину, то закон Гука нужно использовать в виде

$$F = k(l - l_0)$$

При анализе графика видно, что условиям прямолинейности и ненулевой длины при нулевой силе упругости соответствует набор точек, через которые на графике проведена прямая



Начальная длина $l_0 \approx 12.5$ см. Выберем точку $l \approx 15$ см и соответственно силу $F \approx 0.3$ Н.

$$k = \frac{F}{l - l_0} = \frac{0.3}{0.15 - 0.125} = 12$$

Ответ: 12 ± 0.5 Н/м

9 класс

Задача 1. (2,0 балла)

Колесо имеет 6 спиц, расположенных на равном расстоянии друг от друга (см. рис.). Колесо вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с постоянной частотой f об/мин.

Какова должна быть минимальная скорость стрелы длиной ℓ см, которой стреляет в колесо Робин Гуд, чтобы она прошла сквозь колесо, не столкнувшись со спицами?

Ответ представьте в м/с.

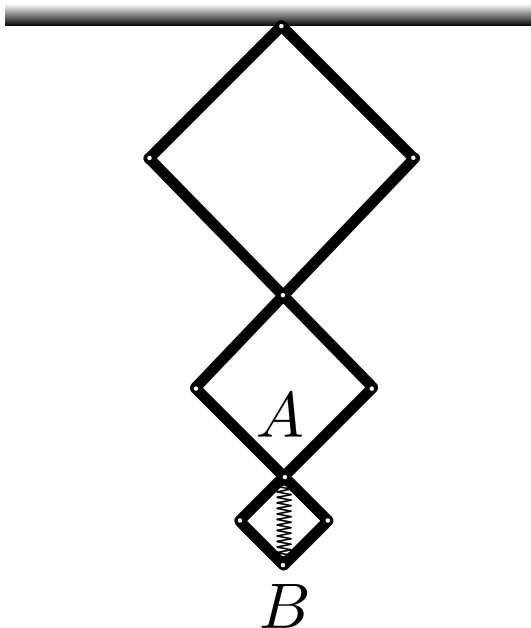


ОТВЕТ: $v_{min} = \frac{\ell \cdot f}{1000}$

Задача 2. (1,0 балл)

У Димы есть комплект жестких стержней: по паре стержней длиной ℓ и 5ℓ и еще четыре стержня длиной 3ℓ . Из болтов и стержней он собрал конструкцию, изображенную на рисунке. Между точками A и B Дмитрий натянул пружину. Такая конструкция позволяет сделать более чувствительный безмен с большим растяжением пружины при подвесе какого-либо груза, чем в случае одной секции.

Чему будет равно растяжение пружины δx , если отношение силы, приложенной к нижней точке конструкции, к жесткости пружины равно κ ?



ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

$$\delta x = 3\kappa, \delta x = 5\kappa, \delta x = 6\kappa, \delta x = 8\kappa, \delta x = 9\kappa$$

Задача 3. (1,0 балл)

Бэтмобиль приближается к перекрестку со скоростью v . В некоторый момент на светофоре загорается желтый сигнал, который горит в течении времени t . После того, как Бэтмен увидит желтый сигнал на светофоре, ему нужно время τ , чтобы среагировать, после чего он начинает тормозить с постоянным замедлением a .

На каком минимальном расстоянии от начала перекрестка должен находиться бэтмобиль в момент включения желтого сигнала светофора, чтобы успеть остановиться?

**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

$$S_{\min} = vt - \frac{a(t-\tau)^2}{2}$$

$$S_{\min} = v(t - \tau) - \frac{a(t-\tau)^2}{2}$$

$$S_{\min} = v(t + \tau) - \frac{a(t+\tau)^2}{2}$$

$$S_{\min} = v(t - \tau) - \frac{at^2}{2}$$

$$S_{\min} = v(t + \tau) - \frac{at^2}{2}$$

Задача 4. (1,0 балл)

Железнодорожный состав состоящий из 10 одинаковых вагонов движется по прямому горизонтальному пути. Сила тяги локомотива, прицепленного к первому вагону имеет постоянное значение.

Если обозначить $T_{2,3}$ силу натяжения сцепки между вторым и третьим вагонами, а $T_{6,7}$ - силу натяжения между шестым и седьмым вагонами, то каково будет их отношение $\frac{T_{2,3}}{T_{6,7}}$?

Наличием любых сил сопротивления движению можно пренебречь.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

2

3

4

3/2

5/2

Задача 5. (2,0 балла)

Два марафонца участвуют в забеге, в котором они пробегают путь $S = 21$ км в одну сторону и затем возвращаются к старту той же дорогой. Они стартовали одновременно. Первый из них движется с постоянной скоростью $v_1 = 10$ км/ч. Считая, что другой бежит с постоянной скоростью, определите ее значение, если известно, что они встретились через $t = 1,5$ ч, отсчитываемые от начала забега.

Ответ запишите в км/ч.

ОТВЕТ: 18 км/ч

Задача 6. (2,5 балла)

Меткий лучник Соколиный Глаз, выпустив три стрелы, пробил три отверстия в стенке большой, вертикально стоящей бочки с водой. Отверстия находятся на одной вертикали на равном расстоянии друг от друга. Струи воды, вытекающие из самого верхнего и нижнего отверстия падают на землю в одной точке, а расстояние по горизонтали на которое бьет струя из центрального отверстия равно S см.

Каков уровень воды в бочке? (Ответ приведите в сантиметрах)

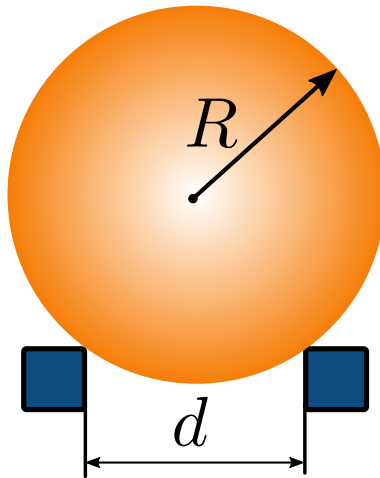
ОТВЕТ: $H = S$

Задача 7. (3,5 балла)

Колобок радиусом R , убежав от Дедушки и Бабушки, катится равномерно, не скользя по двум горизонтальным параллельным рельсам. Расстояние между внутренними краями рельс равно $d = 1,6R$, а скорость нижней точки Колобка относительно Земли $V = 5$ см/с.

Какой путь пройдет центр Колобка за $t = 40$ с?

Ответ дайте в сантиметрах.



ОТВЕТ: $S = 300 \pm 5$ см

Задача 8. (3,5 балла)

Павел нашёл в лаборантской источник постоянного напряжения и два одинаковых вольтметра. Вольтметр, замкнутый коротко на источник, показывает значение $U_0 = 1,8$ В. Когда Паша соединил вольтметры последовательно и подключил их к источнику, каждый из них показал значение $U_1 = 1,0$ В.

Не разобравшись с показаниями приборов, Павел решил приобрести идеальный вольтметр взамен этих двух. Какое значение напряжения будет им показано при замыкании на источник?

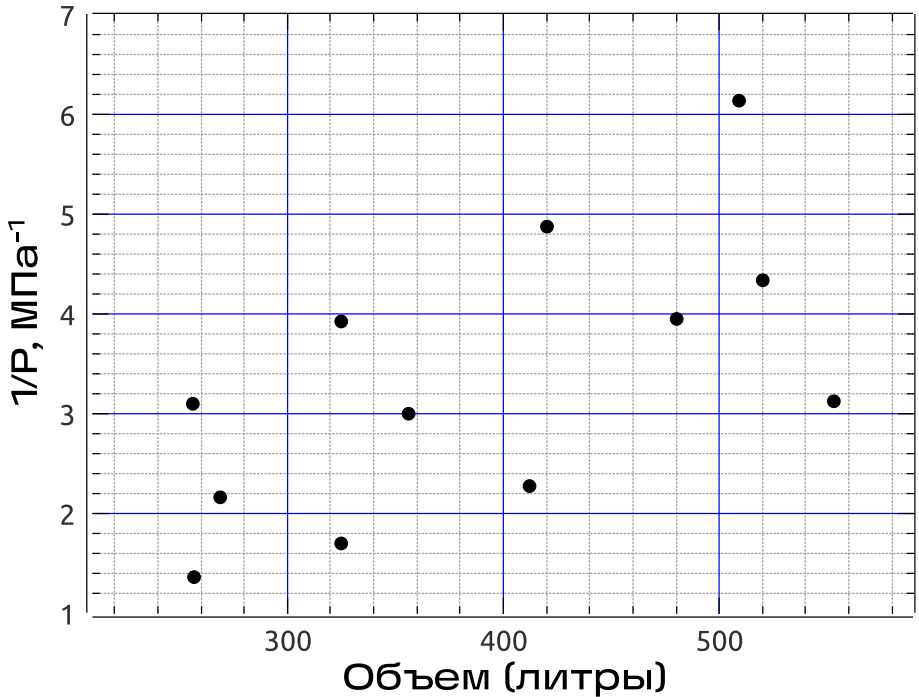
ОТВЕТ: $\frac{U_0 U_1}{3U_1 - U_0}$.

Диапазон значений: $U_0/2 < U_1 \leq 0.6U_0$. Напряжения должны быть в пределах 1 – 10 В.

Задача 9. (3,5 балла)

Юный химик Митрофан получил в проведенной им химической реакции $m = 640$ граммов некоторого неизвестного газа. Заполнив им большой воздушный шар, он провел измерения зависимости давления газа от его объема. Известно, что измерения производились при температурах $t_1 = -23^\circ\text{C}$, $t_2 = 97^\circ\text{C}$ и $t_3 = 277^\circ\text{C}$, но Митрофан забыл записать какие точки на графике соответствуют этим температурам.

С каким газом имел дело Митрофан?



ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

метан

хлор водород кислород гелий

10 класс

Задача 1. (2,0 балла)

Колесо имеет 6 спиц, расположенных на равном расстоянии друг от друга (см. рис.). Колесо вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с постоянной частотой f об/мин.

Какова должна быть минимальная скорость стрелы длиной ℓ см, которой стреляет в колесо Робин Гуд, чтобы она прошла сквозь колесо, не столкнувшись со спицами?

Ответ представьте в м/с.



$$\text{ОТВЕТ: } v_{\min} = \frac{\ell \cdot f}{1000}$$

$$\ell = 50, 60, 70$$

$$f = 250, 300, 400$$

Задача 2. (2,0 балла)

Два марафонца участвуют в забеге, в котором они пробегают путь $S = 21$ км в одну сторону и затем возвращаются к старту той же дорогой. Они стартовали одновременно. Первый из них движется с постоянной скоростью $v_1 = 18$ км/ч. Считая, что другой бежит с постоянной скоростью, определите ее значение, если известно, что они встретились через $t = 1,5$ ч, отсчитываемые от начала забега.

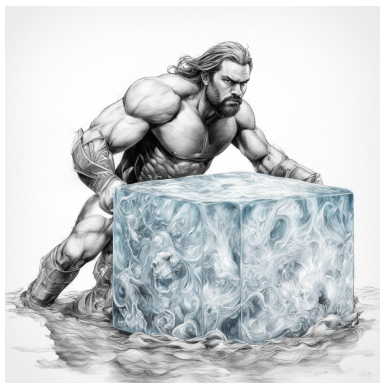
Ответ запишете в км/ч.

ОТВЕТ: 10 км/ч

Задача 3. (3,0 балла) В целях борьбы с обмелением Мертвого моря известный экологический активист Аквамен осуществляет грандиозный проект - он вырубает из льдов Антарктиды ледяные кубы размерами $L^3 = 10 \times 10 \times 10$ метров (в практически пресных водах Южного Океана они плавают, выступая над уровнем воды всего на $h_1 = 20$ см) и доставляет их в Мертвое море. Первые перевезенные кубы плавали, выступая из экстремально соленой воды на $h_2 = 260$ см.

В результате проекта Аквамена не только поднялся уровень моря, но и в два раза уменьшилась его соленость. На какую высоту на уровне воды возвышались последние брошенные в Мертвое море кубы?

Ответ приведите в сантиметрах.



ОТВЕТ: $h_3 = \frac{L(h_1 + h_2) - 2h_1h_2}{2L - (h_1 + h_2)}$

Задача 4. (1,0 балла)

Вячеслав нашёл в лаборантской источник постоянного напряжения и два одинаковых вольтметра. Вольтметр, замкнутый накоротко на источник, показывает значение $U_0 = 1,8$ В. Когда Слава соединил вольтметры последовательно и подключил их к источнику, каждый из них показал значение $U_1 = 1,0$ В.

Какое значение покажет каждый вольтметр, если подключить их к источнику, соединив параллельно?

ОТВЕТ: $\frac{U_0 U_1}{U_0 - U_1}$.

Диапазон значений: $U_0/2 < U_1 \leq 0.6U_0$. Напряжения должны быть в пределах 1 – 10 В.

Задача 5. (2,0 балла)

Меткий лучник Соколиный Глаз, выпустив три стрелы, пробил три отверстия в стенке большой, вертикально стоящей бочки с водой. Отверстия находятся на одной вертикали на равном расстоянии друг от друга. Струи воды, вытекающие из самого верхнего и нижнего отверстия падают на землю в одной точке, а расстояние по горизонтали на которое бьет струя из центрального отверстия равно S см.

Каков уровень воды в бочке? (Ответ приведите в сантиметрах)

ОТВЕТ: $H = S$

Задача 6. (2,0 балла)

Согласно руководству для начинающих цветоводов, минимальная комфортная для роз относительная влажность воздуха равна $\varphi = 75\%$. В цветочном магазине Николай купил розу в горшке и поставил цветок в комнате у своей сестры. Посмотрев на гигрометр, сестра Коли обнаружила, что влажность в комнате слишком низкая; чтобы розам стало комфортно, её нужно увеличить не меньше, чем на $\psi = 5\%$. Коля тут же прикинул, что необходимо испарить $m = 35$ г воды. Определите плотность насыщенного водяного пара при комнатной температуре, если известен объём помещения $V = 40$ м³.

ОТВЕТ: $\rho = \frac{m}{V\psi}$.

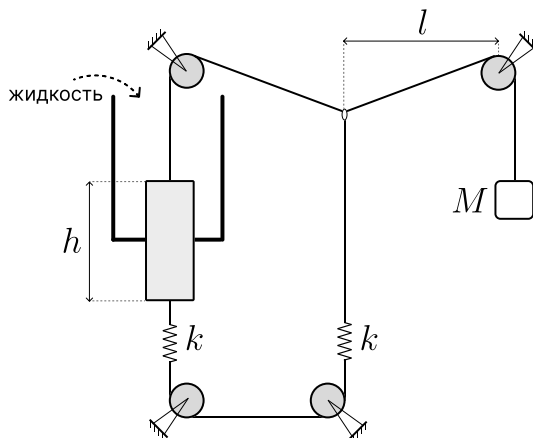
Задача 7. (3,0 балла)

На дне озера глубиной $H = 2$ м расположен источник света в виде круга радиусом неизвестного радиуса R . Оказалось, что область на поверхности воды, откуда виден этот источник, представляет собой круг радиуса $3R$. Определите R , если показатель преломления воды $n = 4/3$.

ОТВЕТ: $R = \frac{2H}{m-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$, где $m = 3$ — отношение радиусов.

Задача 8. (2,0 балла)

Лёгкий цилиндрический поплавок высотой h и площадью поперечного сечения S может перемещаться вертикально без трения, обеспечивая герметичность конструкции, изображённой на рисунке. Масса груза M , а жёсткости пружин одинаковы и равны $k = 8Mg/h$. Изначально конструкция находится в равновесии, а поплавок ровно посередине. Егор начал медленно наливать в сосуд неизвестную жидкость. Он с любопытством наблюдал, как двигался поплавок, всё время приходя в равновесное положение. Когда уровень жидкости в сосуде стал равен $2h$, равновесие нарушилось, поплавок стал ускоряться и выскочил из сосуда. Определите плотность жидкости. Расстояние l , отмеченное на рисунке, известно и равно $h\sqrt{3}/2$. Все блоки неподвижны, нити невесомы и нерастяжимы и могут скользить по блокам без трения. Размёрами блоков и соединительного «колечка» пренебречь.

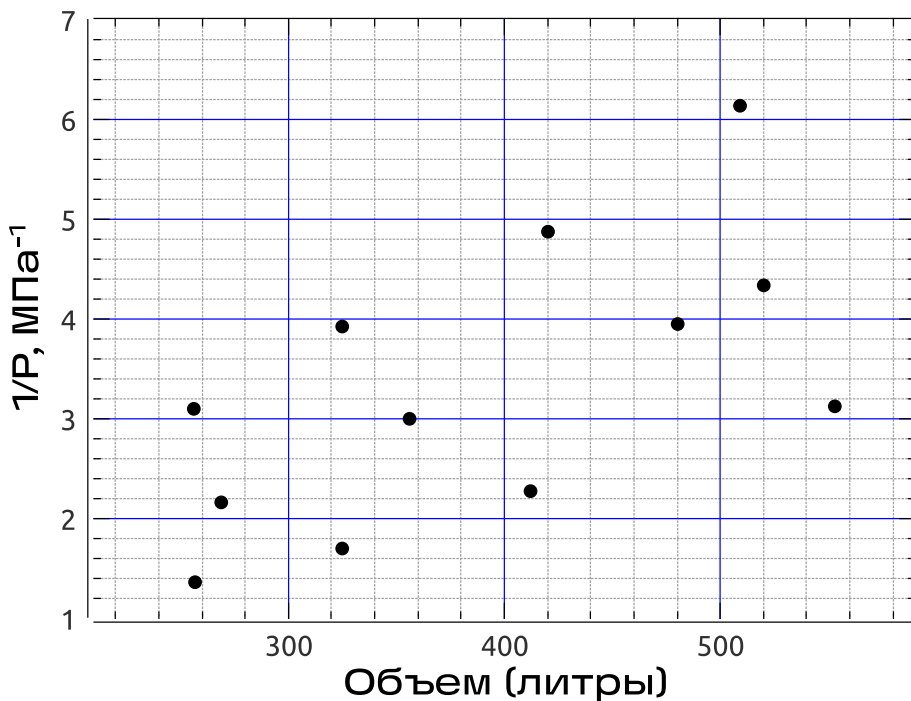


ОТВЕТ: $\rho = \frac{Mg}{2ghS}$.

Задача 9. (3,0 балла)

Аркадий, мечтающий о воздушных полетах, нашел оболочку от метеорологического шара-зонда и наполнил ее гелием. Измеряя зависимость обратного давления газа от объема он получил данные, которые представлены на графике. Известно, что измерения производились при температурах $t_1 = -23^\circ\text{C}$, $t_2 = 97^\circ\text{C}$ и $t_3 = 277^\circ\text{C}$, но Аркадий забыл какие точки на графике соответствуют этим температурам.

Определите с максимальной точностью сколько граммов гелия было у Аркадия?



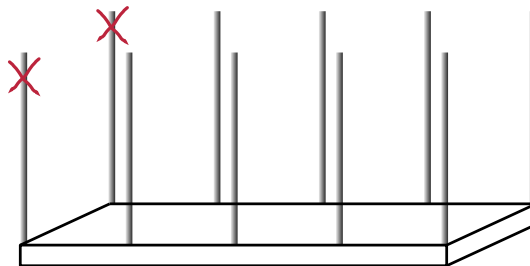
ОТВЕТ: $m = 160 \pm 5$ граммов

11 класс

Задача 1. (1,75 балла)

Анатолий был отправлен вести диверсионную деятельность в районе дислокации колумбийских повстанцев. В лесах он обнаружил систему тоннелей, имеющих участки с подземными реками. Над одной из таких рек повстанцами был перекинут подвесной мост, чья конструкция изображена на картинке ниже. Всего таких тросов 10 штук, по пять штук с каждого борта. Мост находится под пристальным наблюдением. Времени у Анатолия хватит только на уничтожение двух тросов, находящихся в начале моста (см. рис.). По маркировке он определил максимальную массу, которую может выдержать каждый трос - она равна M тонн.

Чему должна быть равна минимальная масса моста, чтобы диверсия имела бы смысл? Ответ дайте в тоннах.



ОТВЕТ: $\frac{32M}{7}$

Задача 2. (1,75 балла)

В преддверии новогодних каникул Галина решила посетить со своими друзьями местный холм, покрытый снегом. Галина решила скатиться с него.

Какой путь на своей ледянке она проделает?

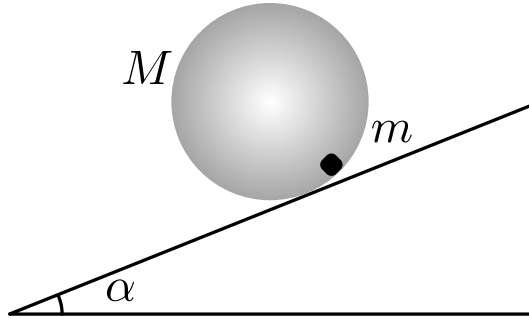
Горку можно представить в виде двух прямых наклонных участков, после которых идет равнина. Перепад высота при проезде первого участка составляет h_1 , у угол наклона равен α_1 . Перепад высот же при преодолении второго участка составляет h_2 , а угол наклона — α_2 (углы наклона отсчитываются от горизонта). Коэффициент трения на всех участках равен μ . Считать, что все параметры системы имеют такие значения, которые позволят Галине выехать на горизонтальный участок.

ОТВЕТ:
$$\frac{h_1}{\sin \alpha_1} + \frac{h_2}{\sin \alpha_2} + \frac{h_1}{\mu}(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha_1) + \frac{h_2}{\mu}(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha_2)$$

Задача 3. (2,25 балла)

Костя решил изучить различные режимы равновесия системы, состоящей из сферы с массой M , бруска массы m пренебрежимо малых размеров и наклонной плоскости, которая образует угол с горизонтом α . Он установил сферу на наклонную плоскость и, меняя угол наклона плоскости, начал устанавливать брусок на внутреннюю стенку сферы так, чтобы вся система каждый раз находилась бы в равновесии. Трение между любыми контактирующими поверхностями настолько велико, что проскальзывание отсутствует.

При каком максимальном значении угла α может сохраняться равновесие? Ответ запишите в градусах.



ОТВЕТ: $\alpha = \arcsin\left(\frac{m}{M+m}\right)$

Задача 4. (2,25 балла)

Лена взяла стальное кольцо, конструкция которого позволяет плавно менять его радиус. Перпендикулярно плоскости кольца она включила однородное магнитное поле B . К кольцу она подключила идеальный амперметр. Меняя равномерно радиус кольца от $r_1 = R$ до $r_2 = 4R$ за время T , она измеряла силу тока в кольце.

Считая, что поперечное сечение кольца σ является постоянным, найдите отношение силы тока в кольце в конечный и начальный моменты времени $\frac{I(T)}{I(0)}$.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1

2

4

0,5

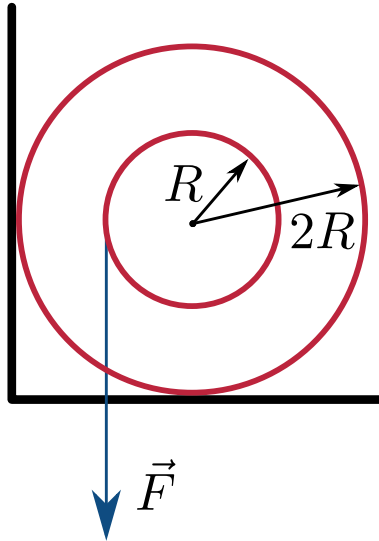
0,25

Задача 5. (2,5 балла)

У вертикальной стены лежит катушка радиуса $2R$, на внутренний цилиндр радиуса R которой намотана нить. За нить тянут вертикально вниз. При каком значении силы натяжения нити F катушка начнет вращаться?

Коэффициенты трения о пол и стенку одинаковы и равны μ , масса катушки m граммов. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2 .

Ответ представьте в миллиньютонх.



ОТВЕТ: $F = \frac{2\mu(1+\mu)}{1-2\mu-\mu^2}mg$

Задача 6. (2,5 балла)

Настя собрала систему из двух металлических шариков радиуса R и проводящей нити, соединяющей эти шары. Длина нити равна L . Всю систему поместили в однородное электрическое поле E так, чтобы ось системы была бы параллельна силовым линиям поля. Насте известно максимально допустимое натяжение нити, его значение равно T .

Каково должно быть значение электрического поля, чтобы нить разорвалась?

Емкость нити считать пренебрежимо малой по сравнению с емкостями шаров. Величину L считать много большей, чем R . Полем, создаваемым самими зарядами, можно пренебречь.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

$$\sqrt{\frac{T}{2\pi\varepsilon_0 RL}},$$

$$\sqrt{\frac{2T}{\pi\varepsilon_0 RL}},$$

$$\sqrt{\frac{8T}{\pi\varepsilon_0 RL}},$$

$$\sqrt{\frac{T}{8\pi\varepsilon_0 RL}},$$

$$\sqrt{\frac{T}{\pi\varepsilon_0 RL}}$$

Задача 7. (1,75 балла)

Оксана решила бросить очень маленький шарик массы m на пластины плоского конденсатора, которое расположены в горизонтальной плоскости. Разность потенциалов между пластинами конденсатора равна U , а расстояние — d . После броска она увидела, что шарик начал подниматься вверх. Успев засечь время подъема t , она сообразила, что может при помощи этих данных определить отношение полученного шариком заряда к его массе. Чему оно равно?

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

$$\frac{d(2d + gt^2)}{Ut^2},$$

$$\frac{d(4d + gt^2)}{Ut^2},$$

$$\frac{d(2d + gt^2)}{2Ut^2},$$

$$\frac{d(d + gt^2)}{2Ut^2},$$

$$\frac{d(d + gt^2)}{Ut^2}$$

Задача 8. (2,25 балла)

Экипаж космического корабля «**Tsingtau**» обнаружил в глубинах Галактики кратную звездную систему состоящую из трех звезд различной массы: $m_1 = xM$, $m_2 = yM$ и $m_3 = zM$, где M - масса Солнца. Звезды образуют равносторонний треугольник со стороной $L = N$ а.е., в котором их взаимное расположение остается неизменным.

Каков период обращения этой системы? Ответ дайте в земных сутках.

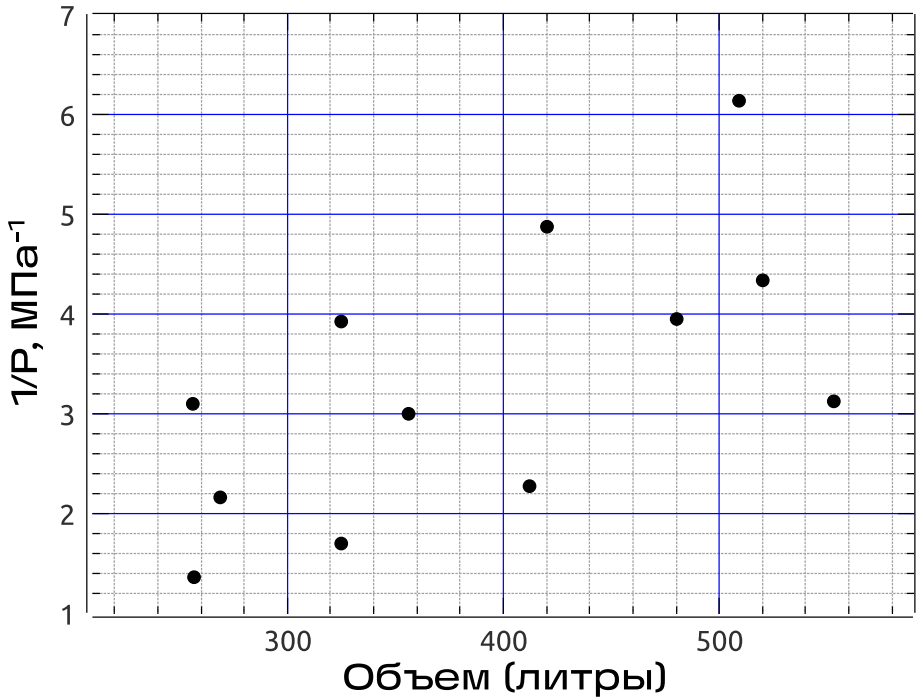
Астрономическая единица (а.е.) — единица измерения расстояний в астрономии, примерно равная среднему расстоянию от Земли до Солнца.

$$\text{ОТВЕТ: } T = 365.25 \cdot \sqrt{\frac{N^3}{x + y + z}}$$

Задача 9. (3,0 балла)

Казимир, увлекающийся историей воздухоплавания, где-то раздобыл оболочку от метеорологического шара-зонда и наполнил ее водородом. Измеряя зависимость обратного давления газа от объема он получил данные, которые представлены на графике. Известно, что измерения производились при температурах $t_1 = -23^\circ\text{C}$, $t_2 = 97^\circ\text{C}$ и $t_3 = 277^\circ\text{C}$, но Казимир забыл какие точки на графике соответствуют этим температурам.

Определите с максимальной точностью сколько граммов водорода было у Казимира?



ОТВЕТ: $m = 80 \pm 5$ граммов

Второй тур отборочного этапа

7 класс

Задача 1. (1,5 балла) К телу приложены три силы. Все силы направлены вдоль одной прямой. Максимальная равнодействующая этих сил равна f_1 Н, а минимальная равнодействующая по величине f_2 Н. Чему равна самая большая из приложенных сил?

(Ответ дайте в Н с точностью до целых.)

Параметры

$$f_1 = [10, 12, 7] \text{ Н}$$

$$f_2 = [8, 8, 1] \text{ Н}$$

Обозначим три силы как F_1, F_2, F_3 , положим $F_1 > F_2 > F_3$. Составим уравнения для определения равнодействующей, исходя из условий.

$$F_1 + F_2 + F_3 = f_1$$

$$F_1 - F_2 - F_3 = f_2$$

Сложим уравнения друг с другом.

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_1 - F_2 - F_3 = 2F_1 = f_1 + f_2$$

$$F_1 = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Ответ: $[9, 10, 4]$ Н

Задача 2. (1,5 балла) В открытый сосуд налили одну за другой три несмешивающихся жидкости (в порядке убывания плотности, первой наливали жидкость с наибольшей плотностью). Плотность третьей жидкости в k раз меньше плотности ртути, плотность второй жидкости в n раз меньше плотности ртути. Первой жидкостью (с наибольшей плотностью) была ртуть. Высота слоя каждой жидкости l см. Атмосферное давление 75 сантиметров ртутного столба. Определите гидростатическое давление жидкостей на глубине $1.5l$.

(Ответ дайте в сантиметрах ртутного столба с точностью до целых.)

Параметры

$$k = [2, 5, 3]$$

$$n = [1, 2, 2]$$

$$l = [10, 20, 60] \text{ см}$$

Гидростатическое давление — это давление покоящихся жидкостей. Значит атмосферное давление учитывать не нужно. Давление в сантиметрах ртутного столба равно давлению столба ртути $p_0 = \rho_0 g h$. Следовательно, давление в сантиметрах ртутного столба равно h . Если плотность жидкости в m раз меньше плотности ртути, то и давление она будет создавать в m раз меньше, чем ртуть $\left(\frac{h}{m}\right)$. Давление на глубине от поверхности определяется расстоянием от поверхности до этой точки (или толщиной слоя жидкости). Гидростатическое давление верхней жидкости равно $h_1 = \frac{l}{k}$, гидростатическое давление средней жидкости $h_2 = \frac{0.5l}{n}$. Нижняя жидкость не будет давать вклад. Тогда

$$p = p_1 + p_2 = l \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2n} \right)$$

Ответ: [10, 9, 35] см

Задача 3. (1,5 балла) На уроке физкультуры мальчики усердно бегали и каждый из них потерял в весе F Н. Сразу после урока физкультуры мальчики выпили по V литров жидкости плотностью ρ кг/м³. На сколько вес мальчиков после урока физкультуры отличается от веса мальчиков до урока физкультуры, если количество мальчиков N ? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с².

(Ответ дайте в Н с точностью до целых.)

Параметры

$$F = [10, 20, 30] \text{ Н}$$

$$V = [0.5, 0.75, 1] \text{ л}$$

$$\rho = [1000, 1200, 1300] \text{ кг/м}^3$$

$$N = [5, 3, 4]$$

Вес одного мальчика до урока $P_0 = m_0g$, после урока $P = m_0g + mg - F = m_0g + \rho Vg - F$. Тогда изменение веса N мальчиков

$$\Delta P = N(P - P_0) = N(\rho Vg - F)$$

Ответ: $[-25, -33, -68]$ Н

Задача 4. (1,5 балла) Васисуалий сделал снеговика, состоящего из трех снежных шаров. Вес получившегося снеговика равен P Н. Пересвет сделал копию снеговика Васисуалия, но высота его снеговика в k раз больше. Какова масса снеговика Пересвета? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2 .

(Ответ дайте в кг с точностью до целых.)

Параметры

$$P = [200, 100, 50]$$

$$k = [2, 3, 4]$$

Масса снеговика Васисуалия $m_0 = \frac{P}{g}$. Так как высота Пересвета в k раз больше, то и радиус каждого шара снеговика будет в k раз больше. Объем шара $\frac{4}{3}\pi r^3$, значит объем каждого шара будет в k^3 раз больше. Считаем, что снег имеет одинаковую плотность в обоих случаях, тогда масса $m = \rho V = \rho (V_1 + V_2 + V_3)$. Сравним массы снеговиков. Так как объем каждого шара снеговика Пересвета в k^3 раз больше, то общий объем будет в k^3 раз больше. Следовательно, масса снеговика Пересвета будет в k^3 раз больше $M = k^3 m_0 = k^3 \frac{P}{g}$

Ответы: 160 кг, 270 кг, 320 кг

Задача 5. (2,5 балла) Две детали из разных материалов имеют равные объемы. Плотность вещества первой детали равна ρ , плотность вещества второй детали в k раз больше. Найдите массу первой детали, если разность масс Δm г. (Ответ дайте в г)

Параметры

$$\rho = [3, 4, 5] \text{ г/см}^3$$

$$k = [2, 3, 5]$$

$$\Delta m = [100, 200, 300] \text{ г}$$

Объем детали $V = \frac{m}{\rho}$. Тогда $V = \frac{m_1}{\rho} = \frac{m_2}{k\rho}$. Отсюда $m_2 = km_1$.

Разность масс

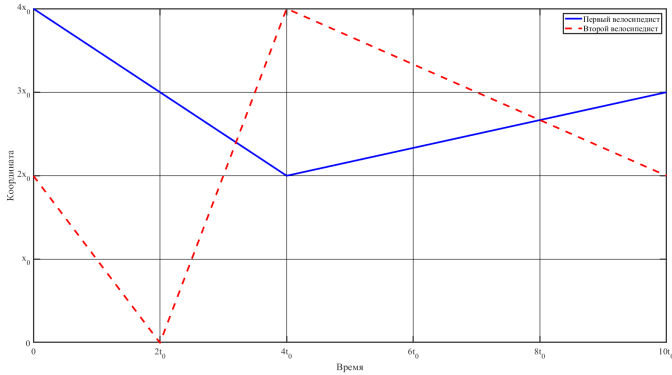
$$\Delta m = m_2 - m_1 = km_1 - m_1 = (k - 1) m_1$$

Тогда

$$m_1 = \frac{\Delta m}{k - 1}$$

Ответ: [100, 100, 75] г

Задача 6. (2,5 балла) Два велосипедиста едут по одной прямой дороге. На графике приведены зависимости координат от времени этих велосипедистов. Время приведено в минутах, координаты — в километрах. Определите среднюю путевую скорость первого велосипедиста за все время движения в системе отсчета, привязанной ко второму велосипедисту.



(Ответ дайте в км/мин с точностью до десятых.)

Параметры

$$t_0 = [1, 2, 3, 4, 5]$$

$$x_0 = [1, 2, 3, 4, 5]$$

Можно разбить график на участки, на которых скорости движения велосипедистов постоянны. Получим три участка $0-2t_0$, $2t_0-4t_0$, $4t_0-10t_0$. На каждом участке можно найти путь как модуль разности перемещений первого велосипедиста и второго $|\Delta x_1 - \Delta x_2|$. Тогда путь первого велосипедиста относительно второго

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = |-x_0 - (-2x_0)| + |-x_0 - 4x_0| + |x_0 - (2x_0)| = 9x_0$$

$$\text{Следовательно искомая скорость } v = \frac{9x_0}{10t_0} = 0.9 \frac{x_0}{t_0}$$

Ответ: 0.9 км/мин

Задача 7. (2,5 балла) Васисуалий провел эксперимент. Он положил цепочку на стол, так, чтобы она немного свисала. Он заметил, что цепочка начинает скользить, если длина свисающей части в k раз меньше длины всей цепочки. Определите отношение максимального значения силы трения покоя к силе давления цепочки на стол в момент начала скольжения.

(Ответ дайте до сотых.)

Параметры

$k = [2, 5, 6]$ и

Максимальная сила трения покоя будет равна силе тяжести свисающей части цепочки $F = m_1 g$. Масса свисающей части цепочки определяется длиной свисающей части. Так длина свисающей части в k раз меньше, то и масса свисающей части будет в k раз меньше массы всей цепочки $m_1 = \frac{m}{k}$. Сила давления той части цепочки, которая будет в этот момент на столе равна весу той части цепочки, которая находится на столе $P = (m - m_1) g = \left(m - \frac{m}{k}\right) g = m \frac{k-1}{k} g$. Тогда

$$\frac{F}{P} = \frac{mg}{k} / \left(mg \frac{k-1}{k} \right) = \frac{1}{k-1}$$

Ответ: [1.00, 0.25, 0.20]

Задача 8. (3,5 балла) Два катера одновременно отправились из пункта А в разные стороны (первый — против течения реки, а второй — по течению). Через некоторое время t_0 им сообщили о надвигающейся буре и они срочно повернули обратно. Первый катер вернулся в пункт А через время $\frac{t_0}{k}$ после разворота, а второй катер через время kt_0 . Найдите отношение скоростей второго и первого катеров относительно реки.

Параметры: $k = [3, 5, 7]$

Первый катер прошел одинаковый путь по течению и против течения. Следовательно

$$s_1 = (v_1 - v_0) t_0 = (v_1 + v_0) \frac{t_0}{k}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} v_1 - v_0 &= \frac{v_1}{k} + \frac{v_0}{k} \\ v_1 \frac{k-1}{k} &= v_0 \frac{k+1}{k} \\ v_1 &= v_0 \frac{k+1}{k-1} \end{aligned}$$

Аналогично для второго катера

$$s_2 = (v_2 + v_0) t_0 = (v_2 - v_0) kt_0$$

Отсюда

$$\begin{aligned} v_2 + v_0 &= kv_2 - kv_0 \\ v_2 (k-1) &= v_0 (k+1) \\ v_2 &= v_0 \frac{k+1}{k-1} \end{aligned}$$

Найдем отношение скоростей

$$\frac{v_2}{v_1} = v_0 \frac{k+1}{k-1} / \left(v_0 \frac{k+1}{k-1} \right) = 1$$

Ответ: 1

Задача 9. (3,0 балла) Однажды Николаю провести какое-нибудь исследование. Он взял сосуд с постоянным поперечным сечением и наклеил на него распечатанную линейку. Налил в нее некоторое количество воды.

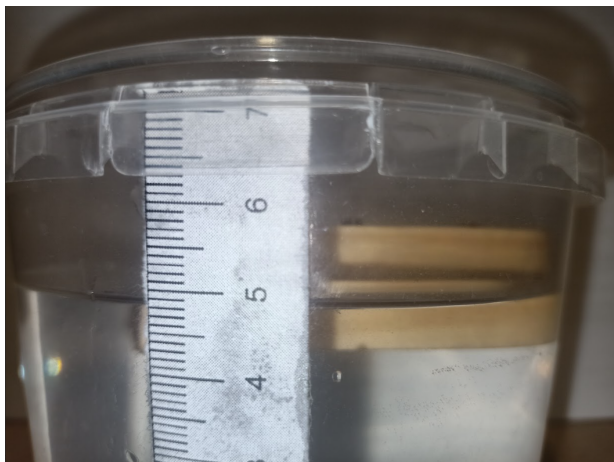


Сосуд с водой и линейкой



Сосуд с водой и линейкой (приближенный вариант)

Затем Николай взял брусок и поместил его в сосуд с водой.



Брусок в сосуде с водой

После этого Николай установил на бруске металлическую конструкцию и поместил получившийся "шедевр" в сосуд с водой. Оказалось, что шедевр плавает так, что уровень воды совпадает с верхним краем "шедевра".



"Шедевр" в сосуде с водой

И в конце своих изысканий Николай снял металлическую конструкцию и поместил все металлические части в сосуд с водой.



Детали металлической конструкции в сосуде с водой



Детали металлической конструкции в сосуде с водой (приближение)

Проведя эти исследования, Николай задумался о том, какую величину он может определить. В итоге его выбор пал на среднюю плотность металлической конструкции. Определите эту плотность. Плотность воды примите равной $\rho = 1 \text{ г/см}^3$

(Ответ дайте в г/см^3 с точностью до десятых.)

Введем обозначения:

V_0 — объем воды в сосуде;

V_1 — суммарный объем воды в сосуде и погруженной части бруска;

V_2 — суммарный объем воды в сосуде, бруска и металлической конструкции;

V_3 — суммарный объем воды в сосуде и металлической конструкции;

ρ — плотность воды

При погружении бруска сила Архимеда уравнивает силу тяжести, действующую на брусок

$$m_{\text{бруска}}g = \rho g V_{\text{погруженной части бруска}}$$

$$\rho_{\text{бруска}}gV_{\text{бруска}} = \rho g (V_1 - V_0)$$

При полном погружении бруска и металлической конструкции (при плавании) сила Архимеда уравнивает силу тяжести, действующую на металлическую конструкцию и брусок

$$m_{\text{бруска}}g + m_{\text{конструкции}}g = \rho g V_{\text{бруска}} + \rho g V_{\text{конструкции}}$$

$$\rho_{\text{бруска}}gV_{\text{бруска}} + \rho_{\text{конструкции}}gV_{\text{конструкции}} = \rho g (V_2 - V_0)$$

$$V_{\text{конструкции}} = V_3 - V_0$$

Собирая все воедино, получим

$$\rho g (V_1 - V_0) + \rho_{\text{конструкции}}g (V_3 - V_0) = \rho g (V_2 - V_0)$$

$$\rho_{\text{конструкции}} (V_3 - V_0) = \rho (V_2 - V_0) - \rho (V_1 - V_0)$$

$$\rho_{\text{конструкции}} (V_3 - V_0) = \rho (V_2 - V_1)$$

С учетом, что $V = Sh$, где S – площадь поперечного сечения сосуда

$$\rho_{\text{конструкции}} = \rho \frac{V_2 - V_1}{V_3 - V_0} = \rho \frac{h_2 - h_1}{h_3 - h_0}$$

$$\rho_{\text{конструкции}} = 1 \cdot \frac{5.2 - 4.9}{4.6 - 4.5} = 3.0$$

Ответ: $3.0 \pm 0.5 \text{ г/см}^3$

8 класс

Задача 1. (1,5 балла) В открытый сосуд налили одну за другой три несмешивающихся жидкости (в порядке убывания плотности, первой наливали жидкость с наибольшей плотностью). Плотность третьей жидкости в k раз меньше плотности ртути, плотность второй жидкости в n раз меньше плотности ртути. Первой жидкостью (с наибольшей плотностью) была ртуть. Высота слоя каждой жидкости l см. Атмосферное давление 75 сантиметров ртутного столба. Определите гидростатическое давление жидкостей на глубине $1.5l$.

(Ответ дайте в сантиметрах ртутного столба с точностью до целых.)

Параметры

$$k = [2, 5, 3]$$

$$n = [1, 2, 2]$$

$$l = [10, 20, 60] \text{ см}$$

Гидростатическое давление — это давление покоящихся жидкостей. Значит атмосферное давление учитывать не нужно. Давление в сантиметрах ртутного столба равно давлению столба ртути $p_0 = \rho_0 g h$. Следовательно, давление в сантиметрах ртутного столба равно h . Если плотность жидкости в m раз меньше плотности ртути, то и давление она будет создавать в m раз меньше, чем ртуть $\left(\frac{h}{m}\right)$. Давление на глубине от поверхности определяется расстоянием от поверхности до этой точки (или толщиной слоя жидкости). Гидростатическое давление верхней жидкости равно $h_1 = \frac{l}{k}$, гидростатическое давление средней жидкости $h_2 = \frac{0.5l}{n}$. Нижняя жидкость не будет давать вклад. Тогда

$$p = p_1 + p_2 = l \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2n} \right)$$

Ответ: $[10, 9, 35]$ см

Задача 2. (1,5 балла) В сосуде находится вода, объем которой равен V_1 см³. В сосуд опустили на нити камушек (не касаясь камушком ни дна, ни стенок сосуда). Часть воды при этом вылилась из сосуда. после того как камушек вынули, в сосуде осталась вода объемом V_2 см³. Чему равна минимально возможная плотность камушка, если его объем равен V_0 см³. Плотность воды равна $\rho = 1$ г/см³.

(Ответ дайте в г/см³ с точностью до десятых.)

Параметры

$V_0 = [50,40,30]$ см³ $V_1 = [50,100,45]$ см³ $V_2 = [20,80,30]$ см³

При погружении камушка из сосуда вытекает объем жидкости $\Delta V = V_1 - V_2$. Это равно максимальному объему погруженной части камушка. Значит камушек будет плавать в воде. Тогда по условию плавания

$$\rho_0 g V_0 = \rho g (V_1 - V_2)$$

$$\rho_0 = \rho \frac{V_1 - V_2}{V_0}$$

Ответ: $[0.6, 0.5, 0.5]$ г/см³

Задача 3. (1,5 балла) Васисуалий сделал снеговика, состоящего из трех снежных шаров. Вес получившегося снеговика равен P Н. Пересвет сделал копию снеговика Васисуалия, но высота его снеговика в k раз больше. Какова масса снеговика Пересвета? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2 .

(Ответ дайте в кг с точностью до целых.)

Параметры

$$P = [200, 100, 50]$$

$$k = [2, 3, 4]$$

Масса снеговика Васисуалия $m_0 = \frac{P}{g}$. Так как высота Пересвета в k раз больше, то и радиус каждого шара снеговика будет в k раз больше. Объем шара $\frac{4}{3}\pi r^3$, значит объем каждого шара будет в k^3 раз больше. Считаем, что снег имеет одинаковую плотность в обоих случаях, тогда масса $m = \rho V = \rho(V_1 + V_2 + V_3)$. Сравним массы снеговиков. Так как объем каждого шара снеговика Пересвета в k^3 раз больше, то общий объем будет в k^3 раз больше. Следовательно, масса снеговика Пересвета будет в k^3 раз больше $M = k^3 m_0 = k^3 \frac{P}{g}$

Ответы: 160 кг, 270 кг, 320 кг

Задача 4. (1,5 балла) В сообщающихся сосудах цилиндрической формы находится жидкость плотностью ρ . Площадь поперечного сечения одного из сосудов в k раз больше площади поперечного сечения другого сосуда. В узкий сосуд наливают жидкость плотностью $k\rho$, которая образует столб высотой h_0 см. На сколько повысится уровень жидкости плотностью ρ в более широком сосуде? Принять, что жидкости не смешиваются и более плотная жидкость может находиться над менее плотной.

(Ответ дайте в см с точностью до десятых.)

Параметры

$$k = [4, 2, 3]$$

$$h_0 = [15, 18, 30] \text{ см}$$

Пусть в широком сосуде уровень первой жидкости (с плотностью ρ) поднимется на высоту H , а в узком сосуде уровень первой жидкости опустится на высоту h .

Давление столба второй жидкости (плотностью $k\rho$) должно уравниваться давлением столба первой жидкости высотой $h + H$.

$$k\rho gh_0 = \rho g(h + H)$$

$$kh_0 = (h + H)$$

Объем уменьшения первой жидкости в узком сосуде равен увеличению объема первой жидкости в широком сосуде

$$Sh = kSH$$

$$h = kH$$

Тогда

$$kh_0 = (kH + H) = (k + 1)H$$

$$H = \frac{k}{k + 1}h_0$$

Ответ: [12.0, 12.0, 22.5] см

Задача 5. (2,5 балла) Васисуалий составил одно тело из двух частей одинакового объема. Плотности этих частей относятся как $\frac{\rho_1}{\rho_2} = k$. Определите удельную теплоемкость c_2 (части с плотностью ρ_2), если $c_1 = 2500$ Дж/кг $^{\circ}$ С, а удельная теплоемкость составного тела $c = 3000$ Дж/кг $^{\circ}$ С

(Ответ дайте в Дж/кг $^{\circ}$ С.)

Параметры

$$k = [1, 2, 4]$$

Сообщим телу количество теплоты Q . Если рассматривать тело как единое целое, то

$$Q = cm\Delta t = c(\rho_1 + \rho_2) V \Delta t$$

С другой стороны можно рассмотреть части составного тела по отдельности

$$Q = c_1 m_1 \Delta t + c_2 m_2 \Delta t = (c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2) V \Delta t$$

Тогда

$$c(\rho_1 + \rho_2) V \Delta t = (c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2) V \Delta t$$

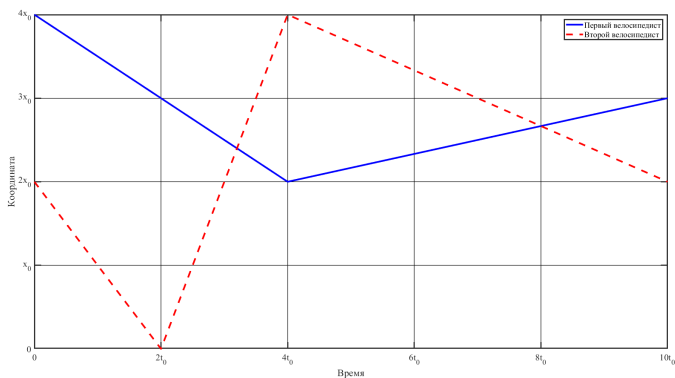
и

$$c(\rho_1 + \rho_2) = c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2$$

$$c_2 = c \frac{\rho_1}{\rho_2} + c - c_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} = c(k + 1) - kc_1$$

Ответ: [3500, 4000, 5000] Дж/кг $^{\circ}$ С

Задача 6. (2,5 балла) Два велосипедиста едут по одной прямой дороге. На графике приведены зависимости координат от времени этих велосипедистов. Время приведено в минутах, координаты — в километрах. Определите среднюю путевую скорость первого велосипедиста за все время движения в системе отсчета, привязанной ко второму велосипедисту.



(Ответ дайте в км/мин с точностью до десятых.)

Параметры

$$t_0 = [1, 2, 3, 4, 5] \quad x_0 = [1, 2, 3, 4, 5]$$

Можно разбить график на участки, на которых скорости движения велосипедистов постоянны. Получим три участка $0-2t_0$, $2t_0-4t_0$, $4t_0-10t_0$. На каждом участке можно найти путь как модуль разности перемещений первого велосипедиста и второго $|\Delta x_1 - \Delta x_2|$. Тогда путь первого велосипедиста относительно второго

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = |-x_0 - (-2x_0)| + |-x_0 - 4x_0| + |x_0 - (2x_0)| = 9x_0$$

$$\text{Следовательно искомая скорость } v = \frac{9x_0}{10t_0} = 0.9 \frac{x_0}{t_0}$$

Ответ: 0.9 км/мин

Задача 7. (2,5 балла) Два катера одновременно отправились из пункта А в разные стороны (первый — против течения реки, а второй — по течению). Через некоторое время t_0 им сообщили о надвигающейся буре и они срочно повернули обратно. Первый катер вернулся в пункт А через время $\frac{t_0}{k}$ после разворота, а второй катер через время kt_0 . Найдите отношение скоростей второго и первого катеров относительно реки.

Параметры: $k = [3, 5, 7]$

Первый катер прошел одинаковый путь по течению и против течения. Следовательно

$$s_1 = (v_1 - v_0) t_0 = (v_1 + v_0) \frac{t_0}{k}$$

Отсюда

$$v_1 - v_0 = \frac{v_1}{k} + \frac{v_0}{k}$$

$$v_1 \frac{k-1}{k} = v_0 \frac{k+1}{k}$$

$$v_1 = v_0 \frac{k+1}{k-1}$$

Аналогично для второго катера

$$s_2 = (v_2 + v_0) t_0 = (v_2 - v_0) kt_0$$

Отсюда

$$v_2 + v_0 = kv_2 - kv_0$$

$$v_2 (k-1) = v_0 (k+1)$$

$$v_2 = v_0 \frac{k+1}{k-1}$$

Найдем отношение скоростей

$$\frac{v_2}{v_1} = v_0 \frac{k+1}{k-1} / \left(v_0 \frac{k+1}{k-1} \right) = 1$$

Ответ: 1

Задача 8. (3,5 балла) Васисуалий решил проверить, утонет его монетка или нет. Для этого он взял цилиндрический стакан с площадью дна S и налил в него воды плотностью $\rho = 1$ кг/л. Высота воды в стакане h . Васисуалий аккуратно положил монетку на поверхность воды. Монетка утонула. Васисуалий остался доволен результатом. Но он и не заметил, что вода в стакане нагрелась. Определите количество теплоты, которое выделилось при падении монетки. Объем монетки $V_0 = 0.45$ см³, масса монетки $m = 6.45$ г.

(Ответ дайте в мДж с точностью до целых.)

Параметры

$$S = [15, 18, 20] \text{ см}^2$$

$$h = [5, 10, 15] \text{ см}$$

Рассмотрим систему "вода-монетка". Перед отпусканием монетки эта система имела потенциальную энергию, состоящую из потенциальной энергии монетки mgh и потенциальной энергии воды $\frac{\rho g S h^2}{2}$. Отсчет ведется от дна стакана. Центр тяжести воды считаем на середине высоты. Когда монетка утонет, ее потенциальная энергия станет равной нулю. Потенциальная энергия воды станет равной $\frac{\rho g S (h + \Delta h)^2}{2}$, где Δh обусловлена подъемом уровня воды, когда монетка утонула.

Монетка вытесняет объем воды $V_0 = S\Delta h$. Отсюда $\Delta h = \frac{V_0}{S}$. Разность потенциальных энергий определит количество теплоты

$$Q = mgh + \frac{\rho g S h^2}{2} - \frac{\rho g S (h + \Delta h)^2}{2}$$

$$Q = mgh - \rho g V_0 \left(h + \frac{1}{2} \frac{V_0}{S} \right)$$

Ответ: [3, 6, 9] мДж

Задача 9. (3,0 балла) Однажды Николаю провести какое-нибудь исследование. Он взял сосуд с постоянным поперечным сечением и наклеил на него распечатанную линейку. Налил в нее некоторое количество воды.

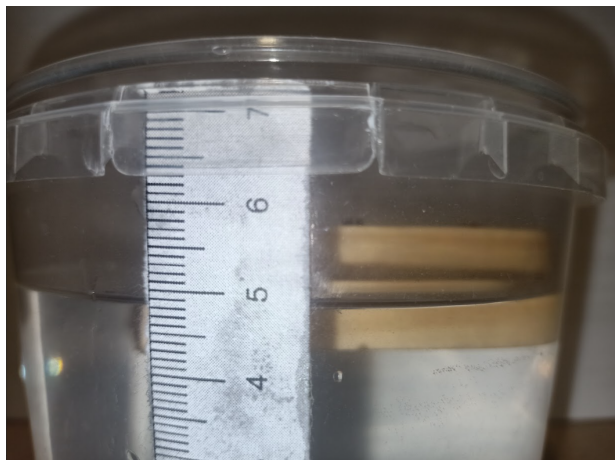


Сосуд с водой и линейкой



Сосуд с водой и линейкой (приближенный вариант)

Затем Николай взял брусок и поместил его в сосуд с водой.



Брусок в сосуде с водой

После этого Николай установил на бруске металлическую конструкцию и поместил получившийся "шедевр" в сосуд с водой. Оказалось, что шедевр плавает так, что уровень воды совпадает с верхним краем "шедевра".



"Шедевр" в сосуде с водой

И в конце своих изысканий Николай снял металлическую конструкцию и поместил все металлические части в сосуд с водой.



Детали металлической конструкции в сосуде с водой



Детали металлической конструкции в сосуде с водой (приближение)

Проведя эти исследования, Николай задумался о том, какую величину он может определить. В итоге его выбор пал на среднюю плотность металлической конструкции. Определите эту плотность. Плотность воды примите равной $\rho = 1 \text{ г/см}^3$

(Ответ дайте в г/см³ с точностью до десятых.)

Введем обозначения:

V_0 — объем воды в сосуде;

V_1 — суммарный объем воды в сосуде и погруженной части бруска;

V_2 — суммарный объем воды в сосуде, бруска и металлической конструкции;

V_3 — суммарный объем воды в сосуде и металлической конструкции;

ρ — плотность воды

При погружении бруска сила Архимеда уравнивает силу тяжести, действующую на брусок

$$m_{\text{бруска}}g = \rho g V_{\text{погруженной части бруска}}$$

$$\rho_{\text{бруска}}gV_{\text{бруска}} = \rho g (V_1 - V_0)$$

При полном погружении бруска и металлической конструкции (при плавании) сила Архимеда уравнивает силу тяжести, действующую на металлическую конструкцию и брусок

$$m_{\text{бруска}}g + m_{\text{конструкции}}g = \rho g V_{\text{бруска}} + \rho g V_{\text{конструкции}}$$

$$\rho_{\text{бруска}}gV_{\text{бруска}} + \rho_{\text{конструкции}}gV_{\text{конструкции}} = \rho g (V_2 - V_0)$$

$$V_{\text{конструкции}} = V_3 - V_0$$

Собирая все воедино, получим

$$\rho g (V_1 - V_0) + \rho_{\text{конструкции}}g (V_3 - V_0) = \rho g (V_2 - V_0)$$

$$\rho_{\text{конструкции}} (V_3 - V_0) = \rho (V_2 - V_0) - \rho (V_1 - V_0)$$

$$\rho_{\text{конструкции}} (V_3 - V_0) = \rho (V_2 - V_1)$$

С учетом, что $V = Sh$, где S – площадь поперечного сечения сосуда

$$\rho_{\text{конструкции}} = \rho \frac{V_2 - V_1}{V_3 - V_0} = \rho \frac{h_2 - h_1}{h_3 - h_0}$$

$$\rho_{\text{конструкции}} = 1 \cdot \frac{5.2 - 4.9}{4.6 - 4.5} = 3.0$$

Ответ: $3.0 \pm 0.5 \text{ г/см}^3$

9 класс

Задача 1. (2,5 балла)

На узкой горной дороге с одинаковыми скоростями 14 м/с навстречу едут два автомобиля. Из-за тумана оба водителя смогли заметить друг друга достаточно поздно, но предотвратили столкновение, одновременно затормозив и остановившись, как раз перед тем, как передние бамперы их машин соприкоснулись.

Участок дороги, на котором чуть было не произошла авария, прямолинейный, угол его наклона к горизонту равен $\alpha = 7^\circ$. Можно считать, что колеса не вращаются после нажатия тормоза, а коэффициент трения покрышек об асфальт равен $k = 0,5$.

Каким было расстояние между автомобилями в момент начала торможения?

Ответ представьте в метрах, с точностью до целой части.

Ускорение свободного падения считать равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

ОТВЕТ: $S = 42 \pm 2 \text{ м}$

Задача 2. (2,0 балла)

Друзья Серёжа и Анатолий живут в одном подъезде друг на другом. Серёжа живет на 7 этаже, а Анатолий на 8. Однажды в снежную погоду они решили развлечься. Каждый из них скатал снежок массой m . Они одновременно бросили по одной вертикали свои снежки (Серёжа вверх со скоростью $v_0 = 10$ м/с, а Анатолий вниз без начальной скорости). Снежки встретились и слиплись. На сколько градусов нагрелись снежки в результате удара?

Высота, с которой бросал снежок Серёжа — $h_1 = 20$ м, высота с которой бросал снежок Анатолий — $h_2 = 23$ м. Удельная теплоёмкость снега $c = 1.625 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ \text{C}}$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

(Ответ дайте в $10^{-3} \cdot ^\circ \text{C}$ с точностью до целых.)

При абсолютно неупругом ударе должны выполняться законы сохранения импульса

$$mv_1 - mv_2 = 2mv$$

и энергии (с учетом того, что высоту, на которой встретились снежки, принимаем за ноль потенциальной энергии).

$$E_1 + E_2 = E + Q$$

или

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{2mv^2}{2} + Q$$

С учётом закона сохранения импульса

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{2m(v_1 - v_2)^2}{2} + Q$$

Тогда, количество теплоты, пошедшее на нагрев снежков

$$Q = 2mv_1v_2 - \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}$$

Нагрев снежков определим из

$$Q = 2mc\Delta T$$

$$\Delta T = \frac{Q}{2cm} = \frac{4v_1v_2 - v_1^2 - v_2^2}{4c}$$

Найдем скорости. Движение снежка, который бросил Серёжа описывается уравнениями

$$\begin{aligned}v_1 &= v_0 - gt \\ y_1 &= h_1 + v_0t - \frac{gt^2}{2}\end{aligned}$$

Движение снежка, который бросил Анатолий описывается уравнениями

$$\begin{aligned}v_2 &= -gt \\ y_2 &= h_2 - \frac{gt^2}{2}\end{aligned}$$

В момент встречи $y_1 = y_2$.

$$h_1 + v_0t_0 - \frac{gt_0^2}{2} = h_2 - \frac{gt_0^2}{2}$$

Отсюда время встречи

$$t_0 = \frac{h_2 - h_1}{v_0}$$

Скорости снежков

$$\begin{aligned}v_1 &= v_0 - gt_0 = \frac{v_0^2 - g(h_2 - h_1)}{v_0} \\ |v_2| &= \frac{g(h_2 - h_1)}{v_0}\end{aligned}$$

К сожалению тут проще посчитать пошагово

$$v_1 = \frac{v_0^2 - g(h_2 - h_1)}{v_0} = 7 \text{ (м/с)}$$

$$|v_2| = \frac{g(h_2 - h_1)}{v_0} = 3 \text{ (м/с)}$$

$$\Delta T = \frac{4v_1v_2 - v_1^2 - v_2^2}{4c} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}$$

Ответ: $4 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}$

Задача 3. (3,0 балла)

Дизайнер Порфирий разработал и сделал прототип нового супермодного стакана для воды. Однако при тестах в процессе наливания воды в боковой стенке возникла течь при высоте столба воды h_0 (минимальная высота столба воды, при которой стакан дает течь). Оказалось, что Порфирий не учил физику. Его стакан имел распределение предела прочности (давление, при котором в стакане образуется течь) $p = ah^2 - bh + c + p_0$, где $a = 125 \frac{\text{кПа}}{\text{м}^2}$, $b = 12.5 \frac{\text{кПа}}{\text{м}}$, $c = 0.6125 \text{ кПа}$, p_0 – атмосферное давление в день проведения теста стакана, h – расстояние от дна стакана. Определите h_0 .

Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

(Ответ дайте в см с точностью до целых.)

Давление на расстоянии h от дна стакана (атмосферное и гидростатическое $p_0 + \rho g(h_0 - h)$). Это давление должно быть равно пределу прочности на этом уровне

$$p_0 + \rho g(h_0 - h) = ah^2 - bh + c + p_0$$

$$\rho g(h_0 - h) = ah^2 - bh + c$$

Получаем уравнение

$$ah^2 - (b - \rho g)h + c - \rho gh_0 = 0$$

Корни этого уравнения

$$h_{1,2} = \frac{b - \rho g \pm \sqrt{(b - \rho g)^2 - 4a(c - \rho gh_0)}}{2a}$$

Минимальность h_0 будет в случае одного корня, то есть

$$(b - \rho g)^2 - 4a(c - \rho gh_0) = 0$$

Отсюда

$$h_0 = \frac{4ac - (b - \rho g)^2}{4a\rho g} = 6 \text{ см}$$

ОТВЕТ: 6 см

Задача 4. (1,5 балла)

Бегемотиха Снежана решила поплавать в бассейне с площадью дна $S = 10 \text{ м}^2$ и глубиной $h_0 = 2 \text{ м}$. Когда она "звездочкой" плавала в воде (без движения), уровень воды в бассейне поднялся до некоторого нового значения h_1 . Снежане захотелось попить и она выпила из бассейна $V = 50$ литров воды. После этого она продолжила плавать.

Определите, насколько изменился уровень воды в бассейне, после того как Снежана попила.

Плотность воды 1 кг/л . Бегемотиху считать прямоугольным параллелепипедом с площадью основания (параллельного дну бассейна) $S_0 = 6 \text{ м}^2$. После потребления воды, размеры Снежаны не изменились.

Ответ дайте в миллиметрах с точностью до десятых.



ОТВЕТ: 0 мм

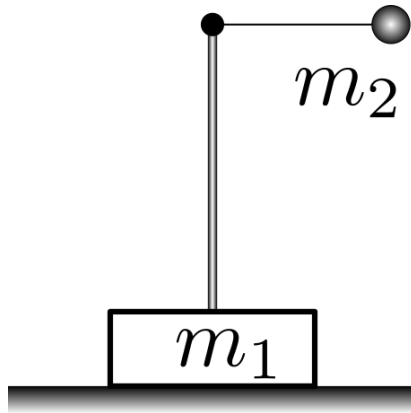
Задача 5. (3,0 балла)

Деревянный брусок массы 60 граммов может без трения перемещаться по горизонтальному столу. Математический маятник с массой 190 граммов, помещенный на этот брусок, может свободно качаться в вертикальной плоскости. Маятник переводят в горизонтальное положение и отпускают.

Какова максимальная сила натяжения подвеса маятника в процессе возникших колебаний?

Ускорение свободного падения считать равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Ответ представьте в мН с точностью до целой части.



ОТВЕТ: $T_{max} = 17733 \pm 200 \text{ мН}$

Задача 6. (2,5 балла)

Марина взяла два одинаковых обруча и положила их на горизонтальную плоскость так, чтобы расстояние между центрами обручей оказалось равным радиусу обруча. В какой-то момент она начала сдвигать центры обручей друг к другу с одинаковой постоянной скоростью 15 см/с. Ей стало интересно, а чему будет равна скорость v_c точки пересечения обручей относительно стола. Определите v_c в момент времени, когда расстояние между центрами обручей уменьшилось в 3 раза.

Ответ запишите в мм/с с точностью до десятых долей.

ОТВЕТ: $v_c = 25.3 \pm 0.3$ мм/с

Задача 7. (1,5 балла)

Один из элементов оптической схемы для наблюдения плазмонного резонанса в новых металло-полупроводниковых метаматериалах представляет собой два плоских зеркала, которые расположены под некоторым углом θ друг к другу.

Сколько градусов должен составлять угол θ , чтобы луч из лазерного источника, пришедший к одному из зеркал параллельно биссектрисе данного угла, совершив ровно пять отражений, вернулся обратно в источник?

ОТВЕТ: $\theta = 36^\circ$

Задача 8. (2,0 балла)

Модель Терентий позирует перед зеркалом, находясь на расстоянии $\ell = 2F$ от зеркала, где F фокусное расстояние объектива фотоаппарата оператора Филония

Его фотографирует профессионал Филоний. Расстояние от фотоаппарата Филония до Терентия также равно ℓ .

Определите отношение поперечного размера истинного Терентия к поперечному размеру "зеркального" Терентия, которое можно получить с помощью линзы объектива на фотопленке.

Подсказка: Отношение высоты изображения в линзе к высоте предмета (поперечное увеличение Γ) равно отношению расстояния от изображения до линзы к расстоянию от предмета

до линзы $\frac{h}{h_0} = \frac{b}{a}$

ОТВЕТ: 5

Задача 9. (2,0 балла) Однажды Николаю провести какое-нибудь исследование. Он взял сосуд с постоянным поперечным сечением и наклеил на него распечатанную линейку. Налил в нее некоторое количество воды.

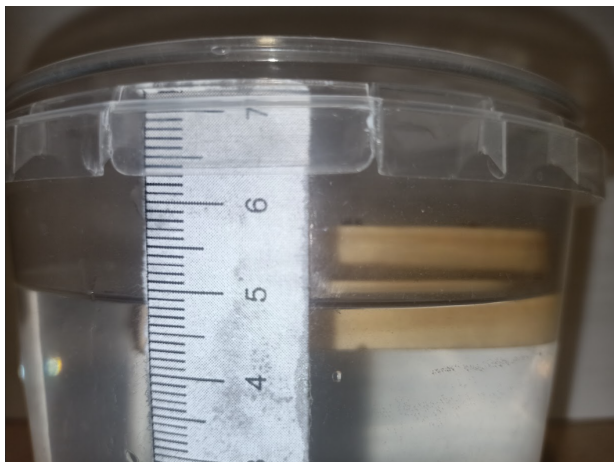


Сосуд с водой и линейкой



Сосуд с водой и линейкой (приближенный вариант)

Затем Николай взял брусок и поместил его в сосуд с водой.



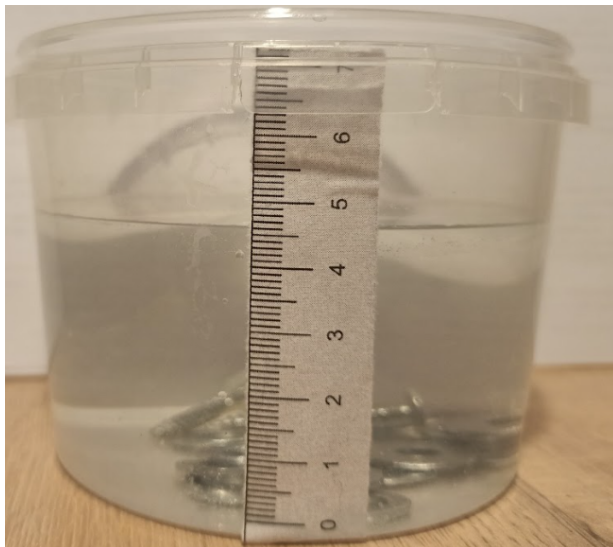
Брусок в сосуде с водой

После этого Николай установил на бруске металлическую конструкцию и поместил получившийся "шедевр" в сосуд с водой. Оказалось, что шедевр плавает так, что уровень воды совпадает с верхним краем "шедевра".



"Шедевр" в сосуде с водой

И в конце своих изысканий Николай снял металлическую конструкцию и поместил все металлические части в сосуд с водой.



Детали металлической конструкции в сосуде с водой



Детали металлической конструкции в сосуде с водой (приближение)

Проведя эти исследования, Николай задумался о том, какую величину он может определить. В итоге его выбор пал на среднюю плотность металлической конструкции. Определите эту плотность. Плотность воды примите равной $\rho = 1 \text{ г/см}^3$

(Ответ дайте в г/см^3 с точностью до десятых.)

Введем обозначения:

V_0 — объем воды в сосуде;

V_1 — суммарный объем воды в сосуде и погруженной части бруска;

V_2 — суммарный объем воды в сосуде, бруска и металлической конструкции;

V_3 — суммарный объем воды в сосуде и металлической конструкции;

ρ — плотность воды

При погружении бруска сила Архимеда уравнивает силу тяжести, действующую на брусок

$$m_{\text{бруска}}g = \rho g V_{\text{погруженной части бруска}}$$

$$\rho_{\text{бруска}}gV_{\text{бруска}} = \rho g (V_1 - V_0)$$

При полном погружении бруска и металлической конструкции (при плавании) сила Архимеда уравнивает силу тяжести, действующую на металлическую конструкцию и брусок

$$m_{\text{бруска}}g + m_{\text{конструкции}}g = \rho g V_{\text{бруска}} + \rho g V_{\text{конструкции}}$$

$$\rho_{\text{бруска}}gV_{\text{бруска}} + \rho_{\text{конструкции}}gV_{\text{конструкции}} = \rho g (V_2 - V_0)$$

$$V_{\text{конструкции}} = V_3 - V_0$$

Собирая все воедино, получим

$$\rho g (V_1 - V_0) + \rho_{\text{конструкции}}g (V_3 - V_0) = \rho g (V_2 - V_0)$$

$$\rho_{\text{конструкции}} (V_3 - V_0) = \rho (V_2 - V_0) - \rho (V_1 - V_0)$$

$$\rho_{\text{конструкции}} (V_3 - V_0) = \rho (V_2 - V_1)$$

С учетом, что $V = Sh$, где S – площадь поперечного сечения сосуда

$$\rho_{\text{конструкции}} = \rho \frac{V_2 - V_1}{V_3 - V_0} = \rho \frac{h_2 - h_1}{h_3 - h_0}$$

$$\rho_{\text{конструкции}} = 1 \cdot \frac{5.2 - 4.9}{4.6 - 4.5} = 3.0$$

Ответ: $3.0 \pm 0.5 \text{ г/см}^3$

10 класс

Задача 1. (2,0 балла)

На узкой горной дороге с одинаковыми скоростями V м/с навстречу едут два автомобиля. Из-за тумана оба водителя смогли заметить друг друга достаточно поздно, но предотвратили столкновение, одновременно затормозив и остановившись, как раз перед тем, как передние бамперы их машин соприкоснулись.

Участок дороги, на котором чуть было не произошла авария, прямолинейный, угол его наклона к горизонту равен $\alpha = \alpha^\circ$. Можно считать, что колеса не вращаются после нажатия тормоза, а коэффициент трения покрышек об асфальт равен $k = 0,5$.

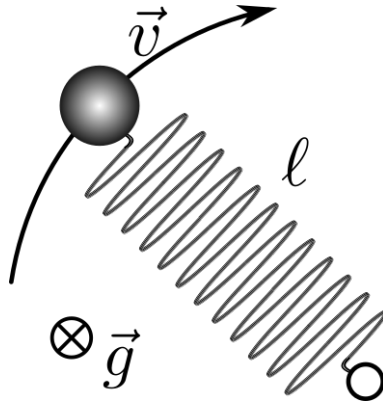
Каким было расстояние между автомобилями в момент начала торможения?

Ответ представьте в метрах, с точностью до целой части.

Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с².

$$\text{ОТВЕТ: } S = \frac{k \cdot V^2 \cos \alpha}{g((1 + k^2) \cos^2 \alpha - 1)} = \frac{V^2 \cos \alpha}{25 \cos^2 \alpha - 20}$$

Задача 2. (1,5 балла)



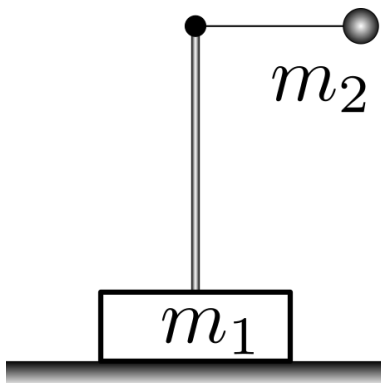
На горизонтальной поверхности гладкого стола расположена пружина, которая одним концом прикреплена к вертикальной оси, а на другом ее конце находится небольшой массивный шарик. Вся система вращается вокруг вертикальной оси. Когда линейная скорость шарика равна v_1 см/с длина пружины составляет ℓ_1 мм, а если скорость шарика увеличится до v_2 см/с длина пружины будет равна ℓ_2 мм.

Какова длина пружины в недеформированном состоянии?

Ответ представьте в миллиметрах с точностью до целой части.

ОТВЕТ: $\ell_0 = \frac{\ell_1^2 v_2^2 - \ell_2^2 v_1^2}{\ell_1 v_2^2 - \ell_2 v_1^2}$

Задача 3. (2,5 балла)



Деревянный брусок массы m_1 граммов может без трения перемещаться по горизонтальному столу. Математический маятник с массой m_2 граммов, помещенный на этот брусок, может свободно качаться в вертикальной плоскости. Маятник переводят в горизонтальное положение и отпускают.

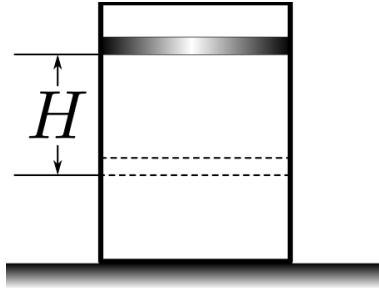
Какова максимальная сила натяжения подвеса маятника в процессе возникших колебаний?

Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с².

Ответ представьте в мН с точностью до целой части.

ОТВЕТ: $T = m_2 \left(3 + \frac{2m_2}{m_1} \right) g = 10 \cdot m_2 \left(3 + \frac{2m_2}{m_1} \right)$

Задача 4. (1,5 балла)



В вертикальном цилиндре под массивным поршнем находится воздух, а над поршнем — вакуум. Температуры воздуха внутри и вне цилиндра одинаковы. Поршень медленно поднимают из положения равновесия на высоту H и удерживают до тех пор, пока температура внутри цилиндра снова не станет равна внешней. Затем цилиндр теплоизолируют и освобождают поршень.

Какое перемещение совершит поршень, к моменту когда его колебания прекратятся?

Теплоемкостями цилиндра и поршня можно пренебречь.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- (1) $\Delta z = \frac{5H}{7}$
- (2) $\Delta z = \frac{2H}{7}$
- (3) $\Delta z = \frac{H}{2}$
- (4) $\Delta z = \frac{H}{3}$
- (5) $\Delta z = \frac{3H}{5}$

Задача 5. (2,0 балла)

Футболист Диего ударил по мячу при попутном ветре, который придавал ему в горизонтальном направлении ускорение $a = g/3$. Дальность полета мяча в горизонтальном направлении оказалась в $n = 3$ раза больше, чем максимальная высота подъема.

Под каким углом к горизонту мяч начал свой полет?

Ответ приведите в градусах с точностью до целой части.

ОТВЕТ: $67 \pm 3^\circ$

Задача 6. (2,5 балла)

По тонкому диэлектрическому кольцу радиуса R , расположенному в горизонтальной плоскости, равномерно распределен электрический заряд q_1 . На оси кольца находится небольшой шарик с одноименным зарядом q_2 .

Какова максимальная масса шарика?

Ускорение свободного падения равно g .

ОТВЕТЫ:

$$(1) \ m = \frac{\sqrt{3}}{18} \cdot \frac{q_1 q_2}{\varepsilon_0 g R^2}$$

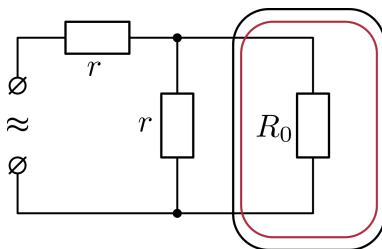
$$(2) \ m = \frac{\sqrt{6}}{24} \cdot \frac{q_1 q_2}{\varepsilon_0 g R^2}$$

$$(3) \ m = \frac{\sqrt{7}}{16} \cdot \frac{q_1 q_2}{\varepsilon_0 g R^2}$$

$$(4) \ m = \frac{\sqrt{2}}{25} \cdot \frac{q_1 q_2}{\varepsilon_0 g R^2}$$

$$(5) \ m = \frac{\sqrt{3}}{32} \cdot \frac{q_1 q_2}{\varepsilon_0 g R^2}$$

Задача 7. (2,5 балла)



Инженер Данила проектирует электрическую муфельную печь для химической лаборатории. В качестве источника тепла им был выбран нагревательный элемент с номинальным сопротивлением $R_0 = R_0$ Ом. При испытаниях прототипа печи оказалось, что сопротивление этого элемента, хоть и незначительно ($\Delta R \ll R_0$), но меняется из-за нагрева. В техническом задании по разработке печи было важное требование обеспечить максимально стабильную тепловую мощность и Данила решил изменить конструкцию печи, добавив два дополнительных одинаковых внешних резистора (см. рисунок).

Каким в этом случае должно быть сопротивление r каждого из этих резисторов?

Ответ приведите в Омах с точностью до целой части.

ОТВЕТ: $r = 2R_0$

Задача 8. (2,5 балла)

Один из элементов оптической схемы для наблюдения плазмонного резонанса в новых металло-полупроводниковых метаматериалах представляет собой два плоских зеркала, которые расположены под некоторым углом θ друг к другу.

Сколько градусов должен составлять угол θ , чтобы луч из лазерного источника, пришедший к одному из зеркал параллельно биссектрисе данного угла, совершив ровно пять отражений, вернулся обратно в источник?

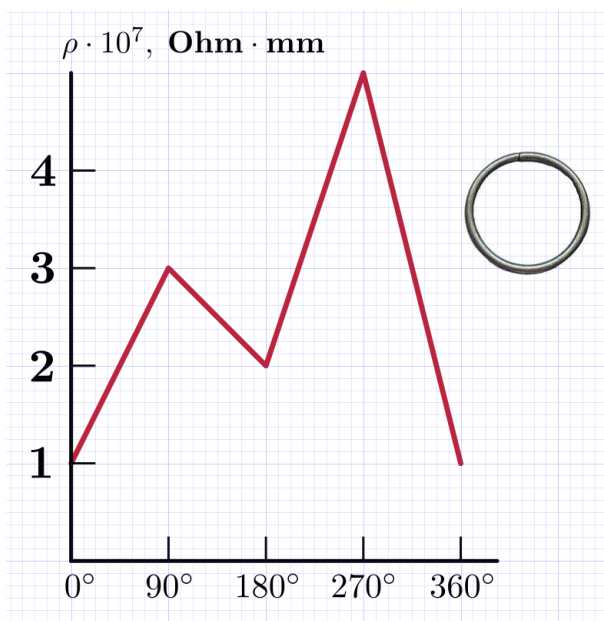
ОТВЕТ: $\theta = 36^\circ$

Задача 9. (3,0 балла)

Из неоднородной проволоки длиной $\ell = 50 \text{ см}$ с радиусом поперечного сечения $r = 0.05 \text{ мм}$ сделано кольцо. Зависимость удельного сопротивления материала кольца от углового положения его точек показана на графике.

Какое **максимальное** электрическое сопротивление можно измерить, если прикладывать контакты омметра к двум произвольным (необязательно диаметрально противоположным) его точкам?

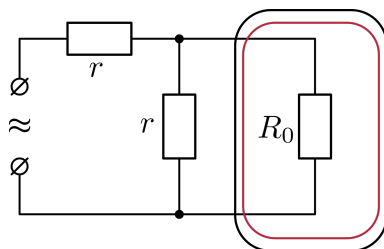
Ответ запишите в миллиомах с точностью до целой части.



ОТВЕТ: $4.37 \cdot 10^{-3} \text{ Ohm}$

11 класс

Задача 1. (3,0 балла)



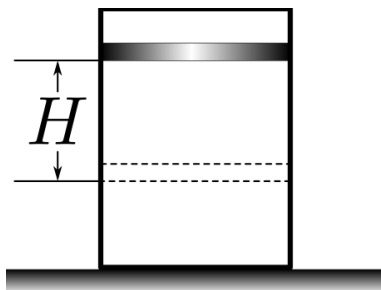
Инженер Данила проектирует электрическую муфельную печь для химической лаборатории. В качестве источника тепла им был выбран нагревательный элемент с номинальным сопротивлением $R_0 = R_0$ Ом. При испытаниях прототипа печи оказалось, что сопротивление этого элемента, хоть и незначительно ($\Delta R \ll R_0$), но меняется из-за нагрева. В техническом задании по разработке печи было важное требование обеспечить максимально стабильную тепловую мощность и Данила решил изменить конструкцию печи, добавив два дополнительных одинаковых внешних резистора (см. рисунок).

Каким в этом случае должно быть сопротивление r каждого из этих резисторов?

Ответ приведите в Омах с точностью до целой части.

ОТВЕТ: $r = 2R_0$

Задача 2. (2,0 балла)



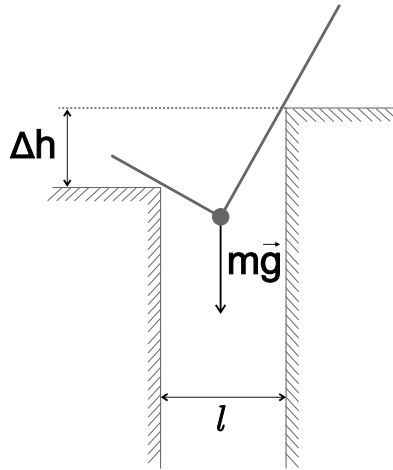
В вертикальном цилиндре под массивным поршнем находится воздух, а над поршнем — вакуум. Температуры воздуха внутри и вне цилиндра одинаковы. Поршень медленно поднимают из положения равновесия на высоту H и удерживают до тех пор, пока температура внутри цилиндра снова не станет равна внешней. Затем цилиндр теплоизолируют и освобождают поршень.

Какое перемещение совершит поршень, к моменту когда его колебания прекратятся?

Теплоемкостями цилиндра и поршня можно пренебречь.

ОТВЕТ: $\Delta z = \frac{5H}{7}$

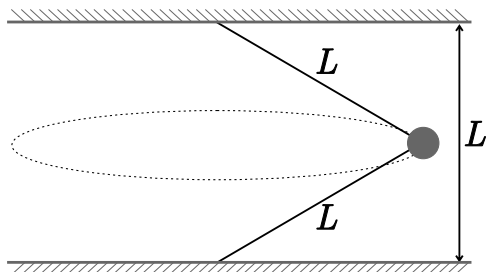
Задача 3. (2,0 балла)



Петр установил легкий уголок, в вершине которого находится тяжелая точечная масса, между двумя опорами (см. рис.). Расстояние между ними равно l , а перепад высот — Δh . Если полностью пренебречь трением в системе, а отношение l к Δh равным τ , то чему будет равно абсолютное значение отклонения биссектрисы уголка от вертикали?

ОТВЕТ: $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan(\tau)$.

Задача 4. (2,0 балла)



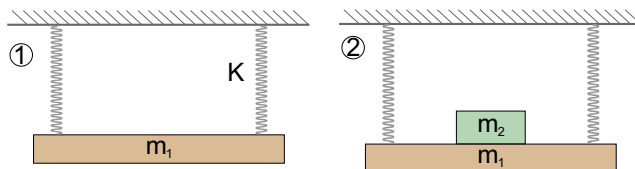
Светлана решила изучить поведение силы натяжения нити при помощи следующей установки. Массивный шарик прикреплен к двум одинаковым легким нитям, одна из которых прикреплена к потолку, а другая — к полу. Шарик вращается по окружности. Меняя скорость вращения шарика при помощи динамометров ей удалось определить как себя ведет отношение верхней силы натяжения к нижней. Определить, чему равно данное отношение, если скорость шарика равна v ? Расстояние между подвесами совпадает с длиной нити и равняется L . Считать, что скорость шарика достаточно большая, чтобы нижняя нить не провисала.

ОТВЕТ: $\frac{T_u}{T_d} = \tau = \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{v^2}{Lg} \right) + 1}{\frac{2}{3} \left(\frac{v^2}{Lg} \right) - 1}.$

Условие на числа: $2v^2 > 3Lg$.

Задача 5. (2,0 балла)

Александр в распоряжение получил установку, состоящую из двух одинаковых пружин, массивной платформы, а также дополнительного массивного груза. Ему было поручено изучить величину удельной жесткости системы α , представляющую из себя отношение суммарного коэффициента жесткости двух пружин и суммарной массы всей системы. Для этого он провел следующий эксперимент. В начальный момент времени массивная платформа находится в состоянии покоя. В какой-то момент Александр кладет на платформу с нулевой скоростью дополнительный брусок. После этого система начинает совершать колебания. При помощи специального *трекера* ему удается определить максимальную скорость движения бруска вместе с платформой — v_{max} , а также максимальное отклонение от первоначального положения равновесия платформы — Δx_{max} . Определить чему равно α .



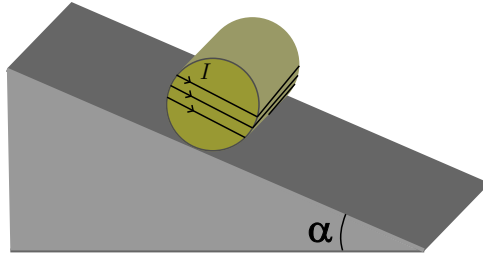
ОТВЕТ: $\alpha = 2 \left(\frac{v_{max}}{\Delta x_{max}} \right)^2$.

Задача 6. (2,0 балла)

Марина взяла два одинаковых обруча и положила их на горизонтальную плоскость так, чтобы расстояние между центрами обручей оказалось равным радиусу обруча. В какой-то момент она начала сдвигать центры обручей друг к другу с одинаковой постоянной скоростью v . Ей стало интересно, а чему будет равна скорость v_c точки пересечения обручей относительно стола. Определите v_c в момент времени, когда расстояние между центрами обручей уменьшилось в n раз.

ОТВЕТ: $v_c = \frac{v}{\sqrt{4n^2 - 1}}$.

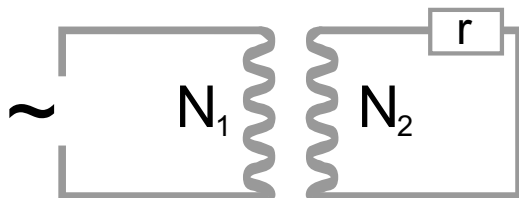
Задача 7. (2,0 балла)



Эдгар задался вопросом: а каким образом можно зафиксировать положение цилиндра, расположенного на наклонной плоскости, угол наклона которой равен α ? Из подручных средств у него нашлись электрический провод, магнит и источник тока. Провода он намотал вдоль цилиндра (ему хватило на N витком, см. рис.), а магнит он расположил таким образом, что магнитное поле оказалось однородным, ориентированным вертикально и равным B . Определите, какой минимальный ток ему необходимо пропускать по катушке, чтобы она оставалась бы в состоянии покоя. Масса цилиндра равна m , его длина — l .

ОТВЕТ:
$$I_{\min} = \frac{mg \sin \alpha}{2BlN}.$$

Задача 8. (2,0 балла)



Оксана собрала трансформатор, в первичной намотке которого N_1 витков, а во вторичной — N_2 . Помимо этого, она добавила во вторичную цепь резистор, сопротивление которого равно r . Чему будет равен ток в цепи первичной обмотки, если известно значение напряжения в цепи первичной обмотки, которое равно U_1 . Трансформатор считать идеальным.

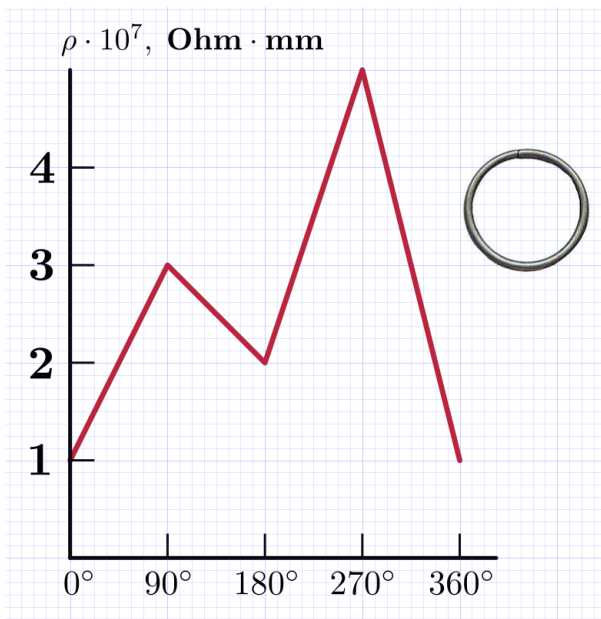
ОТВЕТ: $I_1 = \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \frac{U_1}{r}$.

Задача 9. (3,0 балла)

Из неоднородной проволоки длиной $\ell = 50 \text{ см}$ с радиусом поперечного сечения $r = 0.05 \text{ мм}$ сделано кольцо. Зависимость удельного сопротивления материала кольца от углового положения его точек показана на графике.

Какое **максимальное** электрическое сопротивление можно измерить, если прикладывать контакты омметра к двум произвольным (необязательно диаметрально противоположным) его точкам?

Ответ запишите в миллиомах с точностью до целой части.



ОТВЕТ: $4.37 \cdot 10^{-3} \text{ Ohm}$

Финальный этап

Теоретический тур финального этапа

7 класс

Задача 1. (5 баллов)

Сотрудники одной из физических лабораторий Псехий и Соулгейт решили создать шкалу для измерения душевности. Псехий взял за ноль своей шкалы душевность Соулгейта, а свою душевность принял за 100 единиц ($100 Ps$). Соулгейт уважал Псехия и принял его душевность за 232 единицы ($232 Sl$), а свою душевность оценил в 32 единицы ($32 Sl$). Помогите ученым выразить душевность псехиях через душевность в соулгейтах. (Шкалы считать линейными).

Обозначим значения душевности по шкале Псехия P , а по шкале Соулгейта S . Тогда можно представить связь между шкалами:

$$P = kS + b$$

Тогда

$$P_{1,2} = kS_{1,2} + b$$

Из этих выражений

$$k = \frac{P_2 - P_1}{S_2 - S_1} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$$
$$b = P_1 - kS_1 = 0 - 32 \cdot \frac{1}{2} = -16$$

В итоге

$$P = (S - 32) / 2$$

Ответ: $P = (S - 32) / 2$

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	$P = kS + b$	1,0
2	$P_1 = kS_1 + b, P_2 = kS_2 + b$	1,0
3	Найден коэффициент k	1,0
4	Найден коэффициент b	1,0
5	Получен ответ	1,0

Задача 2. (4 балла)

Сотрудникам одной из физических лабораторий Псехию и Соулгейту поручили определить плотность неизвестного сплава. Псехий взял сосуд и заполнил его до краев молоком и поместил туда кусок сплава. Масса сосуда с молоком и сплавом увеличилась по сравнению с сосудом с молоком без сплава увеличилась на $m_1 = 36$ граммов. Соулгейт провел аналогичный эксперимент с тем же сосудом и тем же куском сплава, но использовал вместо молока растительное масло. В его эксперименте масса увеличилась на $m_2 = 37$ граммов. Какова плотность сплава? (Плотность молока $\rho_{milk} = 1030$ кг/м³, плотность масла $\rho_{oil} = 925$ кг/м³)

При опускании сплава в сосуд с жидкостью из сосуда выльется объем жидкости равный объему куска сплава. Получившаяся увеличенная масса

$$\begin{aligned}\rho_{milk}V + m_1 &= \rho_{milk}(V - V_{alloy}) + \rho_{alloy}V_{alloy} \\ \rho_{oil}V + m_2 &= \rho_{oil}(V - V_{alloy}) + \rho_{alloy}V_{alloy}\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}m_1 &= \rho_{milk}V_{alloy} + \rho_{alloy}V_{alloy} \\ m_2 &= \rho_{oil}V_{alloy} + \rho_{alloy}V_{alloy}\end{aligned}$$

Поделив выражения, получим

$$\begin{aligned}\frac{m_2}{m_1} &= \frac{\rho_{alloy} - \rho_{oil}}{\rho_{alloy} - \rho_{milk}} \\ \rho_{alloy} &= \frac{m_2\rho_{milk} - m_1\rho_{oil}}{m_2 - m_1}\end{aligned}$$

$$\rho_{alloy} = \frac{37 \cdot 1030 - 36 \cdot 925}{m_2 - m_1} = 4810$$

Ответ: 4810 кг/м³

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Представлены выражения, связывающие плотности, объемы и массы	1,0
2	Выражены массы	1,0
3	Получено выражение для плотности сплава	1,0
4	Получен ответ	1,0

Задача 3. (4 балла)

Сотрудники одной из физических лабораторий Псехий и Соулгейт оказались в неаучной командировке в Японии. В один из дней в бинокль они увидели как улитка ползет по склону горы Фудзияма. Они обратили внимание, что первый сантиметр своего пути улитка проползла за время $t_0 = 7$ секунд. Каждый следующий сантиметр она проползала на $(n-1)t_0$ секунд дольше. Также они определили, что первую половину пути улитка ползла со средней скоростью $v_1 = 1$ мм/с, а вторую половину пути со средней скоростью v_1/n мм/с. Определите n , если всего улитка проползла 5 см.

Время, за которое улитка проползет весь путь

$$t = \frac{s}{\bar{v}}$$

Средняя путевая скорость на всем пути

$$\bar{v} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2v_1^2}{n(v_1 + v_1/n)} = \frac{2v_1}{(n+1)}$$

Тогда $t = \frac{(n+1)s}{2v_1}$. С другой стороны

$$t = t_0 + [t_0 + (n-1)t_0] + [t_0 + 2(n-1)t_0] + [t_0 + 3(n-1)t_0] + \\ + [t_0 + 4(n-1)t_0] = 5t_0 + 10(n-1)t_0 = 10nt_0 - 5t_0$$

Приравниваем эти времена

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)s}{2v_1} &= 10nt_0 - 5t_0 \\ ns + s &= 20nv_1t_0 - 10v_1t_0 \\ (20v_1t_0 - s)n &= s + 10v_1t_0 \\ n &= \frac{s + 10v_1t_0}{20v_1t_0 - s} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Ответ: $n = 4/3$

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Представлено выражение для времени через скорость	1,0
2	Определено время движения через t_0	1,0
3	Получено выражения для n	1,0
4	Получен ответ	1,0

Задача 4. (3 балла)

Сотрудник лаборатории Псехий налил в U -образную трубку, у которой площадь поперечного сечения левого колена в $n = 4$ раз меньше, чем площадь поперечного сечения правого колена, эфир плотностью 1800 кг/м^3 для эксперимента. Расстояние от края трубки до поверхности эфира равно l . Когда Псехий отвернулся, Соулгейт долил в левое колено доверху машинное масло плотностью 900 кг/м^3 . Уровень эфира в правом колене поднялся при этом на $h_{right} = 2 \text{ см}$. Определите l . (считать, что жидкости несжимаемы).

При доливании машинного масла уровень эфира в левом колене опустится на h_{left} . Тогда высота столба машинного масла $l + h_{left}$. В правом колене уровень эфира поднимется на h_{right} . Тогда высота столба эфира в правом колене (относительно уровня границы раздела эфира и масла в левом колене) $h_{left} + h_{right}$. Давления описанных столбов жидкостей должны быть равны

$$\rho_{oil} g (l + h_{left}) = \rho_{ether} g (h_{left} + h_{right})$$

Поскольку жидкости несжимаемы, то уменьшение объема эфира в левом колене равно его увеличению в правом

$$\begin{aligned} S_{left} h_{left} &= S_{right} h_{right} = n S_{left} h_{right} \\ h_{left} &= n h_{right} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\rho_{oil} (l + n h_{right}) = \rho_{ether} (n h_{right} + h_{right}) = \rho_{ether} (n + 1) h_{right}$$

Тогда

$$l = \frac{\rho_{ether}}{\rho_{oil}} (n + 1) h_{right} - n h_{right} = 12$$

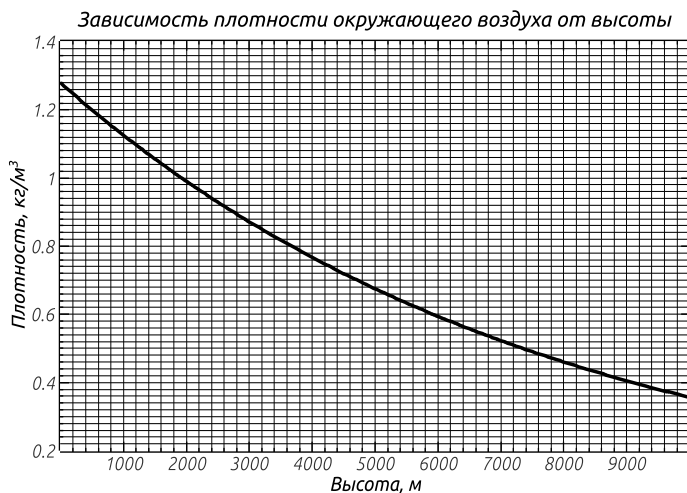
Ответ: 12 см

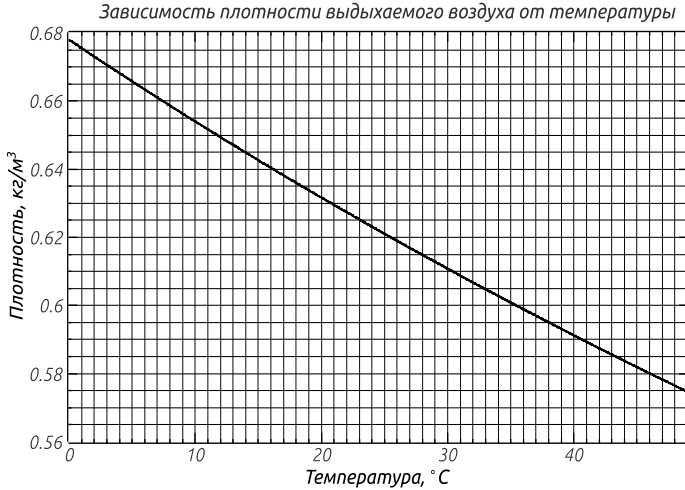
Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Представлено выражение для равенства давлений	1,0
2	Представлено выражение для равенства объемов	1,0
3	Получен ответ	1,0

Задача 5. (4 балла)

Сотрудник лаборатории Псехий надул ртом воздушный шарик до объема $V = 20$ литров и выпустил его в окно. Соулгейт заметил, что воздушный шарик поднялся на высоту $h = 3200$ метров. Определите температуру выдыхаемого Псехием воздуха. Масса шарика $m = 5$ граммов. Теплообменом между воздушным шариком и окружающей средой пренебречь. Объем шарика не изменяется. Зависимость плотности выдыхаемого воздуха от температуры и плотности окружающего воздуха от высоты представлены на графиках.





Высота подъема определится равенством силы тяжести, действующей на шарик, воздух внутри шарика и силы Архимеда со стороны окружающего воздуха

$$mg + \rho gV = \rho_0 gV$$

$$\rho = \rho_0 - \frac{m}{V}$$

Из графика видно, что на высоте 3200 метров плотность окружающего воздуха 0.85 кг/м^3 . Тогда

$$\rho = 0.85 - \frac{5 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-3}} = 0.6$$

По графику определяем, что такой плотности соответствует примерно 35°C

Ответ: 35°C

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Представлено выражение равенства сил тяжести и силы Архимеда	1,0
2	Получено выражение для плотности	1,0
3	Определена по графику плотность воздуха	1,0
4	Определена температура выдыхаемого воздуха	1,0

8 класс

Задача 1. (5 баллов)

Для проведения эксперимента профессор Каон налил в два теплоизолированных сосуда одну и ту же жидкость. В первый сосуд он налил $V = 2$ литра жидкости и нагрел ее до температуры $t_1 = 60^\circ\text{C}$. Во второй сосуд он налил nV литров жидкости, нагретой до температуры $t_2 = 70^\circ\text{C}$. После этого он ушел обедать. В это время профессор Бозон решил подшутить над товарищем и перелил V_0 литров жидкости из второго сосуда в первый. Профессор Каон задержался на обеде и профессор Бозон решил, что шутка неудачная и перелил тот же объем жидкости из первого сосуда во второй. Профессор Каон после обеда измерил температуру жидкости во втором сосуде и с удивлением обнаружил, что температура жидкости $t_0 = 65^\circ\text{C}$. Сколько литров жидкости переливал профессор Бозон из сосуда в сосуд, если $n = 3$?

Рассмотрим случай первого переливания. Количество теплоты (полученной или отданной) можно определить

$$Q = cm\Delta t = c\rho V\Delta t$$

Уравнение теплового баланса

$$c\rho V(t_{11} - t_1) + c\rho V_0(t_{11} - t_2) = 0$$

Или

$$V(t_{11} - t_1) + V_0(t_{11} - t_2) = 0$$

$$t_{11} = \frac{V_0 t_2 + V t_1}{V + V_0}$$

Второе переливание - уравнение теплового баланса:

$$c\rho(nV - V_0)(t_0 - t_2) + c\rho V_0(t_0 - t_{11}) = 0$$

Или

$$(nV - V_0)(t_0 - t_2) + V_0(t_0 - t_{11}) = 0$$

Отсюда

$$t_{11} = \frac{nV(t_0 - t_2) + V_0 t_2}{V_0}$$

Приравняем температуры t_{11}

$$\frac{V_0 t_2 + V t_1}{V + V_0} = \frac{nV(t_0 - t_2) + V_0 t_2}{V_0}$$

$$V_0^2 t_2 + V V_0 t_1 = nV^2 t_0 + nV V_0 t_0 - nV^2 t_2 - nV V_0 t_2 + V V_0 t_2 + V_0^2 t_2$$

$$V V_0 t_1 = nV^2 t_0 + nV V_0 t_0 - nV^2 t_2 - nV V_0 t_2 + V V_0 t_2$$

$$V_0 t_1 = nV t_0 + nV_0 t_0 - nV t_2 - nV_0 t_2 + V_0 t_2$$

В итоге

$$V_0 = \frac{n(t_0 - t_2)}{n(t_2 - t_0) + (t_1 - t_2)} V$$

$$V_0 = \frac{3(65 - 70)}{3(70 - 65) + (60 - 70)} \cdot 2 = -6$$

Из этого следует, что история про шутку профессора Бозона неправдива и никакого переливания не было (как и теплоизолированности сосудов)

Ответ: -6 литра

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Представлено уравнение теплового баланса для первого переливания	1,0
2	Определена температура	1,0
3	Представлено уравнение теплового баланса для второго переливания	1,0
4	Определена температура t_{11} из уравнения теплового баланса для второго переливания	1,0
5	Получен ответ	1,0

Задача 2. (4 балла)

Профессор Каон экспериментировал с электричеством. Он установил, что если в цепи параллельно резистору сопротивлением $R_1 = 5$ Ом подключить резистор с сопротивлением R_2 , то сила тока в первом резисторе уменьшится в k раз. Резистор с каким сопротивлением R_3 нужно подключить последовательно этому разветвлению, чтобы ток через первый резистор уменьшился еще в k раз? (источник считать идеальным)

В первом состоянии (подключен только один резистор) ток через резистор

$$I_1 = \frac{U}{R_1}$$

При подключении параллельно второго резистора

$$I_{11} = \frac{U}{R_1},$$

Так как на резисторе R_1 все так же падает напряжение U . При этом

$$I_{11} = \frac{I_1}{k} = I_1$$

Следовательно,

$$k = 1$$

При подключении третьего резистора ток через первый резистор измениться не должен. Значит напряжение на этом резисторе не должно поменяться. Тогда необходимо в качестве третьего резистора использовать сверхпроводник с нулевым сопротивлением.

$$R_3 = 0$$

Ответ: 0 Ом

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Рассмотрен случай подключения одного резистора	1,0
2	Определено, что коэффициент $k = 1$	1,0
3	Указано, что третье сопротивление не должно менять напряжение на первом резисторе	1,0
4	Получен ответ	1,0

Задача 3. (4 балла)

Профессору Каону прислали тяжелую коробку с оборудованием для экспериментов. Профессор решил занести ее в лабораторию через окно. Для этого он соорудил настил (наклонную плоскость) длиной l м и высотой h м. Он привязал веревку к коробке и с другого конца присоединил динамометр, за который тянул (коробка скользила по настилу). Профессор Бозон заметил, что динамометр показывает 500 Н. Какова сила трения между коробкой и настилом, если коэффициент полезного действия получившейся наклонной плоскости $\eta = 75\%$.

Если бы не было бы силы трения, то профессору Каону потребовалось бы приложить силу $F_0 = mg \frac{h}{l} \cdot \frac{l}{h}$ — выигрыш в силе за счет наклонной плоскости. Сила трения равна $F_{fr} = F - F_0$.

$$F_{fr} = F - F_0 = F - mg \frac{h}{l}$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{A_{\text{полезная}}}{A_{\text{совершенная}}} = \frac{mgh}{Fl}$$
$$mg \frac{h}{l} = \eta F$$

Тогда

$$F_{fr} = F - \eta F = (1 - \eta) F = 0.25 \cdot 500 = 125$$

Ответ: 125 Н

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Представлено выражение для силы в отсутствие трения	1,0
2	Представлено выражение для силы трения	1,0
3	Из выражения для КПД получена связь между силой F и силой тяжести	1,0
4	Получен ответ	1,0

Задача 4. (3 балла)

Профессор Каон решил пойти пообедать и вышел из лаборатории. Одновременно с этим профессор Бозон, пообедав, вышел из столовой в лабораторию. Через некоторое время они встретились в коридоре и поприветствовали друг друга. Профессор Каон заметил, что он дошел до столовой через $t = 2$ минуты после встречи, а профессор Бозон за это время прошел только k -тую часть пути от места встречи до лаборатории. Через какое время после выхода из лаборатории профессор Каон встретился с профессором Бозоном, если $k = 4$? (считать, что движение профессоров происходит с постоянной скоростью).

Путь от лаборатории до места встречи $v_{\text{Каон}}t_0$ с одной стороны и $kv_{\text{Бозон}}t$ с другой стороны. Путь от места встречи до столовой $v_{\text{Каон}}t$ и $v_{\text{Бозон}}t_0$. t_0 — время до встречи. Тогда

$$v_{\text{Каон}}t_0 = kv_{\text{Бозон}}t$$

$$v_{\text{Каон}}t = v_{\text{Бозон}}t_0$$

Следовательно,

$$\frac{t_0}{t} = \frac{kt}{t_0}$$

$$t_0^2 = kt^2$$

$$t_0 = \sqrt{k}t = 4$$

Ответ: 4 минуты

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Представлены выражения для равенства путей через скорость и время	1,0
2	Получена связь между временами	1,0
3	Получен ответ	1,0

Задача 5. (4 балла)

Профессор Каон поставил на стол цилиндрический стакан площади S с водой плотности ρ_v и положил в него кубик льда. Лед плавал, и от скуки профессор прижал его сверху пружинкой так, чтобы верхняя сторона кубика совпала с поверхностью воды, и ушел на обед, зафиксировав верхний конец пружинки. Придя с обеда, профессор с удивлением обнаружил, что хотя лед частично растаял, верхняя сторона кубика по-прежнему совпадает с поверхностью воды. Помогите профессору определить коэффициент жесткости пружинки.

Пусть начальный объем кубика льда V , плотность льда $\rho_l < \rho_v$, коэффициент жесткости пружинки k , длина в нерастянутом состоянии l_0 , а текущая — l . Напишем равенство сил: сила Архимеда равна сумме сил тяжести и упругости

$$\rho_v V g = \rho_l V g + k(l_0 - l).$$

Напишем, что изменилось, если растаял объем льда ΔV_l . При этом лед превратился в воду объема ΔV_v так, что масса сохранилась

$$\rho_l \Delta V_l = \rho_v \Delta V_v.$$

Тогда уровень воды опустился на Δl

$$\begin{aligned} S \Delta l &= \Delta V_l - \Delta V_v, \\ \Delta l &= \frac{(\rho_v - \rho_l) \Delta V_l}{\rho_v S}. \end{aligned}$$

Теперь можно вновь написать равенство сил

$$\rho_v (V - \Delta V_l) g = \rho_l (V - \Delta V_l) g + k(l_0 - (l + \Delta l)).$$

Вычитая равенства сил друг из друга, получим

$$(\rho_v - \rho_l) \Delta V_l g = k \Delta l = k \frac{(\rho_v - \rho_l) \Delta V_l}{\rho_v S}.$$

Окончательно получим выражение для коэффициента жесткости

$$k = \rho_v S g.$$

Ответ: $k = \rho_v S g$

Критерии оценивания

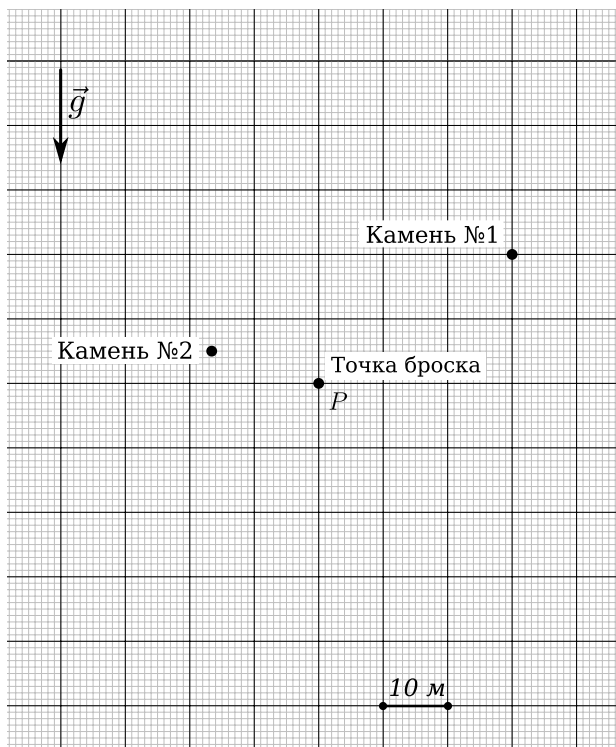
	Критерий	Баллы
1	Представлены выражения для равенства сил и масс	1,0
2	Определено на сколько опустился уровень воды	1,0
3	Представлено выражения для равенства сил с учетом растаявшего льда	1,0
4	Получен ответ	1,0

9 класс

Задача 1. (4 балла)

Два камня одновременно бросили из точки P . На обороте листа изображён фотоснимок, выполненный спустя время $\tau = 2$ с после броска.

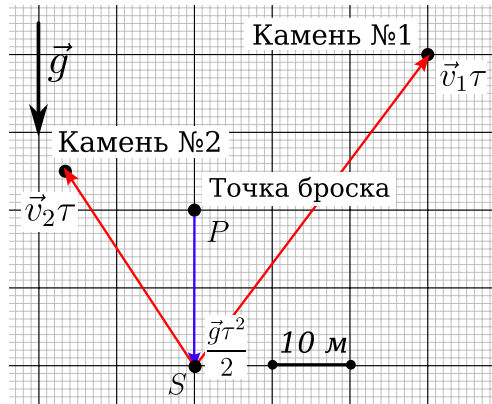
Определите максимально точно начальные скорости камней. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Сопротивлением воздуха пренебречь. Во время проведения эксперимента соударений тел не происходило.



Рассмотрим происходящий процесс в системе отсчёта, свободно падающей с ускорением $\vec{g}$; в ней оба шара будут двигаться с постоянными скоростями. За время τ перемещение точки броска составляет

$$\vec{s} = \frac{\vec{g}\tau^2}{2}, s = 2 \text{ м.} \quad (1)$$

Пользуясь масштабом, отметим точку S , т. ч. $\vec{P}\vec{S} = \vec{s}$. Векторы, проведённые из точки S в точки, соответствующие положениям камней, равны $\vec{v}_1\tau$ и $\vec{v}_2\tau$, где $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ — их скорости.



Длины этих векторов можно легко найти по теореме Пифагора (либо измерив линейкой и умножив на масштаб). Итак,

$$v_1\tau \approx 50 \text{ м} \Rightarrow v_1 \approx 25 \text{ м/с}; \quad (2)$$

$$v_2\tau \approx 30 \text{ м} \Rightarrow v_2 \approx 15 \text{ м/с}. \quad (3)$$

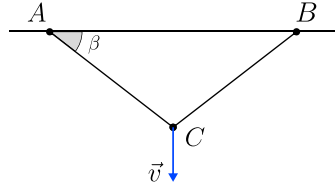
Ответ: 25 м/с и 15 м/с.

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Идея перехода в сопутствующую систему отсчёта	1
2	Построение выполнено и обосновано	1
3	Правильно найдены интересующие расстояния	1
4	Получен верные ответы	0,5+0,5

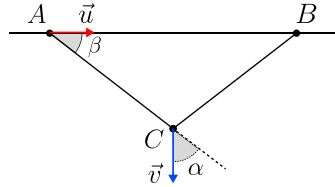
Задача 2. (4 балла)

Нерастяжимая нить длиной ℓ соединяет две бусинки A и B , которые могут свободно скользить по прямой спице. Ровно в середине нити находится колечко C , которое перемещают с постоянной скоростью v , направление которой перпендикулярно спице. В некоторый момент времени угол между спицей и отрезком AC равен β .



- Чему в этот момент равна скорость сближения бусинок?
- Определите ускорение бусинки A в этот момент.

Бусинки движутся по спице, поэтому их скорости направлены вдоль неё. Найдём модуль скорости $\vec{u}$ точки A . Заметим, что расстояние между точками A и C неизменно (они соединены нерастяжимой нитью). Поэтому равны проекции скоростей этих точек на прямую AC (кинематическая связь):

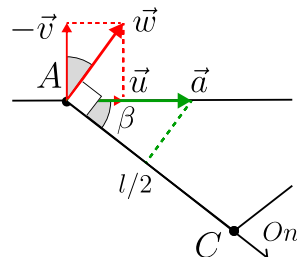


$$v \cos \alpha = u \cos \beta, \alpha = 90^\circ - \beta;$$

$$u = v \operatorname{tg} \beta. \quad (1)$$

Точки A и B движутся навстречу друг другу. Их скорости равны по модулю (система всё время симметрична относительно серединного перпендикуляра отрезку AB). Значит, скорость сближения $2v \operatorname{tg} \beta$.

Ускорение бусинки A направлено вдоль спицы. Для нахождения его величины перейдём в инерциальную систему отсчёта, связанную с точкой C . Ускорение бусинки не изменилось. В этой системе отсчёта бусинка движется по окружности радиуса $l/2$ с центром в точке C .



Её скорость равна $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$. Модуль скорости можно найти по теореме Пифагора, либо сразу из треугольника скоростей, пользуясь определением косинуса угла β :

$$\cos \beta = \frac{v}{w}, \quad w = \frac{v}{\cos \beta}. \quad (2)$$

Найдём проекцию ускорения точки A на ось On :

$$a_n = \frac{w^2}{l/2}. \quad (3)$$

С другой стороны,

$$a_n = a \cos \beta \Rightarrow a = \frac{2w^2}{l \cos \beta} = \frac{2v^2}{l \cos^3 \beta}. \quad (4)$$

Ответ: а) $2v \operatorname{tg} \beta$; б) $\frac{2v^2}{l \cos^3 \beta}$.

Критерии оценивания

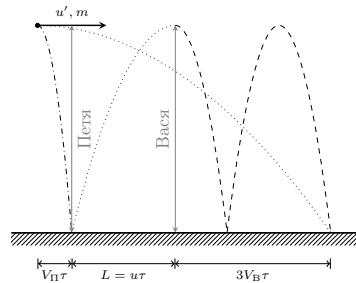
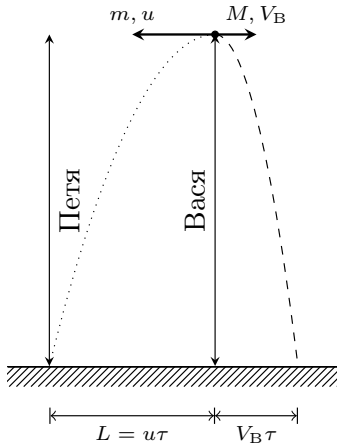
	Критерий	Баллы
1	Идея использовать кинематическую связь для нити AC	0,5
2	Верно найдена скорость точки A	1,0
3	Верно найдена скорость сближения бусинок	0,5
4	Идея перейти в систему отсчёта точки C	0,5
5	Найдена скорость точки A в новой с.о.	0,5
6	Верно найдено нормальное ускорение	0,5
7	Верно найдено нормальное ускорение	0,5

Задача 3. (4 балла)

Друзья Петя Васечкин и Вася Петичкин прыгают на батутах так, что одновременно долетают до верхней точки (на высоте h) и одновременно касаются батутов. У Васи в руках находится тяжёлый мяч с песком, который он в верхней точке траектории отбрасывает от себя с относительной скоростью v , направленной горизонтально, так что мяч прилетает ровно к месту приземления Пети.

- Определите расстояние между ребятами, которое было до броска.
- Петя ловит мяч в нижней точке. С какой относительной скоростью он должен горизонтально бросить его, находясь в высшей точке, чтобы Вася также поймал его в момент своего ближайшего приземления?

Массы мальчиков одинаковы и равны M , масса мяча m , ускорение свободного падения g , отскоки от батута абсолютно упругие, трение отсутствует.



Обозначим посредством τ время полёта от нижней точки до верхней. Будем называть такой временной интервал одной фазой

движения. Нам известна высота подскока, h , поэтому

$$\frac{g\tau^2}{2} = h \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (1)$$

В силу того, что все броски сопровождаются отталкиванием мяча строго горизонтально, это время остаётся неизменным в течение всего процесса. Вообще, в любой момент времени Вася, Петя и мяч находятся на одной горизонтали: $y_B(t) = y_{\Pi}(t) = y_M(t)$.

Определим две скорости относительно земли (батутов) – Васи V_B и мяча u – после первого броска. По закону сохранения импульса (в проекции на горизонтальную ось, с учётом направлений), имеем

$$\begin{cases} u + V_B = v \\ mu = MV_B \end{cases} \Rightarrow mu = M(v - u) \Rightarrow \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{M}{m+M} v \\ V_B = \frac{m}{m+M} v \end{cases} \quad (3)$$

В течение полёта, который продолжается время τ , горизонтальная проекция скорости мяча не меняется, откуда следует, что изначальное расстояние между ребятами равно:

$$L = u\tau = \frac{M}{m+M} v \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (4)$$

Теперь найдём скорость Пети V_{Π} после того, как он поймал мяч. Вертикальные проекции обеих скоростей одинаковы между собой и совпадают до и после процесса поимки мяча. Изучаем горизонтальные проекции:

$$(m+M)V_{\Pi} = mu \Rightarrow$$

$$V_{\Pi} = \frac{m}{m+M}, u = \frac{mM}{(m+M)^2}, v = \frac{M}{m+M}, \underbrace{\frac{m}{m+M} v}_{V_B} < V_B. \quad (5)$$

Последняя часть в цепочке показывает, что скорость Пети после ловли мяча меньше, чем скорость Васи после того, как он мяч бросил.

Чтобы найти относительную скорость мяча (v') при броске Петей, воспользуемся последним условием: мяч должен прилететь ровно к месту приземления Васи. Тогда,

$$\tau u' = \tau(V_{\Pi} + u + 3V_B) \quad (6)$$

Здесь первое слагаемое, $V_{\Pi}\tau$, соответствует смещению по оси Ox Пети вместе с мячом, второе, $u\tau$ — изначальное расстояние между мальчиками, третье, $3V_B\tau$, — смещению Васи за три фазы движения. Закон сохранения импульса при броске, а также выражение для относительной скорости дают

$$MV'_{\Pi} - mu' = V_{\Pi}(m + M) \Rightarrow V'_{\Pi} = \frac{1}{M}[V_{\Pi}(m + M) + mu'] \Rightarrow \quad (7)$$

$$\Rightarrow v' = V'_{\Pi} + u' = \frac{m + M}{M}[V_{\Pi} + u'] = \quad (8)$$

$$= \frac{m + M}{M}[2V_{\Pi} + u + 3V_B] = \quad (9)$$

$$= v \frac{m + M}{M} \left[2 \frac{mM}{(m + M)^2} + \frac{M}{m + M} + 3 \frac{m}{m + M} \right] = \quad (10)$$

$$= v \left[\frac{2m}{m + M} + 1 + \frac{3m}{M} \right] = \boxed{v \frac{3m^2 + 6mM + M^2}{M(m + M)}} \quad (11)$$

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Время полёта (1)	0,5
2	ЗСИ в первом броске (3) и расстояние L (4)	1,0
3	ЗСИ и скорость Пети (5)	1,0
4	Второй рисунок или выражение вида (6)	0,5
5	ЗСИ для второго броска (7) и вычисление ответа (11)	1,0

Задача 4. (4 балла)

В морозный день Серый Волк идёт купаться в проруби. Для того, чтобы растопить лёд, он берёт с собой два походных кипятильника: малый, номинальной мощностью P_0 (при питании от источника постоянного напряжения U_0), и большой, мощность которого неизвестна (Волк лишь знает, что спираль его нагревательного элемента сделана из того же материала и в n раз больше по всем измерениям).

- Как будут соотноситься времена включения кипятильников, необходимые для растапливания прорубей одинакового размера?
- Какое сопротивление, как и в какую из цепей необходимо включить, чтобы времена растапливания выровнялись? (Источник питания выдаёт номинальное напряжение при любой нагрузке.)
- Волк обнаружил, что скорость, с которой расширяется граница проруби, непостоянна. При диаметре проруби d_0 она равна v_0 . Какой она будет при диаметре $2d_0$?

Тепловыми потерями можно пренебречь.

Обозначения: R_0 и R_1 — сопротивления малого и большого кипятильников соответственно, U — напряжения используемого источника питания.

Поскольку все линейные размеры большого кипятильника в n раз превосходят малый, у его нагревательного элемента площадь поперечного сечения в n^2 раз больше, а длина — в n . Следовательно, его сопротивление

$$R_1 = \rho \frac{L_1}{S_1} = \rho \frac{nL_0}{n^2 S_0} = \frac{R_0}{n}, \quad (1)$$

то есть, в n раз меньше. При использовании источника постоянного напряжения мощность, выделяемая на нагрузке R , вычисляется как $P = U^2/R$. Следовательно, большому кипятильнику потребуется в n раз меньшее время, чем малому, чтобы растопить столько же льда.

Чтобы мощности, выделяемые на каждом из кипятильников, выровнялись, подключать дополнительное сопротивление (r) необходимо последовательно с большим кипятильником. Тогда:

$$\mathcal{P}_0 = \frac{U^2}{R_0}, \quad \mathcal{P}_1 = I_1^2 R_1 = \left(\frac{U}{R_1 + r} \right)^2 R_1. \quad (2)$$

Тогда

$$\frac{U^2}{R_0} = \frac{U^2 R_1}{(R_1 + r)^2} \Rightarrow (R_1 + r)^2 = R_1 R_0 = n R_1^2 \Rightarrow \quad (3)$$

$$\Rightarrow r^2 + 2R_1 r + R_1^2(1 - n) = 0 \Rightarrow \quad (4)$$

$$\Rightarrow r = \left[-1 \pm \sqrt{1 - (1 - n)} \right] R_1 = R_1 (\sqrt{n} - 1) = \frac{U_0^2}{P_0} \frac{\sqrt{n} - 1}{n}. \quad (5)$$

Теперь сравним скорости, с которыми движется граница при диаметре d_0 и $2d_0$. Поскольку мощность кипятильника постоянна, за единицу времени растапливается одно и то же количество льда. Рассмотрим малый промежуток времени Δt . Если диаметр проруби в начале этого промежутка равен d , а скорость движения границы v , то за время Δt будет растоплена площадь

$$\Delta S = \underbrace{\pi d}_{\text{длина границы} - \text{окружности}} \overbrace{v \Delta t}^{\text{ширина слоя} - \text{кольца}}. \quad (6)$$

Тогда площадь, растапливаемая за единицу времени, равна

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \pi d v. \quad (7)$$

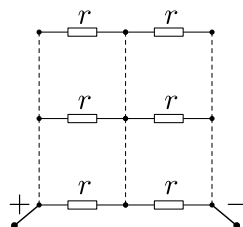
Следовательно, если диаметр в два раза больше, скорость движения границы в два раза меньше: $v' = v_0/2$.

Критерии оценивания

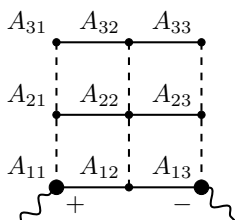
	Критерий	Баллы
1	Выражение типа (1) и соображения о соотношении мощностей	1,0
2	Понимание того, куда и как подключить сопротивление, и выражения типа (2)	1,0
3	Вычисления и ответ (5)	1,0
4	Скорость перемещения границы проруби	1,0

Задача 5. (4 балла)

Электрическая схема представляет собой квадратную решётку 2×2 , в которой все горизонтальные ребра это резисторы с сопротивлением r , а вертикальные (пунктирные линии) — идеальные диоды, пропускающие с нулевым сопротивлением ток в одном направлении и полностью блокирующие его в направлении противоположном.



Как необходимо ориентировать диоды, чтобы при подключении схемы к источнику напряжения U с заданной полярностью на ней выделялась максимальная мощность? Минимальная мощность? Найдите значения этих мощностей.



При поданном напряжении U выделяемая мощность равна U^2/R , где R — полное сопротивление цепи. Поэтому задача эквивалентна поиску минимального (для максимальной мощности) и максимального (для минимальной) эффективного сопротивления схемы.

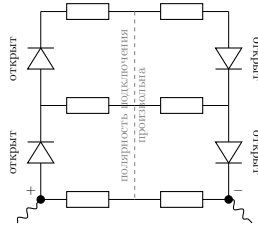
По двум нижним проводам ток обязательно течёт. Это означает, что сопротивление не может быть больше $2r$. Следовательно, ответ на второй вопрос

$$P_{\min} = \frac{U^2}{2r}. \quad (1)$$

..... 1 балл

Ни по одному из диодов ток течь не должен: диоды на первой и третьей вертикалях закрыты, ориентация на центральной

вертикали не важна.



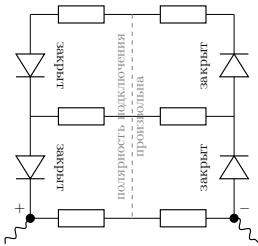
..... 1 балл

Теперь определим минимальное сопротивление. Сначала рассмотрим очевидный вариант: диоды $A_{11}A_{21}$, $A_{21}A_{31}$, $A_{33}A_{23}$ и $A_{23}A_{13}$ открыты, а по участкам $A_{12}A_{22}$, $A_{22}A_{32}$ ток не течёт (в силу равенства потенциалов точек A_{12} , A_{22} и A_{32} соответствующие диоды могут быть ориентированы произвольно). Сопротивление такой схемы равно $2r/3$.

Предположим, что по диоду $A_{11}A_{21}$ ток не течёт. Тогда из положительного полюса ток вытекает исключительно по резистору $A_{11}A_{12}$, вся остальная часть цепи подключена последовательно ему. Таким образом, сопротивление не может быть меньше r . Значит, диоды $A_{11}A_{21}$ и $A_{23}A_{13}$ (аналогично) должны быть открыты. Если диоды в верхнем ряду закрыты, то общее сопротивление равно r . Чтобы сделать общее сопротивление двух верхних рядов (которое потом параллельно подсоединяется к резисторам $A_{11}-A_{12}-A_{13}$) минимальным, необходимо открыть диоды $A_{21}A_{31}$ и $A_{33}A_{23}$. А это приводит к рассмотренному изначально случаю: $2r/3$. Как итог,

$$P_{\max} = \frac{3U^2}{2r}. \quad (2)$$

Полярность подключения диодов в средней вертикали не важна.

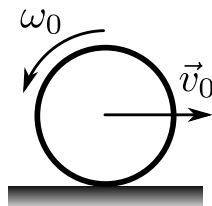


..... 2 балла

10 класс

Задача 1. (3 балла)

В художественной гимнастике известен красивый элемент — гимнастка бросает по полу в горизонтальном направлении обруч, который через некоторое время начинает катиться в обратном направлении и возвращается к ней.



- При каком соотношении между начальными значениями угловой скорости вращения ω_0 и линейной скорости поступательного движения v_0 такой элемент возможен? Радиус обруча равен R .
- Считая ω_0 , v_0 и коэффициент трения скольжения обруча о пол μ заданными величинами, найдите какой путь пройдет обруч до изменения направления движения.
- Через какое время после броска обруч вернется к гимнастке?

Динамика движения обруча будет определяться силой трения скольжения, приложенной к нижней его точке. Как поступательная скорость, так и угловая скорость вращения на первом участке движения будут линейно уменьшаться с течением времени, что следует из второго закона Ньютона и основного уравнения динамики вращательного движения:

$$\begin{cases} ma = -\mu N = -\mu mg \Rightarrow v(t) = v_0 - \mu gt \\ I\dot{\omega} = -\mu mgR \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 - \mu gt/R, \end{cases}$$

где $I = mR^2$ — центральный момент инерции обруча. После того как скорость поступательного движения в момент времени $t_1 = \frac{v_0}{\mu g}$ обратится в ноль для продолжения движения необходимо, чтобы угловая скорость была отлична от нуля и имела исходное направление:

$$\omega(t_1) > 0 \Rightarrow \omega_0 - \mu gt_1/R > 0.$$

Таким образом необходимое условие выполнения элемента запишется следующим образом $\omega_0 R > v_0$. (1)

За время t_1 обруч успеет пройти путь

$$S_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g},$$

длина которого и будет определять его максимальное удаление от точки броска. (2)

После момента t_1 сила трения скольжения будет разгонять обруч по направлению к гимнастке с тем же ускорением. В момент времени t_2 , определяемый условием

$$\omega(t_2)R = -v(t_2) \Rightarrow t_2 = \frac{v_0 + \omega_0 R}{2\mu g}$$

скорость нижней точки обруча, которая складывается теперь из противоположно направленных скоростей вращательного и поступательного движений, обратится в ноль и движение обруча станет чистым качением без проскальзывания. При этом его поступательная скорость будет равна

$$v_2 = v(t_2) = v_0 - \mu g t_2 = \frac{v_0 - \omega_0 R}{2}$$

и он успеет переместиться по направлению к гимнастке на расстояние

$$S_2 = \frac{\mu g (t_2 - t_1)^2}{2} = \frac{(\omega_0 R - v_0)^2}{8\mu g}.$$

Если $S_2 > S_1$, а это возможно при выполнении условия $\omega_0 R > 3v_0$, обруч вернется к гимнастке, непрерывно скользя по полу, спустя время

$$\tau_1 = \frac{2v_0}{\mu g},$$

при этом его угловая скорость будет равна

$$\omega(\tau_1) = \omega_0 - \frac{2v_0}{R}.$$

В противном случае ($S_2 < S_1$) на преодоление оставшегося до гимнастки пути $S_1 - S_2$ обруч, равномерно двигаясь со скоростью

v_2 , затратит время

$$t_3 = \frac{S_1 - S_2}{v_2} = \frac{4v_0^2 - (\omega_0 R - v_0)^2}{4\mu g}.$$

Полное время возврата будет определяться суммой времен $t_2 + t_3$, и как несложно убедиться, будет равно

$$\tau_2 = \frac{(\omega_0 R + v_0)^2}{4\mu g(\omega_0 R - v_0)}.$$

Критерии проверки

	Критерий	Баллы
1	Найдено условие на возврат обруча	0,5
2	Найден путь, проходимый до "остановки"	0,5
3	Найдено время возврата (оба случая)	1 + 1

Задача 2. (6 баллов)

В планетарной системе τ Кита есть планета с массивным шарообразным спутником (луной). Масса планеты равна M_1 , а ее радиус R_1 . Аналогичные параметры для спутника равны M_2 и R_2 , соответственно. Расстояние между центрами планеты и ее луны равно ℓ . Космическая экспедиция землян, высадившаяся на планету, забросила на спутник контейнер с научной аппаратурой. Запуск контейнера с помощью специальной пушки был произведен из наиболее близкой к спутнику точки поверхности планеты, причем начальная скорость контейнера v_1 имела минимально возможное значение для успешного достижения цели. Непосредственно перед ударом о поверхность спутника контейнер разогнался до скорости v_2 .

Найдите отношение v_2/v_1 . (Действием каких-либо сил, кроме гравитационных, во время полета контейнера можно пренебречь, вращение планеты и ее луны не учитывать).

Найдем положение точки в которой силы гравитационного притяжения планеты и спутника уравновешиваются.

$$\begin{aligned}\frac{\gamma M_1 m}{x^2} &= \frac{\gamma M_2 m}{(\ell - x)^2} \Rightarrow \\ \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} &= \frac{x}{\ell - x} \Rightarrow \\ x &= \frac{\sqrt{M_1}}{\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2}} \cdot \ell\end{aligned}$$

Расстояние $\ell - x$ будет равно:

$$\ell - x = \frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2}} \cdot \ell$$

Для успешного осуществления запуска контейнера достаточно сообщить ему такую начальную скорость, чтобы он имел в данной точке скорость, равную нулю. Запишем закон сохранения энергии с учетом сил гравитационного взаимодействия контейнера, как с планетой, так и с ее спутником:

$$\begin{aligned}
 \frac{mv_1^2}{2} - \frac{\gamma M_1 m}{R_1} - \frac{\gamma M_2 m}{\ell - R_1} &= -\frac{\gamma M_1 m}{x} - \frac{\gamma M_2 m}{\ell - x} \Rightarrow \\
 \frac{v_1^2}{2} - \frac{\gamma M_1}{R_1} - \frac{\gamma M_2}{\ell - R_1} &= -\frac{\gamma (\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2}) \sqrt{M_1}}{\ell} - \frac{\gamma (\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2}) \sqrt{M_2}}{\ell} \\
 \frac{v_1^2}{2} - \frac{\gamma M_1}{R_1} - \frac{\gamma M_2}{\ell - R_1} &= -\frac{\gamma (\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2})^2}{\ell} \Rightarrow \\
 v_1 &= \sqrt{2 \left[\frac{\gamma M_1}{R_1} + \frac{\gamma M_2}{\ell - R_1} - \frac{\gamma (\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2})^2}{\ell} \right]}.
 \end{aligned}$$

Аналогично запишем ЗСЭ для точки «равновесия» и места «прилунения»:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\gamma M_1 m}{x} - \frac{\gamma M_2 m}{\ell - x} &= \frac{mv_2^2}{2} - \frac{\gamma M_1 m}{\ell - R_2} - \frac{\gamma M_2 m}{R_2} \Rightarrow \\
 -\frac{\gamma (\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2})^2}{\ell} &= \frac{v_2^2}{2} - \frac{\gamma M_1}{\ell - R_2} - \frac{\gamma M_2}{R_2} \Rightarrow \\
 v_2 &= \sqrt{2 \left[\frac{\gamma M_1}{\ell - R_2} + \frac{\gamma M_2}{R_2} - \frac{\gamma (\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2})^2}{\ell} \right]}.
 \end{aligned}$$

Найдем искомое отношение скоростей:

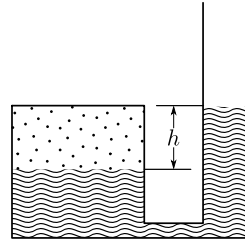
$$\begin{aligned}
 \frac{v_1}{v_2} &= \frac{\sqrt{\left[\frac{\gamma M_1}{R_1} + \frac{\gamma M_2}{\ell - R_1} - \frac{\gamma (\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2})^2}{\ell} \right]}}{\sqrt{\left[\frac{\gamma M_1}{\ell - R_2} + \frac{\gamma M_2}{R_2} - \frac{\gamma (\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2})^2}{\ell} \right]}} \\
 \text{ОТВЕТ: } \frac{v_2}{v_1} &= \frac{\sqrt{\frac{M_1}{\ell - R_2} + \frac{M_2}{R_2} - \frac{(\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2})^2}{\ell}}}{\sqrt{\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{\ell - R_1} - \frac{(\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2})^2}{\ell}}}
 \end{aligned}$$

Критерии проверки

	Критерий	Баллы
1	Найдено положение точки равновесия	2
2	Правильно найдена хотя бы одна из скоростей v_1, v_2	2
3	Найдено отношение скоростей	2

Задача 3. (3 балла)

В сообщающихся сосудах (см.рис.) с отношением площадей поперечных сечений $S_2/S_1 = n$ находится некоторая жидкость. Большой из сосудов герметично закрыт и содержит в верхней части воздух объемом V . Расстояние между крышкой этого сосуда и уровнем жидкости в нем равно h . В узком открытом сосуде уровень жидкости на h выше, чем в широком. После того, как в открытый сосуд влили эту же жидкость объемом ΔV , разница между уровнями в сосудах стала равна $2h$, а давление воздуха в закрытом сосуде стало в два раза больше, чем атмосферное.



Считая, что все процессы в этой системе происходят при постоянной температуре, найдите отношение $\Delta V/V$.

Новое значения давления газа в закрытой части сосуда в два раза больше атмосферного P_0 и уравнивается суммой атмосферного давления и гидростатического давления столба высотой $2h$:

$$P' = 2P_0 = P_0 + 2\rho gh.$$

Следовательно атмосферное давление равно $P_0 = 2\rho gh$, а давления газа до и после вливания дополнительной порции жидкости:

$$P = P_0 + \rho gh = 3\rho gh, \quad P' = 2P_0 = 4\rho gh$$

соотносятся как $P'/P = 4/3$. Исходя из изотермичности процесса, выполнен закон Бойля-Мариотта ($PV = \text{Const}$) и уровень жидкости в закрытой части сосуда повысился на $\Delta h_2 = h/4$. Изменение уровня жидкости в открытом правом колене связано с добавлением новой порции жидкости объемом ΔV и переходом части жидкости в закрытую часть:

$$\Delta h_1 = \frac{\Delta V}{S_1} - \frac{S_2}{S_1} \cdot \Delta h_2 = \frac{\Delta V}{S_1} - \frac{nh}{4}.$$

Из условия $\Delta h_1 - \Delta h_2 = h$ найдем объем добавленной жидкости:

$$\Delta V = \frac{n+5}{4} S_1 h$$

и искомое соотношение $\Delta V/V$:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V}{S_2 h} = \frac{n+5}{4n}.$$

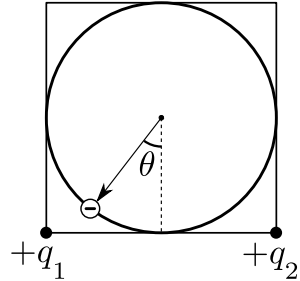
ОТВЕТ: $\frac{\Delta V}{V} = \frac{n+5}{4n}$.

Критерии проверки

	Критерий	Баллы
1	Найдено атмосферное давление	1
2	Найдено изменение уровня воды в закрытой части	1
3	Найдено искомое соотношение $\frac{\Delta V}{V}$	1

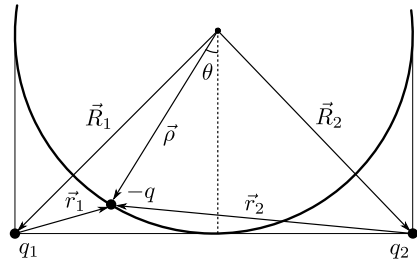
Задача 4. (5 баллов)

На тонкое гладкое диэлектрическое кольцо надета отрицательно заряженная бусинка. В соседних вершинах квадрата, описанного вокруг кольца, расположены два точечных положительных заряда. В положении равновесия радиус-вектор относительно центра кольца бусинки отклоняется на угол θ от вертикали.



- В каких пределах может лежать значение угла θ ?
- Каково отношение величин положительных зарядов q_2/q_1 ?

Необходимым условием равновесия в этой системе является равенство нулю суммы кулоновских сил, действующих со стороны положительных зарядов на отрицательный в проекции на касательное направление к кольцу:



$$\frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^3}(\hat{e}_\tau, \vec{r}_1) + \frac{qq_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^3}(\hat{e}_\tau, \vec{r}_2) = 0,$$

где $\hat{e}_\tau$ – орт касательного направления в точке расположения отрицательного заряда. Таким образом, искомое отношение зарядов

$$\frac{q_2}{q_1} = -\frac{(\hat{e}_\tau, \vec{r}_1)}{(\hat{e}_\tau, \vec{r}_2)} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3.$$

Обозначим радиус кольца ρ , тогда компоненты векторов $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ будут иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 = \rho(1 - \sin \theta) \\ x_2 = \rho(1 + \sin \theta) \\ y_1 = y_2 = \rho(1 - \cos \theta). \end{cases}$$

С помощью теоремы Пифагора легко найти отношение модулей кубов векторов $\vec{r}_1, \vec{r}_2$:

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 = \left(\frac{x_2^2 + y_2^2}{x_1^2 + y_1^2}\right)^{3/2} = \left(\frac{3 - 2(\cos \theta - \sin \theta)}{3 - 2(\cos \theta + \sin \theta)}\right)^{3/2}.$$

Заметим, что $\vec{r}_{1,2} + \vec{R}_{1,2} = \vec{\rho}$, тогда

$$\begin{cases} (\hat{e}_\tau, \vec{r}_1) = -(\hat{e}_\tau, \vec{R}_1) = -\sqrt{2}\rho \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}\rho \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \\ (\hat{e}_\tau, \vec{r}_2) = -(\hat{e}_\tau, \vec{R}_2) = -\sqrt{2}\rho \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\rho \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \end{cases}$$

и

$$\frac{(\hat{e}_\tau, \vec{r}_1)}{(\hat{e}_\tau, \vec{r}_2)} = -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)} = -\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}.$$

ОТВЕТ: $\frac{q_2}{q_1} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \cdot \left(\frac{3 - 2(\cos \theta - \sin \theta)}{3 - 2(\cos \theta + \sin \theta)}\right)^{3/2},$

$$\beta \in \left\{-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right\} \cup \left\{-\frac{3\pi}{4}, +\frac{3\pi}{4}\right\}$$

Критерии проверки

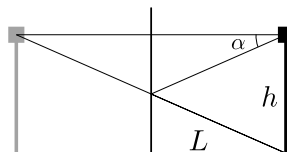
	Критерий	Баллы
1	Найдено отношение квадратов расстояний r_1 и r_2	2
2	Найдено искомое соотношение $\frac{q_1}{q_2}$	2
3	Правильно определены диапазоны значений угла θ	1

Задача 5. (3 балла)

Друг Винни-Пуха Кролик изучает оптику. Он знает, что слегка близорук, поэтому для того, чтобы без очков увидеть себя в зеркале чётко, он подходит к зеркалу на расстояние L и при этом видит себя (с макушки до пят – по вертикали) под углом α . Затем он надевает очки с рассеивающими линзами оптической силы $D < 0$. Чтобы снова видеть себя чётко, он смещается. Под каким углом он теперь себя видит?

Считайте, что глаза Кролика находятся на макушке, а очки расположены вплотную к глазам.

Обозначения: h – рост Кролика, F – фокусное расстояние расслабленного хрусталика, b – расстояние от хрусталика до сетчатки, $a_{0,1}$ – расстояния от Кролика до его отражения в зеркале без очков и с очками, соответственно. Тогда



$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{b}, \quad a_0 = 2L, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{a_0} \quad (1)$$

После надевания очков с оптической силой D :

$$\frac{1}{F} + D = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b} \quad (2)$$

поскольку изображение должно снова сфокусироваться на сетчатке. Вычитаем из строки (2) строку (1) и получаем:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_0} \Rightarrow \frac{1}{a_1} = D + \frac{1}{a_0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{tg} \beta &= \frac{h}{a_1} = 2L \operatorname{tg} \alpha \left(D + \frac{1}{a_0} \right) = \operatorname{tg} \alpha (2DL + 1). \end{aligned}$$

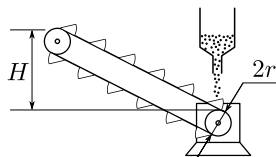
ОТВЕТ: $\beta = \operatorname{arctg}((2DL + 1) \operatorname{tg} \alpha)$

	Критерий	Баллы
1	Записаны формулы тонкой линзы для двух случаев	1
2	Найдено новое значение угла	2

11 класс

Задача 1. (3 балла)

Мария работает инженером в порту. Начальник порта поручил ей построить конвейер для погрузки зерна на борт кораблей. Разность высот между местом загрузки зерна на конвейер и местом сброса зерна — H , радиус тяговых валов конвейера — r , скорость загрузки зерна: $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t}$, (кг/с).



- Найдите предельное значение крутящего момента двигателя, приводящего в движение конвейер.
- Каково в этом случае минимальное количество энергии необходимое для погрузки зерна массы M ?

Сперва определим предельное значение крутящего момента двигателя, обозначим его за N . Данный момент сил будет определяться в виде умножения минимальной силы, необходимой для того, чтобы конвейер мог поднимать зерно на нужную высоту, и плеча приложения данной силы относительно вала двигателя. Для удобства дальнейших рассуждений введем величину $\mu = \Delta m / \Delta t$, представляющую из себя скорость прибытия зерна на конвейер, измеряемой в кг/с.

Исходя из геометрии установки очевидно, что роль плеча играет радиус тягового вала конвейера r , а минимальная же сила будет состоять из двух членов.

Первый отвечает за разгон падающего зерна до скорости v , который изначально имеет нулевую скорость вдоль конвейера. Изменение импульса массы Δm за время Δt будет $v \Delta m$. Таким образом, первая компонента силы, приложение которой со стороны двигателя необходимо для разгона зерна до скорости конвейера, равна $F_1 = \Delta m v / \Delta t = \mu v$.

Теперь разберемся со второй компонентой. Вторая составляющая силы необходима для того, чтобы удерживать на конвейере зерно, которое равномерно распределено по всей его длине

(удерживать от скатывания из-за действия сил тяжести). Мы можем записать, что вторая компонента равна $F_2 = mgH/L$, где мы ввели длину конвейера L . Необходимо определить массу зерна m , равномерно распределенную по конвейеру. Данная масса будет равна произведению длины L и линейной плотности массы λ (измеряется в кг/м). Такая λ определяется как

$$\lambda = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{\Delta m}{\Delta x} \frac{\Delta t}{\Delta t} = \frac{\mu}{v}. \quad (3)$$

Тогда мы приходим к выводу, что в любой момент времени на конвейере располагается зерно массы $m = L\mu/v$, а необходимая сила для предотвращения скатывания зерна равна

$$F_2 = \frac{\mu g H}{v}. \quad (4)$$

Получив общее выражение для компонент силы, необходимой для осуществления движения конвейера со скоростью v , мы должны определить ее минимальное значение. Запишем перед этим само выражение:

$$F = F_1 + F_2 = \mu \left(\frac{gH}{v} + v \right). \quad (5)$$

Единственным неизвестным параметром, который мы можем здесь варьировать, является скорость v . Чтобы найти минимальное значение силы нам необходимо взять от нее производную по скорости и приравнять ее к нулю. Выполнив данный шаг, мы приходим к следующему значению для скорости конвейера, которая минимизирует значение F :

$$v_{\min} = \sqrt{gH}. \quad (6)$$

Само же значение силы будет равно:

$$F_{\min} = 2\mu\sqrt{gH}. \quad (7)$$

Подставляем полученное значение для силы в выражение для

момента:

$$N_{\min} = 2\mu r \sqrt{gH}. \quad (8)$$

Теперь ответим на второй вопрос. Такая энергия будет равна работе сил двигателя для погрузки зерна массы M .

Работу можно определить через момент сил и количество вращений вала (суммарный угол вращения α в радианах), необходимых для погрузки зерна массы M . Определим значение α . Для этого надо определить длину полосы, на которой можно было бы разместить зерно массы M с плотностью λ . Такая полоса будет иметь длину $S = M/\lambda = Mv_{\min}/\mu = M\sqrt{gH}/\mu$. Отсюда легко вычисляется количество оборотов вала в радианах:

$$\alpha = \frac{M\sqrt{gH}}{\mu r}. \quad (9)$$

Сама же работа тогда будет равна:

$$A = N_{\min}\alpha = 2MgH, \quad (10)$$

что отличается от наивной оценки $3MgH/2$, которую можно извлечь через ЗСЭ, который здесь не применим из-за характера падения и разгона зерна.

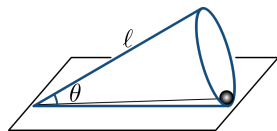
Ответ: $N_{\min} = 2\mu r \sqrt{gH}$, $A = 2MgH$.

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Общее выражение для момента N в виде произведения силы на радиус вала	0,25
2	Найдены силы F_1 и F_1	0,5+0,5
3	Выражение для момента N через неизвестную скорость	0,25
4	Нахождение предельного значения $N_{\min}$	0,5
5	Правильное выражение для работы	1,0

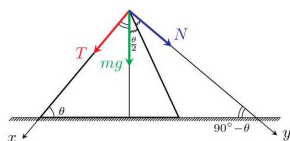
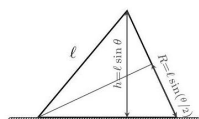
Задача 2. (5 баллов)

Полый круговой конус с длиной образующей боковой поверхности ℓ и углом при вершине θ закреплён на горизонтальной плоскости. Внутри конуса вблизи его основания находится маленький шарик, прикреплённый к вершине невесомой нерастяжимой нитью.



Шарику придают очень большую скорость в горизонтальном направлении, при этом он, не отрываясь от поверхности и без потери натяжения нити, делает полный оборот по круговой траектории. Затем, от запуска к запуску, начальную скорость шарика постепенно уменьшают.

Что в такой серии экспериментов случится раньше — обнулится сила натяжения нити или шарик оторвётся от поверхности? При каком значении начальной скорости это произойдёт?



На рисунках выше изображен конус в разрезе вертикальной плоскостью, проходящей через ось конуса. Видно, что высота h , на которую при движении по окружности поднимается шарик, а также радиус R основания конуса (совпадающий с радиусом траектории), равны

$$h = \ell \sin \theta, \quad R = \ell \sin(\theta/2) \quad (1)$$

Скорости в нижней (v) и верхней (u) точках траектории связаны, исходя из закона сохранения механической энергии, соотношением

$$\frac{mv^2}{2} = mgh + \frac{mu^2}{2} \Rightarrow v^2 = u^2 + 2gh \quad (2)$$

Для того, чтобы определить критические значения скорости, при которых раздельно происходит обнуление силы натяжения нити и силы реакции поверхности конуса (скорости u_T и u_N соответственно), запишем второй закон Ньютона в проекции на оси x и y :

$$\begin{cases} \frac{mu^2}{R} \sin(\theta/2) = T + mg \sin \theta \\ \frac{mu^2}{R} \cos(\theta/2) = N + mg \cos \theta \end{cases} \quad (3) \Rightarrow \begin{cases} \frac{u_T^2}{R} \sin(\theta/2) = g \sin \theta \\ \frac{u_N^2}{R} \cos(\theta/2) = g \cos \theta \end{cases}$$

Следовательно,

$$\left(\frac{u_T}{u_N}\right)^2 = \frac{\sin \theta}{\sin(\theta/2)} \frac{\cos(\theta/2)}{\cos \theta} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg}(\theta/2)} > 1 \Rightarrow u_T > u_N \quad (4)$$

Последнее означает, что критического значения скорости, при котором провисает нить, выше величины скорости, при которой обнуляется сила реакции конуса. Из этого делаем вывод, что в описываемом эксперименте (постепенное уменьшение стартовой скорости) сначала провиснет нить.

Чтобы найти соответствующее значение скорости в нижней точке, подставляем u_T из (4) в (2):

$$v_T^2 = Rg \frac{\sin \theta}{\sin(\theta/2)} + 2gh = \ell g \sin \theta + 2g\ell \sin \theta = 3\ell g \sin \theta \quad (5)$$

Окончательно,

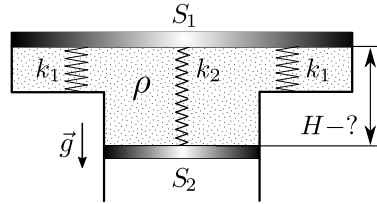
$$v_T = \sqrt{3\ell g \sin \theta}. \quad (6)$$

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Сделан верный рисунок с указанием сил и углов	1
2	Верно записан ЗСЭ	0,5
3	Верно записаны второй закон Ньютона в верхней точке (2 проекции) и выражение для критических скоростей	2,0
4	Получен ответ	1,5

Задача 3. (5 баллов)

По чертежу Знайки Винтик и Шпунтик соорудили весы для контроля веса Пончика. Они имеют симметричную Т-образную форму, а устроены так: между двумя пренебрежимо лёгкими поршнями площадями S_1 и S_2 , залита несжимаемая жидкость плотности ρ и закреплены пружины с коэффициентами жёсткости k_1 , k_2 и k_1 , причём в нерастянутом состоянии центральная пружина имеет длину h_0 .



Атмосферное давление в Цветочном городе сегодня равно p_0 .

- Какова будет длина H этой пружины в такой системе, если известно, что в равновесии крайние пружины не растянуты?
- На какую величину удлинится центральная пружина, если на весы встанет Пончик массой M ?

- а) Сила упругости, с которой тянет поршни центральная пружина, равна $k_2(H - h_0)$. Соответствующие силы упругости боковых пружин по условию равны нулю. Поэтому верхний поршень создаёт давление на жидкость, равное:

$$p_1 = k_2(H - h_0)/S_1 + p_0,$$

где p_0 — атмосферное давление.

Если добавить к нему давление столба жидкости высотой H , то мы получим соответствующую величину давления на внутреннюю часть поршня:

$$p_2 = p_1 + \rho g H.$$

Условие неподвижности нижнего поршня заключается в равенстве нулю равнодействующей сил. Если учесть помимо силы давления изнутри силу упругости пружины, а также силу давления атмосферы снаружи, то мы получим

следующее уравнение:

$$0 = -p_0 S_2 + p_2 S_2 - k_2(H - h_0).$$

После подстановки величин и соответствующих преобразований приходим к ответу:

$$H = \frac{k_2 h_0}{k_2 + \rho g \frac{S_1 S_2}{S_2 - S_1}}.$$

- б) После того, как Пончик встанет на весы, назовём Δx_1 смещение верхнего, а Δx_2 — нижнего поршей. По условию жидкость несжимаема, поэтому её суммарный объём не изменяется. Это можно формализовать как:

$$S_1 \Delta x_1 = S_2 \Delta x_2.$$

Найдём величину возникшего избыточного давления на жидкость со стороны верхнего поршня:

$$\Delta p_1 = \frac{Mg - 2k_1 \Delta x_1 + k_2(\Delta x_2 - \Delta x_1)}{S_1}.$$

Избыточное же давление жидкости на нижний поршень будет больше:

$$\Delta p_2 = \Delta p_1 + \rho g(\Delta x_2 - \Delta x_1).$$

Условие равновесия нижнего поршня в новой конфигурации есть баланс возникших избыточных сил давления и упругости пружины:

$$S_2 \Delta p_2 = k_2(\Delta x_2 - \Delta x_1).$$

Удлинение пружины есть $\Delta = \Delta x_2 - \Delta x_1$. После подстановки в последнее уравнение всех величин будет удобно перевыразить из первого уравнения смещение

верхнего поршня как:

$$\Delta x_1 = \frac{S_2}{S_1 - S_2}(\Delta x_2 - \Delta x_1) = \frac{S_2}{S_1 - S_2}\Delta.$$

Тогда получаем:

$$S_2 \rho g \Delta + \frac{S_2}{S_1} (Mg - 2k_1 \frac{S_2}{S_1 - S_2} \Delta + k_2 \Delta) = k_2 \Delta.$$

Откуда и следует после упрощений, что:

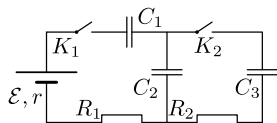
$$\Delta = \frac{Mg}{\frac{S_1 - S_2}{S_2} k_2 + \frac{2S_2}{S_1 - S_2} k_1 - \rho g S_1}$$

Критерии проверки

	Критерий	Баллы
1	Найдена длина H	2
2	Найдено удлинение пружины	3

Задача 4. (3 балла)

В электрической схеме замкнули ключ K_1 , дождались пока заряды перераспределятся, затем замкнули ключ K_2 и снова подождали достаточно длительное время. Определите, какое количество теплоты выделится в схеме после замыкания ключа K_2 .



Значения всех параметров схемы ($\mathcal{E}, r, R_1, R_2, C_1, C_2, C_3$) считайте известными.

В обоих режимах работы нет замкнутых контуров, не содержащих конденсаторов, поэтому в установившихся режимах конденсаторы заряжены, а ток не течет. В отсутствие тока падение напряжения на резисторах отсутствует, и для расчета стационарного состояния достаточно рассмотреть подключение источника к схеме из конденсаторов.

В первом случае схема соответствует последовательному соединению конденсаторов

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Во втором случае последовательное соединение конденсатора C_1 и параллельное соединение конденсаторов C_2 и C_3 приводит к емкости

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3}.$$

Внутренняя энергия, запасенная в конденсаторах, $W_0 = C_0 \mathcal{E}^2 / 2$ и $W = C \mathcal{E}^2 / 2$, соответственно. Работа по перемещению зарядов, совершенная источником,

$$A = \mathcal{E}(q - q_0),$$

где $q = C\mathcal{E}$ и $q_0 = C_0\mathcal{E}$ — заряды на эффективном конденсаторе.

Тогда выделившаяся теплота Q определяется изменением

внутренней энергии и работой, совершенной источником

$$Q = W - W_0 + A = \frac{(C - C_0)\mathcal{E}^2}{2} = \frac{C_1^2 C_3 \mathcal{E}^2}{2(C_1 + C_2)(C_1 + C_2 + C_3)}.$$

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Найдено правильное распределение зарядов на конденсаторах	1
2	Верно записан закон изменения энергии в системе	1
3	Получен верный ответ	1

Задача 5. (4 балла)

В распоряжении Никиты оказалось три одинаковых электродвигателя постоянного тока. К каждому из них прилагается идеальный источник напряжения с Э.Д.С., равной $\mathcal{E}$. Никита жёстко соединил якоря электродвигателей, расположив их соосно. Источники подключены так, что вращающие моменты первых двух двигателей противоположны друг другу. Оказалось, что для вращения якорей с угловой скоростью ω нужно прикладывать дополнительный вращающий момент. В зависимости от направления вращения, эти моменты отличаются в n раз.

Определите угловую скорость вращения каждого из двигателей без нагрузки. (*Трение в двигателях пренебрежимо мало, магнитное поле статоров создается постоянными магнитами*).

Сразу заметим, что в обоих описанных режимах работы двигателя, его мощность отрицательная, раз момент сил нужно прикладывать. Мощность P электродвигателя связана с крутящим моментом M следующим образом:

$$P = M\omega, \quad (1)$$

где ω — угловая скорость вращения ротора. Раз моменты отличаются в 3 раза при одной угловой скорости, то таким же является и отношение мощностей.

Э.Д.С. индукции (её абсолютное значение), возникающая в каждом из двигателей, пропорциональна угловой скорости вращения

$$\mathcal{E}_i = \alpha\omega, \quad (2)$$

причём коэффициент α одинаков для всех двигателей. Мощность P двигателя связана с силой тока в обмотке ротора соотношением

$$P = \mathcal{E}_i I. \quad (3)$$

Второе правило Кирхгофа для цепи, содержащей один

электродвигатель, позволяет написать

$$\mathcal{E} \pm \mathcal{E}_i = IR, \quad (4)$$

где R — полное сопротивление обмоток двигателя. Знак « $\pm$ » зависит от направления вращения. В нормальном режиме работы двигателя $P > 0$, $I > 0$, $\mathcal{E}_i > 0$.

Рассмотрим одновременное вращение трёх двигателей и запишем сразу три уравнения (4), описанных выше. Поскольку вращающие моменты каких-то двух двигателей противоположны, то все три знака « $\pm$ » в уравнениях не могут совпадать. Значит, при вращении в одну сторону два «+» и один «-», а при вращении в другую — наоборот.

Воспользуемся аддитивностью мощности и формулами (2) (3), чтобы найти мощность системы двигателей в каждом случае

$$P_1 = \alpha\omega \left(2 \cdot \frac{\mathcal{E} - \alpha\omega}{R} - \frac{\mathcal{E} + \alpha\omega}{R} \right) = \alpha\omega \cdot \frac{\mathcal{E} - 3\alpha\omega}{R}, \quad (5)$$

$$P_2 = \alpha\omega \left(-2 \cdot \frac{\mathcal{E} + \alpha\omega}{R} + \frac{\mathcal{E} - \alpha\omega}{R} \right) = -\alpha\omega \cdot \frac{\mathcal{E} + 3\alpha\omega}{R}. \quad (6)$$

Абсолютное значение мощности во втором случае больше. Используем известное отношение мощностей:

$$\frac{P_2}{P_1} = n \Leftrightarrow \frac{\mathcal{E} + 3\alpha\omega}{-\mathcal{E} + 3\alpha\omega} = n \Leftrightarrow \mathcal{E} = 3\alpha\omega \frac{n-1}{n+1}. \quad (7)$$

На холостом ходу мощность двигателя нулевая, тока в цепи ротора нет. Значит,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_i = \alpha\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\mathcal{E}}{\alpha} = 3\omega \frac{n-1}{n+1}. \quad (8)$$

Ответ. $3\omega \cdot \frac{n-1}{n+1}.$

Критерии оценивания

	Критерий	Баллы
1	Связь мощности и крутящего момента	1,0
2	Э.Д.С. индукции пропорциональна угловой скорости вращения ротора	0,5
3	Второе правило Кирхгофа для цепи, содержащей электродвигатель	0,5
4	Верная расстановка знаков в правилах Кирхгофа для каждого двигателя	0,5
5	Выражены мощности в каждом режиме работы	0,5+0,5
6	Окончательный ответ	0,5

Экспериментальный тур финального этапа

7-8 класс

Измерьте плотность:

- мела
- пластилина

Оборудование:

- линейка
- стакан с водой
- пустой стакан
- нитка
- кусок мела
- кусок пластилина

Опишите в отчете все измерения, которые вы проделали и приведите числовые результаты прямых измерений. Явно укажите все физические законы, применение которых необходимо для решения задачи выбранным способом. Проведите необходимые математические преобразования и расчёты.

Решение

Предлагаемый пластилин тонет в воде.

Для вычисления плотности пластилина необходимо вычислить его массу и объем.

Определим массу куска (или части) куска пластилина. Для этого лепим из пластилина лодочку, форма которой удобна для измерений и определения объема (например, прямой параллелепипед без верхней грани). Опускаем лодочку в стакан с водой. Лодочка должна плавать в воде так, чтобы вода доходила до верхних краев бортов лодочки. (можно слепить лодочку из части пластилина и подкладывать кусочки оставшегося пластилина для увеличения глубины погружения лодочки). При достижении указанных условий

$$m_{\text{пластилина}} g = \rho_{\text{воды}} g V_{\text{лодочки}}$$

Объем лодочки $V = abc$ (произведение длины, ширины и высоты лодочки, если лодочка — прямой параллелепипед).

Отсюда масса пластилина (части куска пластилина)

$$m_{\text{пластилина}} = \rho_{\text{воды}} V_{\text{лодочки}}$$

Для вычисления объема пластилина лепим из лодочки фигуру, объем которой нам известно как посчитать (например, куб). С помощью линейки измеряем длину ребра a и вычисляем объем пластилина

$$V_{\text{пластилина}} = a^3$$

Находим искомую плотность пластилина

$$\rho_{\text{пластилина}} = \frac{m_{\text{пластилина}}}{V_{\text{пластилина}}}$$

Для определения плотности мела можно использовать различные методы.

1. Найти центр тяжести линейки (используя в качестве

оси вращения край стола). Поместить на один край линейки кусок мела, а на другой — кусок пластилина. Чтобы не учитывать массу линейки, можно подбирать количество пластилина до момента, когда линейка начнет поворачиваться. По правилу рычага

$$m_{\text{пластилина}} l_{\text{от пластилина до оси вращения}} = m_{\text{мела}} l_{\text{от мела до оси вращения}}$$

$$m_{\text{мела}} = m_{\text{пластилина}} \frac{l_{\text{от пластилина до оси вращения}}}{l_{\text{от мела до оси вращения}}}$$

2. Можно слепить из пластилина лодочку и разместить в ней кусок мела. И повторить опыт из определения массы пластилина (измеряя объем лодочки) и того, что можно определить массу пластилина, зная его плотность.

$$m_{\text{мела}} = \rho_{\text{воды}} V_{\text{лодочки}} - m_{\text{пластилина}}$$

Определяем объем куска мела, измеряя геометрические параметры.

Определяем плотность мела

$$\rho_{\text{мела}} = \frac{m_{\text{мела}}}{V_{\text{мела}}}$$

Критерии оценивания

Разбалловка приведена для авторского проведения эксперимента. Если эксперимент проведен с явными нарушениями, то проверяющий вправе не засчитать выполнения задания (0 баллов). При проведении эксперимента не в представленном варианте баллы проставляются по аналогии с авторским решением с учетом поправки на методы определения величин участником олимпиады. Максимальное количество баллов — 10.

Критерий	Балл
Определен объем лодочки (для опыта с пластилином)	1
Определена масса пластилина	1
Определен объем использованного в лодочке пластилина	1
Определена плотность пластилина	1
Определена масса куска мела	1
Определен объем куска мела	1
Определена плотность мела	1
Измерения линейных величин проведены неоднократно	2
Результаты прямых измерений представлены с погрешностью	1

9 класс

С помощью предлагаемого оборудования вам предлагается исследовать колебания математического маятника. Необходимо:

- Измерить и на миллиметровой бумаге графически изобразить зависимость периода колебаний математического маятника от амплитуды колебаний, $T(\varphi_0)$, в широком диапазоне φ_0 .
- Известно, что зависимость периода от амплитуды может быть записана как

$$T(\varphi_0) \approx \tau_0 \cdot (1 + b \varphi_0^n),$$

где τ_0 — период малых колебаний, а b и n есть некоторые коэффициенты. Ваша задача состоит в том, чтобы найти b и n .

Во всех представляемых результатах амплитуда φ_0 должна быть выражена в радианах.

Оборудование:

- нить (2 м)
- гайка
- три листа миллиметровой бумаги
- секундомер
- запасная ручка (есть в наборе участника)
- кусок малярного скотча (дополнительное количество выдается по требованию)

Опишите в отчете все измерения, которые вы проделали и приведите числовые результаты прямых измерений. Явно укажите все физические законы, применение которых необходимо для решения задачи выбранным способом. Проведите необходимые математические преобразования и расчёты.

Решение

Период колебаний математического маятника при произвольной амплитуде колебаний в первом приближении описывается формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right)$$

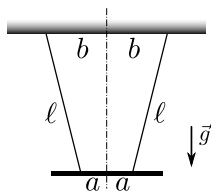
соответственно, искомые коэффициенты равны $b = 1/16, n = 2$.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Собрана и описана в отчете экспериментальная установка, принципиально позволяющая получить необходимый результат	1
Проведены многократные измерения усредненные по большому количеству периодов и их результаты приведены в отчете	2
Приведены графики полученных зависимостей	2
Определены искомые коэффициенты	3
Результаты представлены с погрешностью	2

10 класс

С помощью выданного оборудования вам предлагается исследовать крутильные колебания тонкого стержня на бифилярном подвесе. Бифилярный подвес – это механическая система с одной степенью свободы, которая состоит из массивного тела (в нашем случае – стержня) и двух нитей равной длины ℓ , верхние концы которых закреплены на одном уровне на расстоянии $2b$, а нижние привязаны к стержню. Расстояние между нижними концами равно $2a$.



- Из выданного оборудования соберите маятник на бифилярном подвесе. Внимание: стекло – хрупкий материал, обращайтесь со стеклянной палочкой аккуратно!
- Известно, что зависимость периода малых крутильных колебаний от параметров данной системы может быть описана формулой

$$T = C \cdot a^x \cdot b^y \cdot \ell^z,$$

где C – некоторая постоянная. Ваша задача: максимально точно найти значения степеней x , y , z .

- Проведите все необходимые измерения и расчеты. Оцените погрешность полученных результатов.

Оборудование:

- нить (три куса)
 - гайка
 - три листа миллиметровой бумаги
 - стеклянная палочка
 - кусок малярного скотча (дополнительное количество выдается по требованию)
-

Опишите в отчете все измерения, которые вы проделали и приведите числовые результаты прямых измерений. Явно укажите все физические законы, применение которых необходимо для решения задачи выбранным способом. Проведите необходимые математические преобразования и расчёты.

Решение

Период крутильных колебаний стержня описывается формулой

$$T = 2\pi \frac{a}{b} \sqrt{\frac{\ell}{3g}}$$

соответственно, искомые коэффициенты равны $x = 1, y = -1, z = 1/2$.

Критерии оценивания

Критерий	Балл
Собрана и описана в отчете экспериментальная установка, принципиально позволяющая получить необходимый результат	1
Проведены многократные измерения усредненные по большому количеству периодов и их результаты приведены в отчете	2
Приведены графики полученных зависимостей	2
Определены искомые коэффициенты	3
Результаты представлены с погрешностью	2

11 класс

С помощью выданного оборудования вам предлагается найти значение коэффициента трения скольжения выданной нити по поверхности стекла. Внимание: стекло — хрупкий материал, обращайтесь со стеклянной палочкой аккуратно!

Проведите все необходимые измерения и расчеты. Оцените погрешность полученных результатов.

Оборудование:

- нить
 - комплект гаек
 - три листа миллиметровой бумаги
 - стеклянная палочка
 - кусок малярного скотча (дополнительное количество выдается по требованию)
-

Опишите в отчете все измерения, которые вы проделали и приведите числовые результаты прямых измерений. Явно укажите все физические законы, применение которых необходимо для решения задачи выбранным способом. Проведите необходимые математические преобразования и расчёты.

Математическая подсказка: если для некоторой функции $f(x)$ выполняется следующее уравнение:

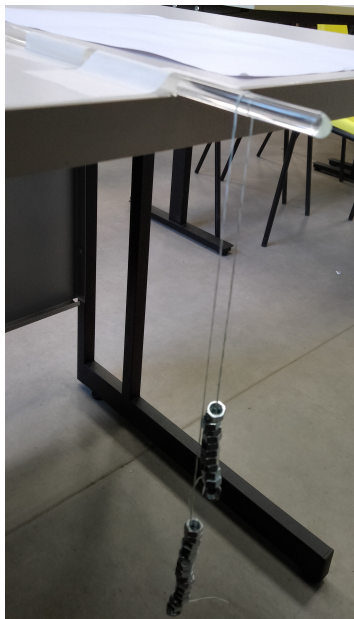
$$f'(x) = \alpha \cdot f(x),$$

где α — некоторая константа, а $f'(x)$ — производная функции $f(x)$, то тогда

$$f(x) = \text{Const} \cdot \exp(\alpha x).$$

Решение

Общий вид возможного варианта экспериментальной установки показан на фотографии.



Подбирая количество гаек на левой и правой частях нити можно добиться того, чтобы началось ее проскальзывание по палочке с минимальной скоростью. Отношение количества гаек на концах нити будет равно отношению сил натяжения ее концов $n_1/n_2 = T_1/T_2$. С помощью формулы Эйлера для трения в блоках $T_2 = T_1 \exp(\mu\alpha)$ получаем рабочую формулу для определения коэффициента трения:

$$\mu = \frac{\ln(n_2/n_1)}{\alpha},$$

где α - угол охвата. Улучшить качество полученного результата и оценить погрешность можно проводя измерения при различных значениях $\alpha = \pi, 3\pi, 5\pi \dots$

Критерии оценивания

Разбалловка приведена для авторского проведения эксперимента. При проведении эксперимента не в представленном варианте баллы проставляются по аналогии с авторским решением с учетом поправки на методы определения величин участником олимпиады. Максимальное количество баллов — 10.

Критерий	Балл
Собрана и подробно описана в отчете экспериментальная установка, принципиально позволяющая получить необходимый результат	2
Проведены многократные измерения и их результаты приведены в отчете	2
Представлено теоретическое обоснование или прямой вывод рабочей формулы с использованием формулы Эйлера для сухого трения	2
Приведены графики полученных зависимостей	1
Определен искомый коэффициент трения	2
Результаты прямых измерений представлены с погрешностью	1