Задания отборочного и заключительного этапов «Открытой олимпиады школьников» профиль математика (№62 Перечня олимпиад школьников) в 2019-2020 учебном году

Содержание

1 Задания с решениями заключительного этапа олимпиады

1.1 Задания для 11 класса

1 вариант

1. (2 балла) Докажите, что число $3^{3n}+17^{3n}+31^{3n}$ при нечётном n раскладывается в произведение хотя бы четырёх (не обязательно различных) натуральных чисел, больших единицы.

Доказательство: $3+31=34$ делится на 17, а значит то же самое выполняется и для суммы любых нечётных степеней. Это верно, так как a^m+b^m делится на $a+b$ при нечётном m. По-другому можно это доказать так: $31 \equiv -3 \pmod{17}$, значит $31^{3n} \equiv (-3)^{3n} \equiv -3^{3n}$ так как $3n$ нечётно.

Теперь рассмотрим остатки по модулю 9. 3^{3n} делится на 9. 17 в нечётной степени даёт при делении на 9 остаток 8, а в чётной — остаток 1. Число 31^3 даёт остаток 1 при делении на 9, а значит и любая нечётная степень куба даёт такой же остаток. Таким образом, сумма $3^{3n}+17^{3n}+31^{3n}$ делится на 9.

Мы получили уже три множителя: 3, 3 и 17. Кроме того $3^{3n}+17^{3n}+31^{3n} > 3\cdot 3\cdot 17 = 153$, поэтому есть хотя бы ещё один делитель.

2. (2 балла) График квадратного трёхчлена касается графика его производной. Докажите, что у трёхчлена нет корней.

Доказательство: Касание графиков означает, что разность многочлена и производной имеет единственный корень. Пусть трёхчлен равен ax^2+bx+c, тогда производная — это $2ax+b$.

Их разность равна $ax^2+(b-2a)x+(c-b)$. Её дискриминант должен быть равен 0, то есть $(b-2a)^2-4a(c-b)=0$, откуда $b^2-4ac=-4a^2<0$, то есть у трёхчлена нет корней.

3. (3 балла) На доске написаны четыре различных положительных числа. Известно, что это $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $y \neq \operatorname{ctg} x$, но неизвестно, в каком порядке. Всегда ли можно определить, где именно какое число?

Ответ: Нет, не всегда.

Решение: Докажем существование таких чисел x и z, что $\sin z = \operatorname{tg} x$, $\cos z = y = \sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}$ и, кроме того, $\cos x = \operatorname{tg} z = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}$. Тогда на доске находятся, во-первых, числа $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$, а, во-вторых, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ и невозможно определить, где какое число.

Решаем уравнение: $\cos x = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}$, откуда $\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}\cos^2 x = \sin x$. Возведя уравнение в квадрат и раскрыв тангенс, получаем $(\cos^2 x - \sin^2 x)\cos^2 x = \sin^2 x$. Обозначив $\sin^2 x = t$ получаем $(1-2t)(1-t)=t$ или $1-4t+2t^2=0$

Это уравнение имеет подходящий корень $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq \dfrac{1}{2}$. Осталось убедиться, что при таком значении $\sin^2 x$ все четыре числа различны. Это правда, так как числа из одной пары $\sin x$, $\cos x$, или $\sin z$, $\cos z$ совпадают при квадрате синуса равном $\dfrac{1}{2}$; совпадение чисел из разных пар означает равенство и вторых числел тоже, откуда тангенс угла равен его синусу или косинусу, что также не выполняется при найденном значении. Кроме того, все эти числа меньше единицы, поэтому котангенса среди них нет.

Можно также просто вычислить эти числа, это $\sqrt{\sqrt{2}-1}$, $\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt{1/2}}$, $\sqrt{1-\sqrt{1/2}}$

Замечание: Более простые варианты, при которых мы не можем однозначно распределить числа, не подходят из-за запрета равенства чисел или запрета наличия котангенса. В силу симметрии у задачи есть второе решение, в котором x и z меняются местами.

4. (3 балла) $ABCD$ — пирамида с правильным треугольником ABC в основании. Сфера радиуса 10 с центром в точке D проходит через середины сторон AD, BD и CD и касается грани ABC. Найдите объём пирамиды.

Ответ: $V_{ABCD} = 750\sqrt{3}$.

Решение: Пусть H — точка касания сферы и грани ABC. Тогда ADH, BDH и CDH — равные прямоугольные треугольники, в которых катет DH в два раза меньше гипотенузы.

По теореме Пифагора $AH = BH = CH = 10\sqrt{3}$. В правильном треугольнике ABC это радиус описанной окружности, откуда $S_{ABC} = S_{ABH}+S_{ACH}+S_{BCH} = 3S_{ABH} = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot(10\sqrt{3})^2\sin 120^\circ = 225\sqrt{3}$.

Соответственно, $V_{ABCD} = \frac{1}{3}DH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}\cdot 10\cdot 225\sqrt{3} = 750\sqrt{3}$.

5. (3 балла) На собрании присутствовали рыцари, всегда говорящие правду и лжецы, которые всегда лгут (точно есть и те и другие). Каждый сказал: «Я знаком хотя бы с 15 рыцарями на этом собрании» и «Я знаком хотя бы с 11 лжецами на этом собрании». Какое наименьшее количество человек могло собраться?

Ответ: 29

Решение: Поскольку есть хотя бы один рыцарь, а у него есть хотя бы 15 знакомых рыцарей, рыцарей хотя бы 16. 16 рыцарей знакомы в сумме хотя бы со 176 лжецами; в этой сумме каждый лжец посчитан не более 14 раз, так как лжецы лгут насчёт хотя бы 15 рыцарей, то есть у них не более 14 знакомых рыцарей у каждого. Это значит, что лжецов хотя бы $\dfrac{176}{14} > 12$, то есть хотя бы 13.

Пример очевидно существует и не единственен. Например: 16 рыцарей знакомы между собой, 13 лжецов между собой не знакомы; лжец с номером n знаком с рыцарями с номерами кроме n и $n+1$. Тогда рыцарь номер 16 знает 12 лжецов, рыцари 1 и 15 знают по 11 лжецов, остальные по 10.

6. (4 балла) В описанном пятиугольнике $ABCDE$ даны длины сторон $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 11$, $DE = 8$, $EA = 12$. Диагонали AC и BE пересекаются в точке M. Найдите отношение площадей треугольников AMD и BMD.

Ответ: 4

Решение: Обозначим точку касания вписанной окружности и стороны AB за X. Тогда точка M лежит на отрезке DX. Это следует, например, из теоремы Брианшона (которая гласит, что главные диагонали описанного шестиугольника пересекаются в одной точке) для вырожденного шестиугольника $AXBCDE$. Тогда $\dfrac{S_{AMD}}{S_{BMD}} = \dfrac{S_{ADX}-S_{AMX}}{S_{BDX}-S_{BMX}} = \dfrac{AX}{BX}$, поскольку $\dfrac{S_{ADX}}{S_{BDX}} = \dfrac{S_{AMX}}{S_{BMX}} = \dfrac{AX}{BX}$.

Обозначим отрезки касания, прилегающие к вершине A за a, к вершине B — за b и т.д., а полупериметр пятиугольника за p. Тогда $\dfrac{AX}{BX} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a+b+c+d+e-(b+c)-(d+e)}{a+b+c+d+e-(c+d)-(a+e)} = \dfrac{p-BC-ED}{p-CD-AE} = \dfrac{8}{2} = 4$

7. (4 балла) Куб $8\times8\times8$ состоит из 512 маленьких кубиков $1\times1\times1$ (назовём их ячейками). Ячейки называются соседними, если имеют общую грань — таким образом, у каждой ячейки не более 6 соседних.

В каждой ячейке записано неотрицательное число. Сумма чисел в ячейке и во всех соседних не менее 35. Докажите, что сумма чисел во всех ячейках куба строго больше 2560.

Доказательство: Для каждой ячейки посчитаем сумму чисел ней и в её соседях и сложим все эти суммы. Полученное число будет не менее $35\cdot 8^3 = 17920$.

Заметим, что каждое число было посчитано не более семи раз: для себя и для всех своих соседей. Поэтому общая сумма всех чисел не менее $17920 : 7 = 2560$.

Чтобы достигалось равенство, необходимо, чтобы, во-первых, достигалось равенство 35 в условии задачи, и, во-вторых, каждое ненулевое число суммировалось бы ровно семь раз, то есть, в каждой ячейке, у которой меньше семи соседей, стояло бы число 0.

Это невозможно: ячейки, которые считаются менее 7 раз — это ячейки, примыкающие к граням куба. Если расставить во всех этих ячейках нули, сумма чисел в угловой ячейке и её соседях также будет равна 0, а вовсе не 35.

8. (5 баллов) Последовательность x_n задана условиями $x_1 = \dfrac{5}{3}$ и $x_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{x_n}$. Найдите x_{100}.

Ответ: $x_{100} = \dfrac{3^{100}+2}{3^{99}+2}$

Решение: Перебрав несколько первых членов последовательности, можно заметить, что числитель предыдущего является знаменателем следующего.

Определим последовательность y_n следующим образом: $y_0 = 3$, $y_1 = 5$, $y_n = x_n y_{n-1}$, то есть $x_n = \dfrac{y_n}{y_{n-1}}$. Подставив это представление x_n в рекуррентную формулу, мы получим $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = 4 - \dfrac{3y_{n-1}}{y_n}$, откуда $y_{n+1} = 4y_n - 3y_{n-1}$.

Члены последовательности y_n имеют вид 3, 5, 11, 29, 83, ... Можно заметить, что разность двух соседних членов каждый раз увеличивается в три раза, что характерно для геометрической прогрессии со знаменателем 3. Значит, имеет смысл искать y_n как $3^n a + b$ — можно проверить, что такая любая такая последовательность удовлетворяет рекуррентной формуле. Подставляя начальные значения и решая систему уравнений, находим $a = 1$ и $b = 2$, откуда $x_n = \dfrac{3^n+2}{3^{n-1}+2}$ и $x_{100} = \dfrac{3^{100}+2}{3^{99}+2}$.

2 вариант

1. (2 балла) Докажите, что число $3^{3n}+23^{3n}+43^{3n}$ при нечётном n раскладывается в произведение хотя бы четырёх (не обязательно различных) натуральных чисел, больших единицы.

Доказательство: $3+43=46$ делится на 23, а значит то же самое выполняется и для суммы любых нечётных степеней. Это верно, так как a^m+b^m делится на $a+b$ при нечётном m. Подругому можно это доказать так: $43 \equiv -3 \pmod{23}$, значит $43^{3n} \equiv (-3)^{3n} \equiv -3^{3n}$ так как $3n$ нечётно.

Теперь рассмотрим остатки по модулю 9. 3^{3n} делится на 9. Число 23 даёт при делении на 9 остаток 5, а значит число 23^3 даёт такой же остаток, как и $5^3=125$, то есть 8, а 23^6 даёт остаток 1. Дальше остатки зацикливаются и 23^{3n} даёт остаток 8 при нечётном n и остаток 1 при чётном. Число 43 даёт при делении на 9 остаток 7, а значит число 43^3 даёт такой же остаток, как и $7^3=343$, то есть 1.Значит 43^{3n} даёт остаток 1 при делении на 9. Таким образом, сумма $3^{3n}+23^{3n}+43^{3n}$ делится на 9.

Мы получили уже три множителя: 3, 3 и 23. Кроме того $3^{3n}+17^{3n}+31^{3n}>3\cdot 3\cdot 23=207$, поэтому есть хотя бы ещё один делитель.

2. (2 балла) График квадратного трёхчлена ax^2+bx+c с положительным сташим коэффициентом a касается графика его производной. Докажите, что $c \geqslant a$.

Доказательство: Касание графиков означает, что разность многочлена и производной имеет единственный корень. Пусть трёхчлен равен ax^2+bx+c, тогда производная — это $2ax+b$.

Их разность равна $ax^2+(b-2a)x+(c-b)$. Её дискриминант должен быть равен 0, то есть $(b-2a)^2-4a(c-b)=0$, откуда $b^2=4ac-4a^2=4a(c-a)\geqslant 0$, откуда $c\geqslant a$.

3. (3 балла) На доске написаны четыре различных положительных числа. Известно, что это $\sin x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{tg} x$ и $y \neq \cos x$, но неизвестно, в каком порядке. Всегда ли можно определить, где именно какое число?

Ответ: Нет, не всегда.

Решение: Докажем существование таких чисел x и z, что $\operatorname{tg} z=\sin x$, $\operatorname{ctg} z = y = \dfrac{1}{\sin x}$ и, кроме того, $\operatorname{ctg} x=\sin z$. Тогда на доске находятся, во-первых, числа $\sin x$, $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{tg} x$, а, во-вторых, $\sin z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{tg} z$ и невозможно определить, где какое число.

Возведём равенство $\operatorname{ctg} x=\sin z$ в степень минус два (мы это можем делать, так как всё равно ищем положительные решения) и получим $\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 z}=\operatorname{ctg}^2 z+1=\dfrac{1}{\sin x^2}+1$. Таким образом, нам необходимо решить уравнение $\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\sin x^2}+1$, что, после замены $t=\cos^2 x$ превращается в $\dfrac{1}{t}-1=\dfrac{1}{1-t}+1$, откуда $(1-t)-t(1-t)=t+t(1-t)$ или $2t^2-4t+1$

Это уравнение имеет подходящий корень $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\neq 1$. Осталось убедиться, что при таком значении $\cos^2 x$ все четыре числа различны. Это правда, так как числа из одной пары $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, или $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ совпадают при квадрате косинуса равном 1; совпадение чисел из разных пар означает равенство и вторых числел тоже, откуда синус угла равен его тангенсу или котангенсу, что также не выполняется при найденном значении. Кроме того, *cosx* отсутствует на доске, так как $y>1$; аналогично для $\cos z$.

Можно также просто вычислить эти числа, это $\sqrt{\sqrt{2}-1}$, $\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt{1/2}}$, $\sqrt{1-\sqrt{1/2}}$

Замечание: Более простые варианты, при которых мы не можем однозначно распределить числа, не подходят из-за запрета равенства чисел или запрета наличия косинуса. В силу симметрии у задачи есть второе решение, в котором x и z меняются местами.

4. (3 балла) $ABCD$ — пирамида с правильным треугольником ABC в основании. Сфера радиуса 10 с центром в точке D пересекает стороны AD, BD и CD в отношении $2:1$ (считая от вершины D) и касается грани ABC. Найдите объём пирамиды.

Ответ: $V_{ABCD} = \dfrac{625\sqrt{3}}{2}$.

Решение: Пусть H — точка касания сферы и грани ABC. Тогда ADH, BDH и CDH — равные прямоугольные треугольники, в которых катет DH в полтора раза меньше гипотенузы.

По теореме Пифагора $AH = BH = CH = 5\sqrt{5}$. В правильном треугольнике ABC это радиус описанной окружности, откуда $S_{ABC} = S_{ABH} + S_{ACH} + S_{BCH} = 3S_{ABH} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (5\sqrt{5})^2 \sin 120^\circ = \dfrac{375\sqrt{3}}{4}$.

Соответственно, $V_{ABCD} = \frac{1}{3} DH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot \dfrac{375\sqrt{3}}{4} = \dfrac{625\sqrt{3}}{2}$.

5. (3 балла) На собрании присутствовали рыцари, всегда говорящие правду и лжецы, которые всегда лгут (точно есть и те и другие). Каждый сказал: «Я знаком хотя бы с 14 рыцарями на этом собрании» и «Я знаком хотя бы с 10 лжецами на этом собрании». Какое наименьшее количество человек могло собраться?

Ответ: 27

Решение: Поскольку есть хотя бы один рыцарь, а у него есть хотя бы 14 знакомых рыцарей, рыцарей хотя бы 15. 15 рыцарей знакомы в сумме хотя бы со 150 лжецами; в этой сумме каждый лжец посчитан не более 13 раз, так как лжецы лгут насчёт хотя бы 14 рыцарей, то есть у них не более 13 знакомых рыцарей у каждого. Это значит, что лжецов хотя бы $\dfrac{150}{13} > 11$, то есть хотя бы 12.

Пример очевидно существует и не единственен. Например: 15 рыцарей знакомы между собой, 12 лжецов между собой не знакомы; лжец с номером n знаком с рыцарями с номерами кроме n и $n+1$. Тогда рыцарь номер 15 знает 12 лжецов, рыцари 1 и 14 знают по 11 лжецов, остальные по 10.

6. (4 балла) В описанном пятиугольнике $ABCDE$ даны длины сторон $AB = 11$, $BC = 9$, $CD = 10$, $DE = 14$, $EA = 12$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке M. Найдите отношение площадей треугольников CME и BME.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$

Решение: Обозначим точку касания вписанной окружности и стороны BC за X. Тогда точка M лежит на отрезке EX. Это следует, например, из теоремы Брианшона (которая гласит, что главные диагонали описанного шестиугольника пересекаются в одной точке) для вырожденного шестиугольника $ABXCDE$. Тогда $\dfrac{S_{CME}}{S_{BME}} = \dfrac{S_{CEX} - S_{CMX}}{S_{BEX} - S_{BMX}} = \dfrac{CX}{BX}$, поскольку $\dfrac{S_{CEX}}{S_{BEX}} = \dfrac{S_{CMX}}{S_{BMX}} = \dfrac{CX}{BX}$.

Обозначим отрезки касания, прилегающие к вершине A за a, к вершине B — за b и т.д., а полупериметр пятиугольника за p. Тогда $\dfrac{CX}{BX} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+b+c+d+e-(a+b)-(d+e)}{a+b+c+d+e-(c+d)-(a+e)} = \dfrac{p - AB - ED}{p - CD - AE} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

7. (4 балла) Куб $7 \times 7 \times 7$ состоит из 343 маленьких кубиков $1 \times 1 \times 1$ (назовём их ячейками). Ячейки называются соседними, если имеют общую грань — таким образом, у каждой ячейки не более 6 соседних.

В каждой ячейке записано неотрицательное число. Сумма чисел в ячейке и во всех соседних не менее 10. Докажите, что сумма чисел во всех ячейках куба строго больше 490.

Доказательство: Для каждой ячейки посчитаем сумму чисел ней и в её соседях и сложим все эти суммы. Полученное число будет не менее $10 \cdot 7^3 = 3430$.

Заметим, что каждое число было посчитано не более семи раз: для себя и для всех своих соседей. Поэтому общая сумма всех чисел не менее $3430 : 7 = 490$.

Чтобы достигалось равенство, необходимо, чтобы, во-первых, достигалось равенство 10 в условии задачи, и, во-вторых, каждое ненулевое число суммировалось бы ровно семь раз, то есть, в каждой ячейке, у которой меньше семи соседей, стояло бы число 0.

Это невозможно: ячейки, которые считаются менее 7 раз — это ячейки, примыкающие к граням куба. Если расставить во всех этих ячейках нули, сумма чисел в угловой ячейке и её соседях также будет равна 0, а вовсе не 10.

8. (5 баллов) Последовательность x_n задана условиями $x_1 = \dfrac{5}{3}$ и $x_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{x_n}$. Найдите x_{100}.

Ответ: $x_{100} = \dfrac{2^{101}+1}{2^{100}+1}$.

Решение: Перебрав несколько первых членов последовательности, можно заметить, что числитель предыдущего является знаменателем следующего.

Определим последовательность y_n следующим образом: $y_0 = 3$, $y_1 = 5$, $y_n = x_n y_{n-1}$, то есть $x_n = \dfrac{y_n}{y_{n-1}}$. Подставив это представление x_n в рекуррентную формулу, мы получим $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = 3 - \dfrac{2y_{n-1}}{y_n}$, откуда $y_{n+1} = 3y_n - 2y_{n-1}$.

Члены последовательности y_n имеют вид 3, 5, 9, 17, 33, ... Можно заметить, что разность двух соседних членов каждый раз увеличивается в два раза, что характерно для геометрической прогрессии со знаменателем 2. Значит, имеет смысл искать y_n как $2^n a + b$ — можно проверить, что такая любая такая последовательность удовлетворяет рекуррентной формуле. Подставляя начальные значения и решая систему уравнений, находим $a = 2$ и $b = 1$, откуда $x_n = \dfrac{2 \cdot 2^n + 1}{2 \cdot 2^{n-1} + 1}$ и $x_{100} = \dfrac{2 \cdot 2^{100} + 1}{2 \cdot 2^{99} + 1} = \dfrac{2^{101}+1}{2^{100}+1}$.

3 вариант

1. (2 балла) Докажите, что число $3^{3n}+11^{3n}+19^{3n}$ при нечётном n раскладывается в произведение хотя бы четырёх (не обязательно различных) натуральных чисел, больших единицы.

Доказательство: $3+19=22$ делится на 11, а значит то же самое выполняется и для суммы любых нечётных степеней. Это верно, так как a^m+b^m делится на $a+b$ при нечётном m. По-другому можно это доказать так: $19 \equiv -3 \pmod{11}$, значит $19^{3n} \equiv (-3)^{3n} \equiv -3^{3n}$ так как $3n$ нечётно.

Теперь рассмотрим остатки по модулю 9. 3^{3n} делится на 9. 19 в любой степени даёт при делении на 9 остаток 1. Число 11 даёт при делении на 9 остаток 2, а значит число 11^3 даёт остаток 8, а 11^6 даёт остаток 1. Дальше остатки зацикливаются и 29^{3n} даёт остаток 8 при нечётном n и остаток 1 при чётном. Таким образом, сумма $3^{3n}+29^{3n}+55^{3n}$ делится на 9.

Мы получили уже три множителя: 3, 3 и 11. Кроме того $3^{3n}+11^{3n}+19^{3n} > 3\cdot 3\cdot 11 = 99$, поэтому есть хотя бы ещё один делитель.

2. (2 балла) График квадратного трёхчлена касается графика его производной. Докажите, что у трёхчлена нет корней.

Доказательство: Касание графиков означает, что разность многочлена и производной имеет единственный корень. Пусть трёхчлен равен ax^2+bx+c, тогда производная — это $2ax+b$.

Их разность равна $ax^2+(b-2a)x+(c-b)$. Её дискриминант должен быть равен 0, то есть $(b-2a)^2-4a(c-b)=0$, откуда $b^2-4ac=-4a^2<0$, то есть у трёхчлена нет корней.

3. (3 балла) На доске написаны четыре различных положительных числа. Известно, что это $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$ и $y \neq \operatorname{tg} x$, но неизвестно, в каком порядке. Всегда ли можно определить, где именно какое число?

Ответ: Нет, не всегда.

Решение: Докажем существование таких чисел x и z, что $\sin z = \operatorname{ctg} x$, $\cos z = y = \sqrt{1-\operatorname{ctg}^2 x}$ и, кроме того, $\cos x = \operatorname{ctg} z = \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2 x}}{\operatorname{ctg} x}$. Тогда на доске находятся, во-первых, числа $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{ctg} x$, а, во-вторых, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{ctg} z$ и невозможно определить, где какое число.

Решаем уравнение: $\cos x = \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2 x}}{\operatorname{ctg} x}$, откуда $\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2 x}\sin x = \cos^2 x$. Возведя уравнение в квадрат и раскрыв котангенс, получаем $(\sin^2 x - \cos^2 x) = \cos^4 x$. Обозначив $\cos^2 x = t$ получаем $(1-2t)=t^2$ или $-1+2t+t^2=0$

Это уравнение имеет подходящий корень $\sqrt{2}-1 \neq \dfrac{1}{2}$. Осталось убедиться, что при таком значении $\sin^2 x$ все четыре числа различны. Это правда, так как числа из одной пары $\sin x$, $\cos x$, или $\sin z$, $\cos z$ совпадают при квадрате синуса равном $\dfrac{1}{2}$; совпадение чисел из разных пар означает равенство и вторых числел тоже, откуда котангенс угла равен его синусу или косинусу, что также не выполняется при найденном значении. Кроме того, все эти числа меньше единицы, поэтому тангенса среди них нет.

Можно также просто вычислить эти числа, это $\sqrt{\sqrt{2}-1}$, $\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt{1/2}}$, $\sqrt{1-\sqrt{1/2}}$

Замечание: Более простые варианты, при которых мы не можем однозначно распределить числа, не подходят из-за запрета равенства чисел или запрете наличия тангенса.

4. (3 балла) $ABCD$ — пирамида с правильным треугольником ABC в основании. Сфера радиуса 20 с центром в точке D проходит через середины сторон AD, BD и CD и касается грани ABC. Найдите объём пирамиды.

Ответ: $V_{ABCD} = 750\sqrt{3}$.

Решение: Пусть H — точка касания сферы и грани ABC. Тогда ADH, BDH и CDH — равные прямоугольные треугольники, в которых катет DH в два раза меньше гипотенузы.

По теореме Пифагора $AH=BH=CH=20\sqrt{3}$. В правильном треугольнике ABC это радиус описанной окружности, откуда $S_{ABC} = S_{ABH}+S_{ACH}+S_{BCH} = 3S_{ABH} = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot(20\sqrt{3})^2\sin 120^\circ = 900\sqrt{3}$.

Соответственно, $V_{ABCD} = \frac{1}{3} DH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 900\sqrt{3} = 6000\sqrt{3}$.

5. (3 балла) На собрании присутствовали рыцари, всегда говорящие правду и лжецы, которые всегда лгут (точно есть и те и другие). Каждый сказал: «Я знаком хотя бы с 16 рыцарями на этом собрании» и «Я знаком хотя бы с 12 лжецами на этом собрании». Какое наименьшее количество человек могло собраться?

Ответ: 31

Решение: Поскольку есть хотя бы один рыцарь, а у него есть хотя бы 16 знакомых рыцарей, рыцарей хотя бы 17. 17 рыцарей знакомы в сумме хотя бы с 204 лжецами; в этой сумме каждый лжец посчитан не более 15 раз, так как лжецы лгут насчёт хотя бы 16 рыцарей, то есть у них не более 15 знакомых рыцарей у каждого. Это значит, что лжецов хотя бы $\dfrac{204}{15} > 13$, то есть хотя бы 14.

Пример очевидно существует и не единственен. Например: 17 рыцарей знакомы между собой, 14 лжецов между собой не знакомы; лжец с номером n знаком с рыцарями с номерами кроме n и $n+1$ Тогда рыцарь номер 17 знает 14 лжецов, рыцари 1 и 16 знают по 13 лжецов, остальные по 12.

6. (4 балла) В описанном пятиугольнике $ABCDE$ даны длины сторон $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 12$, $DE = 8$, $EA = 7$. Диагонали AD и CE пересекаются в точке M. Найдите отношение площадей треугольников BME и BMD.

Ответ: $\dfrac{1}{7}$

Решение: Обозначим точку касания вписанной окружности и стороны DE за X. Тогда точка M лежит на отрезке BX. Это следует, например, из теоремы Брианшона (которая гласит, что главные диагонали описанного шестиугольника пересекаются в одной точке) для вырожденного шестиугольника $ABCDXE$. Тогда $\dfrac{S_{BME}}{S_{BMD}} = \dfrac{S_{BEX} - S_{EMX}}{S_{BDX} - S_{DMX}} = \dfrac{EX}{DX}$, поскольку $\dfrac{S_{BEX}}{S_{BDX}} = \dfrac{S_{EMX}}{S_{DMX}} = \dfrac{EX}{DX}$.

Обозначим отрезки касания, прилегающие к вершине A за a, к вершине B — за b и т.д., а полупериметр пятиугольника за p. Тогда $\dfrac{EX}{DX} = \dfrac{e}{d} = \dfrac{a+b+c+d+e-(a+b)-(c+d)}{a+b+c+d+e-(b+c)-(a+e)} = \dfrac{p-AB-CD}{p-BC-AE} = \dfrac{1}{7}$

7. (4 балла) Куб $10 \times 10 \times 10$ состоит из 1000 маленьких кубиков $1 \times 1 \times 1$ (назовём их ячейками). Ячейки называются соседними, если имеют общую грань — таким образом, у каждой ячейки не более 6 соседних.

В каждой ячейке записано неотрицательное число. Сумма чисел в ячейке и во всех соседних не менее 70. Докажите, что сумма чисел во всех ячейках куба строго больше 10000.

Доказательство: Для каждой ячейки посчитаем сумму чисел ней и в её соседях и сложим все эти суммы. Полученное число будет не менее $70 \cdot 10^3 = 70000$.

Заметим, что каждое число было посчитано не более семи раз: для себя и для всех своих соседей. Поэтому общая сумма всех чисел не менее $70000 : 7 = 10000$.

Чтобы достигалось равенство, необходимо, чтобы, во-первых, достигалось равенство 70 в условии задачи, и, во-вторых, каждое ненулевое число суммировалось бы ровно семь раз, то есть, в каждой ячейке, у которой меньше семи соседей, стояло бы число 0.

Это невозможно: ячейки, которые считаются менее 7 раз — это ячейки, примыкающие к граням куба. Если расставить во всех этих ячейках нули, сумма чисел в угловой ячейке и её соседях также будет равна 0, а вовсе не 70.

8. (5 баллов) Последовательность x_n задана условиями $x_1 = \dfrac{7}{3}$ и $x_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{x_n}$. Найдите x_{100}.

Ответ: $x_{100} = \dfrac{2 \cdot 3^{100} + 1}{2 \cdot 3^{99} + 1}$

Решение: Перебрав несколько первых членов последовательности, можно заметить, что числитель предыдущего является знаменателем следующего.

Определим последовательность y_n следующим образом: $y_0 = 3$, $y_1 = 7$, $y_n = x_n y_{n-1}$, то есть $x_n = \frac{y_n}{y_{n-1}}$. Подставив это представление x_n в рекуррентную формулу, мы получим $\frac{y_{n+1}}{y_n} = 4 - \frac{3y_{n-1}}{y_n}$, откуда $y_{n+1} = 4y_n - 3y_{n-1}$.

Члены последовательности y_n имеют вид 3, 7, 19, 55, 163, … Можно заметить, что разность двух соседних членов каждый раз увеличивается в три раза, что характерно для геометрической прогрессии со знаменателем 3. Значит, имеет смысл искать y_n как $3^n a + b$ — можно проверить, что такая любая такая последовательность удовлетворяет рекуррентной формуле. Подставляя начальные значения и решая систему уравнений, находим $a = 2$ и $b = 1$, откуда $x_n = \frac{2 \cdot 3^n + 1}{2 \cdot 3^{n-1} + 1}$ и $x_{100} = \frac{2 \cdot 3^{100} + 1}{2 \cdot 3^{99} + 1}$.

4 вариант

1. (2 балла) Докажите, что число $3^{3n}+29^{3n}+55^{3n}$ при нечётном n раскладывается в произведение хотя бы четырёх (не обязательно различных) натуральных чисел, больших единицы.

Доказательство: $3+55=58$ делится на 29, а значит то же самое выполняется и для суммы любых нечётных степеней. Это верно, так как a^m+b^m делится на $a+b$ при нечётном m. По-другому можно это доказать так: $55 \equiv -3 \pmod{29}$, значит $55^{3n} \equiv (-3)^{3n} \equiv -3^{3n}$ так как $3n$ нечётно.

Теперь рассмотрим остатки по модулю 9. 3^{3n} делится на 9. 55 в любой степени даёт при делении на 9 остаток 1. Число 29 даёт при делении на 9 остаток 2, а значит число 29^3 даёт остаток 8, а 29^6 даёт остаток 1. Дальше остатки зацикливаются и 29^{3n} даёт остаток 8 при нечётном n и остаток 1 при чётном. Таким образом, сумма $3^{3n}+29^{3n}+55^{3n}$ делится на 9.

Мы получили уже три множителя: 3, 3 и 29. Кроме того $3^{3n}+29^{3n}+55^{3n} > 3\cdot 3\cdot 29 = 261$, поэтому есть хотя бы ещё один делитель.

2. (2 балла) График квадратного трёхчлена ax^2+bx+c с отрицательным сташим коэффициентом a касается графика его производной. Докажите, что $c \leqslant a$.

Доказательство: Касание графиков означает, что разность многочлена и производной имеет единственный корень. Пусть трёхчлен равен ax^2+bx+c, тогда производная — это $2ax+b$.

Их разность равна $ax^2+(b-2a)x+(c-b)$. Её дискриминант должен быть равен 0, то есть $(b-2a)^2-4a(c-b)=0$, откуда $b^2=4ac-4a^2=4a(c-a)\geqslant 0$, откуда $c\leqslant a$.

3. (3 балла) На доске написаны четыре различных положительных числа. Известно, что это $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{tg} x$ и $y \neq \sin x$, но неизвестно, в каком порядке. Всегда ли можно определить, где именно какое число?

Ответ: Нет, не всегда.

Решение: Докажем существование таких чисел x и z, что $\operatorname{tg} z = \cos x$, $\operatorname{ctg} z = y = \dfrac{1}{\cos x}$ и, кроме того, $\operatorname{ctg} x = \cos z$. Тогда на доске находятся, во-первых, числа $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{tg} x$, а, во-вторых, $\cos z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{tg} z$ и невозможно определить, где какое число.

Возведём равенство $\operatorname{ctg} x = \cos z$ в степень минус два (мы это можем делать, так как всё равно ищем положительные решения) и получим $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 z} = \operatorname{tg}^2 z + 1 = \cos x^2 + 1$. Таким образом, нам необходимо решить уравнение $\operatorname{tg}^2 x = \cos x^2 + 1$, что, после замены $t=\cos^2 x$ превращается в $\dfrac{1}{t}-1=t+1$, откуда $(1-t)=t^2+t$ или $t^2+2t-1=0$

Это уравнение имеет подходящий корень $\sqrt{2}-1\neq 1$. Осталось убедиться, что при таком значении $\cos^2 x$ все четыре числа различны. Это правда, так как числа из одной пары $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, или $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ совпадают при квадрате косинуса равном 1; совпадение чисел из разных пар означает равенство и вторых числел тоже, откуда синус угла равен его тангенсу или котангенсу, что также не выполняется при найденном значении. Кроме того, $sinx$ отсутствует на доске, так как $y>1$; аналогично для $\sin z$.

Замечание: Более простые варианты, при которых мы не можем однозначно распределить числа, не подходят из-за запрета равенства чисел или запрета наличия синуса. В силу симметрии у задачи есть второе решение, в котором x и z меняются местами.

Можно также просто вычислить эти числа, это $\sqrt{\sqrt{2}-1}$, $\sqrt{\sqrt{2}+1}$, $\sqrt{\sqrt{2}}$, $\sqrt{1-\sqrt{1/2}}$

4. (3 балла) $ABCD$ — пирамида с правильным треугольником ABC в основании. Сфера радиуса 20 с центром в точке D пересекает стороны AD, BD и CD в отношении $3:1$ (считая от вершины D) и касается грани ABC. Найдите объём пирамиды.

Ответ: $V_{ABCD} = \dfrac{14000\sqrt{3}}{9}$

Решение: Пусть H — точка касания сферы и грани ABC. Тогда ADH, BDH и CDH — равные прямоугольные треугольники, в которых катет DH в $\frac{4}{3}$ раза меньше гипотенузы.

По теореме Пифагора $AH = BH = CH = \dfrac{20\sqrt{7}}{3}$. В правильном треугольнике ABC это радиус описанной окружности, откуда $S_{ABC} = S_{ABH}+S_{ACH}+S_{BCH} = 3S_{ABH} = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\dfrac{(20\sqrt{7})^2}{3^2}\sin 120^\circ = \dfrac{700\sqrt{3}}{3}$.

Соответственно, $V_{ABCD} = \frac{1}{3}DH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}\cdot 20\cdot\dfrac{700\sqrt{3}}{3} = \dfrac{14000\sqrt{3}}{9}$.

5. (3 балла) На собрании присутствовали рыцари, всегда говорящие правду и лжецы, которые всегда лгут (точно есть и те и другие). Каждый сказал: «Я знаком хотя бы с 13 рыцарями на этом собрании» и «Я знаком хотя бы с 10 лжецами на этом собрании». Какое наименьшее количество человек могло собраться?

Ответ: 26

Решение: Поскольку есть хотя бы один рыцарь, а у него есть хотя бы 13 знакомых рыцарей, рыцарей хотя бы 14. 14 рыцарей знакомы в сумме хотя бы со 140 лжецами; в этой сумме каждый лжец посчитан не более 12 раз, так как лжецы лгут насчёт хотя бы 13 рыцарей, то есть у них не более 12 знакомых рыцарей у каждого. Это значит, что лжецов хотя бы $\dfrac{140}{12} > 11$, то есть хотя бы 12.

Пример очевидно существует и не единственен. Например: 14 рыцарей знакомы между собой, 12 лжецов между собой не знакомы; лжец с номером n знаком с рыцарями с номерами кроме n и $n+1$. Тогда рыцарь номер 14 знает 12 лжецов, рыцари 1 и 13 знают по 11 лжецов, остальные по 10.

6. (4 балла) В описанном пятиугольнике $ABCDE$ даны длины сторон $AB = 11$, $BC = 10$, $CD = 13$, $DE = 14$, $EA = 12$. Диагонали AD и BE пересекаются в точке M. Найдите отношение площадей треугольников AMC и EMC.

Ответ: 1

Решение: Обозначим точку касания вписанной окружности и стороны AE за X. Тогда точка M лежит на отрезке CX. Это следует, например, из теоремы Брианшона (которая гласит, что главные диагонали описанного шестиугольника пересекаются в одной точке) для вырожденного шестиугольника $ABCDEX$. Тогда $\dfrac{S_{AMC}}{S_{EMC}} = \dfrac{S_{ACX} - S_{AMX}}{S_{ECX} - S_{EMX}} = \dfrac{AX}{EX}$, поскольку $\dfrac{S_{ACX}}{S_{ECX}} = \dfrac{S_{AMX}}{S_{EMX}} = \dfrac{AX}{EX}$.

Обозначим отрезки касания, прилегающие к вершине A за a, к вершине B — за b и т.д., а полупериметр пятиугольника за p. Тогда $\dfrac{AX}{EX} = \dfrac{a}{e} = \dfrac{a+b+c+d+e-(b+c)-(d+e)}{a+b+c+d+e-(c+d)-(a+b)} = \dfrac{p-BC-ED}{p-CD-AB} = \dfrac{6}{6} = 1$

7. (4 балла) Куб $5\times5\times5$ состоит из 125 маленьких кубиков $1\times1\times1$ (назовём их ячейками). Ячейки называются соседними, если имеют общую грань — таким образом, у каждой ячейки не более 6 соседних.

В каждой ячейке записано неотрицательное число. Сумма чисел в ячейке и во всех соседних не менее 14. Докажите, что сумма чисел во всех ячейках куба строго больше 250.

Доказательство: Для каждой ячейки посчитаем сумму чисел ней и в её соседях и сложим все эти суммы. Полученное число будет не менее $14 \cdot 125 = 1750$.

Заметим, что каждое число было посчитано не более семи раз: для себя и для всех своих соседей. Поэтому общая сумма всех чисел не менее $1750 : 7 = 250$.

Чтобы достигалось равенство, необходимо, чтобы, во-первых, достигалось равенство 14 в условии задачи, и, во-вторых, каждое ненулевое число суммировалось бы ровно семь раз, то есть, в каждой ячейке, у которой меньше семи соседей, стояло бы число 0.

Это невозможно: ячейки, которые считаются менее 7 раз — это ячейки, примыкающие к граням куба. Если расставить во всех этих ячейках нули, сумма чисел в угловой ячейке и её соседях также будет равна 0, а вовсе не 14.

8. (5 баллов) Последовательность x_n задана условиями $x_1 = \frac{5}{2}$ и $x_{n+1} = 3 - \frac{2}{x_n}$. Найдите x_{100}.

Ответ: $x_{100} = \frac{3 \cdot 2^{100} - 1}{3 \cdot 2^{99} - 1}$.

Решение: Перебрав несколько первых членов последовательности, можно заметить, что числитель предыдущего является знаменателем следующего.

Определим последовательность y_n следующим образом: $y_0 = 2$, $y_1 = 5$, $y_n = x_n y_{n-1}$, то есть $x_n = \frac{y_n}{y_{n-1}}$. Подставив это представление x_n в рекуррентную формулу, мы получим $\frac{y_{n+1}}{y_n} = 3 - \frac{2y_{n-1}}{y_n}$, откуда $y_{n+1} = 3y_n - 2y_{n-1}$.

Члены последовательности y_n имеют вид 2, 5, 11, 23, 47, … Можно заметить, что разность двух соседних членов каждый раз увеличивается в два раза, что характерно для геометрической прогрессии со знаменателем 2. Значит, имеет смысл искать y_n как $2^n a + b$ — можно проверить, что такая любая такая последовательность удовлетворяет рекуррентной формуле. Подставляя начальные значения и решая систему уравнений, находим $a = 3$ и $b = -1$, откуда $x_n = \frac{3 \cdot 2^n - 1}{3 \cdot 2^{n-1} - 1}$ и $x_{100} = \frac{3 \cdot 2^{100} - 1}{3 \cdot 2^{99} - 1}$.

1.2 Задания для 10 класса

1 вариант

1. (2 балла) Сумма первых шести членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равна сумме следующих четырёх членов. Найдите $\frac{a_{16}}{a_1}$. (Нумерация членов прогрессии начинается с a_1)

Ответ: 3

Решение: Пусть $a_n = a_1 + (n-1)d$. Тогда сумма первых шести членов — это $6a_1 + 15d$, а сумма следующих четырёх равна $4a_1 + 30d$. Приравнивая эти величины, получаем $2a_1 = 15d$, откуда $a_{16} = a_1 + 15d = 3a_1$.

2. (2 балла) $ABCD$ — равнобедренная (равнобокая) трапеция с основаниями AD и BC, а $BCDE$ — равнобедренная трапеция с основаниями CD и BE. Докажите, что $\angle BCA = \angle CED$.

Доказательство: Из равнобедренности трапеций получаем равенство углов $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE$. Кроме того, $AB = CD$ и $BC = DE$. Следовательно, треугольники ABC и CED равны, откуда получаем требуемое равенство углов.

3. (3 балла) Найдите количество решений в натуральных числах уравнения $x(y+z) = 1000$.

Ответ: 2324

Решение: $y + z = \frac{1000}{x} = d$, где d — делитель 1000. Для каждого числа d таким образом существует единственное число x и $d-1$ пара (y,z) (так как y может принимать значения от 1 до $d-1$, а z после этого определён однозначно). Таким образом, искомое количество решений — это сумма всех делителей 1000 минус их количество, $\sigma(1000) - d(1000)$.

Так как $1000 = 2^3 \cdot 5^3$, $\sigma(1000) - d(1000) = (1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 5 + 5^2 + 5^3) - (3+1)(3+1) = 15 \cdot 156 - 16 = 2324$. Вместо использования формул можно просто выписать все делители числа 1000, благо их не так много.

4. (3 балла) Числа x, y и z положительны, а их произведение равно 1. Докажите, что

$$\sqrt{x+3y+5z} + \sqrt{y+3z+5x} + \sqrt{z+3x+5y} \geqslant 9.$$

Доказательство: Применим к числу $x + 3y + 5z$ неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для 9 чисел: одного числа x, трёх чисел y и пяти чисел z. Получим $x + 3y + 5z \geqslant 9\sqrt[9]{xy^3z^5}$. Аналогичные неравенства применим и к остальным подкоренным выражениям. Таким образом,

$$\sqrt{x+3y+5z} + \sqrt{y+3z+5x} + \sqrt{z+3x+5y} \geqslant$$

$$\geqslant 3\left(\sqrt[18]{xy^3z^5} + \sqrt[18]{yz^3x^5} + \sqrt[18]{zx^3y^5}\right).$$

Снова применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, на этот раз для трёх корней 18 степени, получаем

$$\geqslant 3\left(\sqrt[18]{xy^3z^5} + \sqrt[18]{yz^3x^5} + \sqrt[18]{zx^3y^5}\right) \geqslant 9\sqrt[54]{x^9y^9z^9} = 9.$$

5. (3 балла) $P(x)$ — многочлен седьмой степени, имеющий семь различных вещественных корней. Какое наименьшее число вещественных корней может иметь многочлен $P(P(x))$?

Ответ: 7

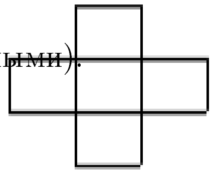
Решение: Обозначим корни многочлена за $x_1, \ldots, x_7$ в порядке возрастания. Многочлен нечётной степени принимает все вещественные значения, включая свои корни, то есть существуют такие числа y_i, что $P(y_i) = x_i$. Числа y_i являются корнями многочлена $P(P(x))$ значит, их хотя бы 7.

Теперь построим пример многочлена, у которого их ровно семь. Для этого требуется, чтобы каждое значение x_i принималось многочленом $P(x)$ ровно один раз.

Рассмотрим любой многочлен $Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_7)$, все корни которого больше 1. Пусть M — его наибольшее значение на промежутке от x_1 до x_7, оно, очевидно, положительно. Тогда многочлен $P(x) = \dfrac{Q(x)}{M}$ удовлетворяет условию задачи. Действительно, при $x \leqslant x_7$ этот многочлен принимает только значения, не превосходящие единицы. При $x > x_7$ многочлен монотонно возрастает, а значит, принимает каждое значение ровно один раз, в том числе и все x_i.

Замечание: пример может строиться и как-нибудь по-другому, но, в любом случае, должно выполняться условие, что числа x_i лежат вне промежутка между наибольшим и наименьшим значением многочлена на промежутке от x_1 до x_7.

6. (4 балла) Сколькими способами можно раскрасить клетки таблицы 10×10 в пять цветов так, чтобы в каждом кресте из пяти клеток и любой фигуре, которая может быть его частью, все цвета были различны?



(Раскраски, отличающиеся поворотом или симметрией считать различными).

Ответ: $5! \cdot 2 = 240$

Решение: Любой крест из пяти клеток можно раскрасить $5! = 120$ способами. Обозначим получившиеся цвета так:

	a	
b	c	d
	e	

.

В левом верхнем углу этого квадрата может стоять либо d, либо e. Числа в остальных углах после этого восстанавливаются однозначно: если мы выбрали d для левого верхнего угла, то в левом нижнем точно стоит a и т.д. Второй случай разбирается аналогично. Получаем

d	a	e
b	c	d
a	e	b

или

e	a	b
b	c	d
d	e	a

.

Таким образом, количество вариантов увеличилось вдвое. Докажем теперь, что остальная часть доски раскрашиватся однозначно. Два случая разбирать нет необходимости, так как они отличаются симметрией относительно диагонали и заменой $a \leftrightarrow b$, $d \leftrightarrow e$.

Покажем теперь, как расширить полученную раскраску на всю доску. Пусть уже раскрашен прямоугольник $m \times n$ (обе стороны больше 3). Тогда все клетки, соседние с его неугловыми клетками, восстанавливаются однозначно по условию.

Из ранее доказанного видно, что если в квадрате 3×3 раскрашены все неугловые клетки и хотя бы один из углов, цвета остальных клеток восстанавливаются однозначно. Таким образом можно однозначно восстановить цвета клеток, соседних с угловой клеткой прямоугольника $m \times n$ по стороне, а затем и цвет клетки лежащей от неё по диагонали. Таким образом мы переходим от прямоугольника $m \times n$ к прямоугольнику, у которого каждая сторона больше хотя бы на 1, если только она не совпадает с размером доски. Рано или поздно так восстановятся цвета всех клеток доски.

От размера доски при этом количество раскрасок не зависит.

7. (4 балла) Окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке X. Прямая AX пересекает окружность S_1 в точке A, а окружность S_2 в точке C. Прямая BX пересекает окружность S_1 в точке B, а окружность S_2 в точке D. Окружность S_3 касается прямой BD в точке B и пересекает луч XA в точках A и P. Докажите, что точки P, B, C и D лежат на одной окружности.

Доказательство: Степень точки X относительно окружности S_3 равна, с одной стороны, XB^2, а с другой — $XA \cdot XP$, откуда $XA = \dfrac{XB^2}{XP}$.

Градусные меры дуг XA (окружности S_1) и XC (окружности S_2) совпадают, так как равны удвоенному углу между общей касательной и прямой XA, содержащей обе хорды XA и XC.

Отсюда $XA : XC$ равно отношению радиусов окружностей S_1 и S_2. Тому же самому отношению равно и $XB : XD$, откуда $\dfrac{XA}{XC} = \dfrac{XB}{XD}$.

Подставляя в это равенство ранее полученную формулу для XA, получаем $\dfrac{XB^2}{XC \cdot XP} = \dfrac{XB}{XD}$, откуда $XB \cdot XD = XC \cdot XP$. Из этого условия как раз и следует, что точки P, B, C и D лежат на одной окружности.

8. (4 балла) Докажите, что число $3^{3003} + 5^{3003} + 7^{3003}$ раскладывается в произведение хотя бы пяти (не обязательно различных) натуральных чисел, больших единицы.

Доказательство: $3 + 7 = 10$ делится на 5, а значит то же самое выполняется и для суммы любых нечётных степеней.

Это верно, так как $a^m + b^m$ делится на $a + b$ при нечётном m. По-другом можно это доказать так: $7 \equiv -3 \pmod 5$, значит $7^n \equiv (-3)^n \equiv -3^n$ если $3n$ нечётно.

Теперь рассмотрим остатки по модулю 9. 3^{3n} делится на 9. Число $5^3 = 125$ и даёт при делении на 9 остаток 8, а значит 5^6 даёт остаток 1. Дальше остатки зацикливаются и 5^{3n} даёт остаток 8 при нечётном n и остаток 1 при чётном. Число $7^3 = 343$ при делении на 9 даёт остаток 1. Значит 7^{3n} даёт остаток 1 при делении на 9. Таким образом, сумма $3^{3003} + 5^{3003} + 7^{3003}$ делится на 9.

Далее, можно заметить, что $3^3 + 5^3 + 7^3 = 495$ делится ещё и на 11. По малой теореме Ферма любое число, взаимно простое с 11, в степени кратной 10 даёт при делении на 11 остаток 1. Значит, у чисел 3^{3003}, 5^{3003} и 7^{3003} такие же остатки при делении на 11, как и у кубов соответствующих чисел, поэтому их сумма делится на 11.

Поэтому $3^{3003} + 5^{3003} + 7^{3003}$ делится на $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 495$. Кроме того, $3^{3003} + 5^{3003} + 7^{3003} > 495$, а значит, есть ещё и пятый множитель.

2 вариант

1. (2 балла) Сумма первых семи членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равна сумме следующих пяти членов. Найдите $\dfrac{a_{37}}{a_1}$. (Нумерация членов прогрессии начинается с a_1)

Ответ: 4

Решение: Пусть $a_n = a_1 + (n-1)d$. Тогда сумма первых семи членов — это $7a_1 + 21d$, а сумма следующих пяти равна $5a_1 + 45d$. Приравнивая эти величины, получаем $2a_1 = 24d$, то есть $a_1 = 12d$, откуда $a_{37} = a_1 + 36d = 4a_1$.

2. (2 балла) $ABCD$ — равнобедренная (равнобокая) трапеция с основаниями AD и BC, а $BCDE$ — равнобедренная трапеция с основаниями CD и BE. Докажите, что $\angle CAB = \angle ECD$.

Доказательство: Из равнобедренности трапеций получаем равенство углов $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE$. Кроме того, $AB = CD$ и $BC = DE$. Следовательно, треугольники ABC и CED равны, откуда получаем требуемое равенство углов.

3. (3 балла) Найдите количество решений в натуральных числах уравнения $(x+y)z = 400$
.

Ответ: 946

Решение: $y + z = \dfrac{400}{x} = d$, где d — делитель 400. Для каждого числа d таким образом существует единственное число x и $d-1$ пара (y, z) (так как y может принимать значения от 1 до $d-1$, а z после этого определён однозначно). Таким образом, искомое количество решений — это сумма всех делителей 400 минус их количество, $\sigma(400) - d(400)$.

Так как $400 = 2^4 \cdot 5^2$, $\sigma(400) - d(400) = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(1 + 5 + 5^2) - (4+1)(2+1) = 31^2 - 15 = 946$. Вместо использования формул можно просто выписать все делители числа 1000, благо их не так много.

4. (3 балла) Числа x, y и z положительны, а их произведение равно 1. Докажите, что

$$\sqrt{2x+5y+9z} + \sqrt{2y+5z+9x} + \sqrt{2z+5x+9y} \geqslant 12.$$

Доказательство: Применим к числу $2x + 5y + 9z$ неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для 16 чисел: двух чисел x, пяти чисел y и девяти чисел z. Получим $2x + 5y + 9z \geqslant 16\sqrt[16]{x^2y^5z^9}$. Аналогичные неравенства применим и к остальным подкоренным выражениям. Таким образом,

$$\sqrt{2x+5y+9z} + \sqrt{2y+5z+9x} + \sqrt{2z+5x+9y} \geqslant$$

$$\geqslant 4\left(\sqrt[32]{x^2y^5z^9} + \sqrt[32]{y^2z^5x^9} + \sqrt[32]{z^2x^5y^9}\right).$$

Снова применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, на этот раз для трёх корней 32 степени, получаем

$$4\left(\sqrt[32]{x^2y^5z^9} + \sqrt[32]{y^2z^5x^9} + \sqrt[32]{z^2x^5y^9}\right) \geqslant 12\sqrt[96]{x^{16}y^{16}z^{16}} = 12.$$

5. (3 балла) $P(x)$ — многочлен пятой степени, имеющий пять различных вещественных корней. Какое наименьшее число вещественных корней может иметь многочлен $P(P(x))$?

Ответ: 5

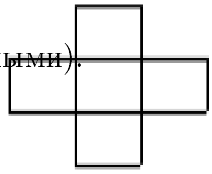
Решение: Обозначим корни многочлена за $x_1, \ldots, x_5$ в порядке возрастания. Многочлен нечётной степени принимает все вещественные значения, включая свои корни, то есть существуют такие числа y_i, что $P(y_i) = x_i$. Числа y_i являются корнями многочлена $P(P(x))$ значит, их хотя бы 5.

Теперь построим пример многочлена, у которого их ровно пять. Для этого требуется, чтобы каждое значение x_i принималось многочленом $P(x)$ ровно один раз.

Рассмотрим любой многочлен $Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_5)$, все корни которого больше 1. Пусть M — его наибольшее значение на промежутке от x_1 до x_5, оно, очевидно, положительно. Тогда многочлен $P(x) = \dfrac{Q(x)}{M}$ удовлетворяет условию задачи. Действительно, при $x \leqslant x_5$ этот многочлен принимает только значения, не превосходящие единицы. При $x > x_5$ многочлен монотонно возрастает, а значит, принимает каждое значение ровно один раз, в том числе и все x_i.

Замечание: пример может строиться и как-нибудь по-другому, но, в любом случае, должно выполняться условие, что числа x_i лежат вне промежутка между наибольшим и наименьшим значением многочлена на промежутке от x_1 до x_5.

6. (4 балла) Сколькими способами можно раскрасить клетки таблицы 10×10 в пять цветов так, чтобы в каждом кресте из пяти клеток и любой фигуре, которая может быть его частью, все цвета были различны?
(Раскраски, отличающиеся поворотом или симметрией считать различными).
См. решение варианта 1.



7. (4 балла) Окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке M. Прямая MC пересекает окружность S_1 в точке A, а окружность S_2 в точке C. Прямая MD пересекает окружность S_1 в точке B, а окружность S_2 в точке D. Окружность S_3 касается прямой AC в точке C и пересекает луч MD в точках K и D. Докажите, что точки K, B, A и C лежат на одной окружности.

Доказательство: Степень точки M относительно окружности S_3 равна, с одной стороны, MC^2, а с другой — $MK \cdot MD$, откуда $MD = \dfrac{MC^2}{MK}$.

Градусные меры дуг MA (окружности S_1) и MC (окружности S_2) совпадают, так как равны удвоенному углу между общей касательной и прямой MA, содержащей обе хорды MA и MC. Отсюда $MA : MC$ равно отношению радиусов окружностей S_1 и S_2. Тому же самому отношению равно и $MB : MD$, откуда $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MB}{MD}$.

Подставляя в это равенство ранее полученную формулу для MD, получаем $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MB \cdot MK}{MC^2}$, откуда $MA \cdot MC = MB \cdot MK$. Из этого условия как раз и следует, что точки K, B, A и C лежат на одной окружности.

8. (4 балла) Докажите, что число $4^{3603} + 5^{3603} + 11^{3603}$ раскладывается в произведение хотя бы семи (не обязательно различных) натуральных чисел, больших единицы.

Доказательство: $4 + 11 = 15$ делится на 5, а значит то же самое выполняется и для суммы любых нечётных степеней. Аналогично $5+11 = 16$, поэтому любая сумма одинаковых нечётных степеней чисел 5 и 11 делится на 16.

Это верно, так как $a^m + b^m$ делится на $a+b$ при нечётном m. По-другом можно это доказать так: $11 \equiv -4 \pmod 5$, значит $11^n \equiv (-4)^n \equiv -4^n$ если $3n$ нечётно.

Отсюда $4^{3603} + 5^{3603} + 11^{3603}$ делится на $16 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$, то есть мы получили уже пять множителей.

Далее, можно заметить, что $4^3 + 5^3 + 11^3 = 1520$ делится ещё и на 19. По малой теореме Ферма любое число, взаимно простое с 19, в степени кратной 18 даёт при делении на 19 остаток 1. Значит, у чисел 4^{3603}, 5^{3603} и 11^{3603} такие же остатки при делении на 19, как и у кубов соответствующих чисел, поэтому их сумма делится на 19.

Поэтому $4^{3603}+5^{3603}+11^{3603}$ делится на $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 19 = 1520$. Кроме того, $4^{3603}+5^{3603}+11^{3603} > 1520$, а значит, есть ещё и седьмой множитель

1.3 Задания для 9 класса

1 вариант

1. (2 балла) Назовём число *хорошим*, если все его цифры различны и оно делится на 37. Найдите количество хороших трёхзначных чисел.

Ответ: 16

Решение: Всего 25 трёхзначных чисел делится на 37. Среди них есть девять чисел, состоящих из одинаковых цифр: 111, ..., 999. Остальные 16 чисел состоят из разиличных цифр. Это можно доказать перебором, но лучше так: пусть в числе, делящемся на 37, две цифры одинаковые, например вторая и третья. Тогда это число имеет вид $\overline{abb}$. Вычтем из него число $\overline{bbb}$, делящееся на 37. Получим, что число $\overline{(a-b)00} = (a-b)\cdot 100$ делится на 37, чего не может быть. Остальные случаи равенства двух цифр разбираются аналогично.

2. (2 балла) Сколькими способами можно покрасить буквы слова КОЛОБОК в синий, красный и зелёный цвета так, чтобы во-первых одинаковые буквы были разного цвета, а во-вторых буквы, стоящие рядом, тоже были бы разного цвета.

Ответ: 18

Решение: Три буквы О должны быть раскрашены в разные цвета, это можно сделать шестью способами. Занумеруем эти цвета слева направо: 1, 2 и 3.

Цвета букв Б и Л определяются однозначно, так как их соседи разного цвета.

Буквы К могут быть покрашены как 3 и 1, 3 и 2 или 2 и 1, то есть три способа.

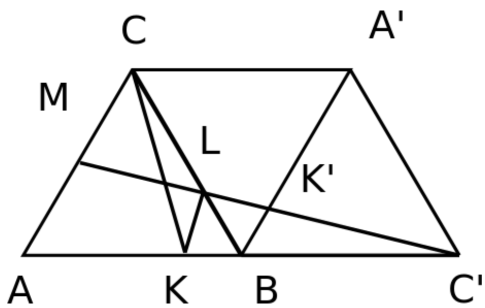
Итого получается $6 \cdot 3 = 18$ способов.

3. (2 балла) Решите уравнение $3^x - 2^y = 7$ в целых неотрицательных числах.

Ответ: $x = 2$, $y = 1$

Решение: При делении на 8 3^x даёт остатки 3 и 1, значит, при $y \geqslant 3$ решений нет. Перебирая $y = 1$ и $y = 2$ получаем один ответ.

4. (3 балла) На стороне AC правильного треугольника ABC отмечена её середина M. на стороне BC отметили точку L, а на стороне AB — точку K, так что сумма длин $ML + LK + KC$ минимальна. Найдите отношение $KB : KA$.



Ответ: 1 : 3

Решение: Отразим точки A и M относительно BC, получим точки A' и K'. Затем отразим точку C относительно $A'B$ и получим точку C'.

$ML + LK + KC = ML + LK' + K'C'$, а минимальное значение этой суммы достигается когда точки M, L, K' и C' лежат на одной прямой.

По теореме Фалеса (или по теореме о средней линии треугольника) $AM = 2K'B$, поэтому $KB : KA = K'B : K'A' = 1 : 3$.

5. (3 балла) Докажите следующее неравенство для положительных чисел a, b, c:

$$\frac{1}{a+2b+3c} + \frac{1}{b+2c+3a} + \frac{1}{c+2a+3b} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Доказательство: Воспользуемся неравенством о среднем арифметичском и среднем гармоническом
$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ для дробей в левой части. Получим

$$\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{b+2c+3a}+\frac{1}{c+2a+3b} \geqslant \frac{9}{(a+2b+3c)+(b+2c+3a)+(c+2a+3b)} = \frac{3}{2(a+b+c)}$$

По неравенству о среднем арифметическом и среднем квадратичном $\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, откуда $\frac{3}{2(a+b+c)} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, что доказывает требуемое неравенство.

6. (3 балла) Точки A, B и C лежат на окружности с центром в точке O. Луч OB вторично пересекает описанную окружность треугольника AOC в точке D, причём точка B оказалась внутри этой окружности. Докажите, что AB — биссектриса угла DAC.

Доказательство: Рассмотрим окружность, на которой лежат точки A, O, C и D. Точка O равноудалена от точке A и C, поэтому является серединой дуги AC. Значит, DO — биссектриса угла D в треугольнике ACD.

Точка B лежит на луче OD и находится от точки O на том же расстоянии, что A и C, поэтому по лемме о трезубце является центром вписанной окружности треугольника ACD, а значит AB тоже биссектриса.

7. (4 балла) Квадратные трёхчлены $g(x)$ и $h(x)$ имеют одинаковые старшие коэффициенты, а их графики касаются графика квадратного трёхчлена $f(x)$. Докажите, что абсцисса точки пересечения графиков $g(x)$ и $h(x)$ лежит точно между абсциссами упомянутых точек касания.

Доказательство: Из условия следует, что трёхчлены $g(x) - f(x)$ и $h(x) - f(x)$ по одному корню. Старшие коэффициенты у них при этом одинаковы, поэтому их можно представить как $a(x - x_1)^2$ и $a(x - x_2)^2$.

При этом точка пересечения графиков $g(x) - f(x)$ и $h(x) - f(x)$, очевидно, имеет ту же абсциссу, что и точка пересечения графиков $g(x)$ и $h(x)$.

Приравниваем эти выражения, чтобы найти абсциссу точки пересечения графиков и получим что числа $x-x_1$ и $x-x_2$ равны по абсолютной величине. Равенства быть не может, так как иначе x_1 и x_2 совпадают и $g(x)$ и $h(x)$ — это один и тот же трёхчлен. Значит $x - x_1 = x_2 - x$, откуда $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, что и требовалось.

8. (5 баллов) Хромой король может ходить вправо, вниз, вправо вниз или влево вниз на одну клетку. Сколько у него способов добраться из левой верхней клетки доски 3×100 в правую нижнюю?

Размер таблицы 3×100 означает, что в таблице 3 строки и 100 столбцов.

Ответ: 44847

Решение: Запишем в каждую клетку таблицы количество способов туда добраться. Тогда в левом верхнем углу будет стоять число 1, а в каждой из остальных клеток будет сумма трёх соседних чисел сверху и числа слева.

1	1	1	1	1	...	1	1
2	5	8	11	14	...	296	298
7	22	46	79	121	...	?	?

В каждую клетку первой строки можно попасть только слева, поэтому первая строка заполнена единицами. Вторая строка начинается с двойки, а каждое следующее число, кроме последнего, на три больше предыдущего. Последнее число во втрой строке больше предыдущего только на два, потому что в эту клетку нельзя попасть слева сверху.

Числа в третьей строчке строятся по следующему закону:
$7 = 2 + 5$
$22 = 7 + (2 + 5 + 8) = (2 + 5) + (2 + 5 + 8)$
$46 = 22 + (5 + 8 + 11) = (2 + 5) + (2 + 5 + 8) + (5 + 8 + 11)$
и так далее.

Последнее число равно $(2+5)+(2+5+8)+(5+8+11)+\ldots+(293+296+298)+(296+298)$.

В этой сумме 2 и 298 учитываются два раза, а все остальные числа по три раза. Значит, искомое число составляет $2(2 + 298) + 3(5 + 8 + \ldots + 296) = 600 + 3 \cdot 301 \cdot 49 = 44847$

Альтернативный способо решения заключается в том, чтобы заметить, что хромой король делает всего два хода вниз. После этого можно посчитать, сколько способо выбрать момент, в который делаются эти ходы — это количество способов зависит от того, какие именно из возможных ходов делаются. Это решение требует большого разбора случаев.

2 вариант

1. (2 балла) Назовём число *хорошим*, если все его цифры различны и оно делится на 37. Найдите количество хороших натуральных чисел, меньших 1000.

Ответ: 18

Решение: Всего 27 не более, чем трёхзначных чисел делится на 37. Среди них есть девять чисел, состоящих из одинаковых цифр: $111, \ldots, 999$. Остальные 16 чисел состоят из разиличных цифр. Это можно доказать перебором, но лучше так: пусть в числе, делящемся на 37, две цифры одинаковые, например вторая и третья. Тогда это число имеет вид $\overline{abb}$. Вычтем из него число $\overline{bbb}$, делящееся на 37. Получим, что число $\overline{(a-b)00} = (a-b)\cdot 100$ делится на 37, чего не может быть. Остальные случаи равенства двух цифр разбираются аналогично.

2. (2 балла) Сколькими способами можно покрасить буквы слова БАРАБАН в синий, красный и зелёный цвета так, чтобы во-первых одинаковые буквы были разного цвета, а во-вторых буквы, стоящие рядом, тоже были бы разного цвета.

Ответ: 24

Решение: Три буквы А должны быть раскрашены в разные цвета, это можно сделать шестью способами. Вторая буква Б стоит между второй и третьей буквами А, а значит её цвет теперь определяется однозначно и совпадает с цветом первой буквы А.

Значит, для первой буквы Б оба условия запрещают один и тот же цвет, и её можно покрасить двумя способами.

Цвет буквы Р определяется обнозначно; цвет буквы Н выбирается двумя способами.

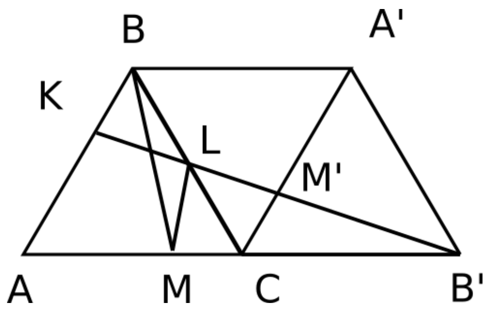
Итого получается $6\cdot 2\cdot 2 = 24$ способа.

3. (2 балла) Решите уравнение $7^x - 2^y = 3$ в целых неотрицательных числах.

Ответ: $x = 1$, $y = 2$

Решение: При делении на 8 7^x даёт остатки 7 и 1, значит, при $y \geqslant 3$ решений нет. Перебирая $y = 1$ и $y = 2$ получаем один ответ.

4. (3 балла) На стороне AB правильного треугольника ABC отмечена точка K такая, что $AK : KB = 1 : 2$. На стороне BC отметили точку L, а на стороне AC — точку M, так что сумма длин $KL + LM + MB$ минимальна. Найдите отношение $CM : MA$.



Ответ: $1 : 5$

Решение: Отразим точки A и M относительно BC, получим точки A' и M'. Затем отразим точку B относительно $A'C$ и получим точку B'.

$KL+LM+MB = KL+LM'+M'B'$, а минимальное значение этой суммы достигается когда точки K, L, M' и B' лежат на одной прямой.

По теореме Фалеса (или по теореме о средней линии треугольника) $AK = 2M'C$, поэтому $CM : MA = CM' : M'A = \frac{1}{2}AK : (3AK - \frac{1}{2}AK) = 1 : 5$.

5. (3 балла) Докажите следующее неравенство для положительных чисел a, b, c:

$$\frac{1}{a+3b+5c} + \frac{1}{b+3c+5a} + \frac{1}{c+3a+5b} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Доказательство: Воспользуемся неравенством о среднем арифметичском и среднем гармоническом $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant \dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ для дробей в левой части. Получим

$$\frac{1}{a+3b+5c} + \frac{1}{b+3c+5a} + \frac{1}{c+3a+5b} \geqslant \frac{9}{(a+3b+5c)+(b+3c+5a)+(c+3a+5b)} = \frac{1}{a+b+c}$$

По неравенству о среднем арифметическом и среднем квадратичном $\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, откуда $\frac{1}{a+b+c} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, что доказывает требуемое неравенство.

6. (3 балла) Точки B, C и D лежат на окружности с центром в точке A. Луч AC вторично пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E, причём точка C оказалась внутри этой окружности. Докажите, что DC — биссектриса угла EDB.

Доказательство: Рассмотрим окружность, на которой лежат точки A, B, D и E. Точка A равноудалена от точке B и D, поэтому является серединой дуги BD. Значит, EA — биссектриса угла E в треугольнике EBD.

Точка C лежит на луче AE и находится от точки A на том же расстоянии, что D и B, поэтому по лемме о трезубце является центром вписанной окружности треугольника EDB, а значит DC тоже биссектриса.

7. (4 балла) Квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковые старшие коэффициенты, а их графики касаются графика квадратного трёхчлена $h(x)$. Докажите, что абсцисса точки пересечения графиков $f(x)$ и $g(x)$ лежит точно между абсциссами упомянутых точек касания.

Доказательство: Из условия следует, что трёхчлены $f(x) - h(x)$ и $g(x) - h(x)$ по одному корню. Старшие коэффициенты у них при этом одинаковы, поэтому их можно представить как $a(x-x_1)^2$ и $a(x-x_2)^2$.

При этом точка пересечения графиков $f(x) - h(x)$ и $g(x) - h(x)$, очевидно, имеет ту же абсциссу, что и точка пересечения графиков $f(x)$ и $g(x)$.

Приравниваем эти выражения, чтобы найти абсциссу точки пересечения графиков и получим что числа $x - x_1$ и $x - x_2$ равны по абсолютной величине. Равенства быть не может, так как иначе x_1 и x_2 совпадают и $f(x)$ и $g(x)$ — это один и тот же трёхчлен. Значит $x - x_1 = x_2 - x$, откуда $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, что и требовалось.

8. (5 баллов) Хромой король может ходить вправо, вниз, вправо вниз или влево вниз на одну клетку. Сколько у него способов добраться из левой верхней клетки доски 3×200 в правую нижнюю?

Размер таблицы 3×200 означает, что в таблице 3 строки и 200 столбцов.

Ответ: 179697

Решение: Запишем в каждую клетку таблицы количество способов туда добраться. Тогда в левом верхнем углу будет стоять число 1, а в каждой из остальных клеток будет сумма трёх соседних чисел сверху и числа слева.

1	1	1	1	1	...	1	1
2	5	8	11	14	...	596	598
7	22	46	79	121	...	?	?

В каждую клетку первой строки можно попасть только слева, поэтому первая строка заполнена единицами. Вторая строка начинается с двойки, а каждое следующее число, кроме последнего, на три больше предыдущего. Последнее число во втрой строке больше предыдущего только на два, потому что в эту клетку нельзя попасть слева сверху.

Числа в третьей строчке строятся по следующему закону:

$7 = 2 + 5$

$22 = 7 + (2 + 5 + 8) = (2 + 5) + (2 + 5 + 8)$

$46 = 22 + (5 + 8 + 11) = (2 + 5) + (2 + 5 + 8) + (5 + 8 + 11)$

и так далее.

Последнее число равно $(2+5)+(2+5+8)+(5+8+11)+\ldots+(593+596+598)+(596+598)$.

В этой сумме 2 и 598 учитываются два раза, а все остальные числа по три раза. Значит, искомое число составляет $2(2+598)+3(5+8+\ldots+596) = 1200+3\cdot 601\cdot 99 = 179697$

Альтернативный способо решения заключается в том, чтобы заметить, что хромой король делает всего два хода вниз. После этого можно посчитать, сколько способо выбрать момент, в который делаются эти ходы — это количество способов зависит от того, какие именно из возможных ходов делаются. Это решение требует большого разбора случаев.

1.4 Задания для 8 класса

1 вариант

1. (2 балла) Вася задумал число и записал на доске, во-первых, задуманное число увеличенное на 10%; во-вторых, задуманное число, уменьшенное на 10%; в-третьих, ещё какое-то число. Всегда ли Петя сможет по этим данным узнать Васино число?

Ответ: Нет, не всегда.

Решение: Два написанных Васей числа относятся как 9 : 11. В качестве третьего достаточно взять число $\frac{11}{9}$ от большего или $\frac{9}{11}$ меньшего, тогда у Пети будет два равноправных варианта.

2. (2 балла) В подарок на Восьмое марта Вася и Петя заказали пятнадцати одноклассницам воздушные шарики. Каждая девочка должна зайти в класс и выбрать себе четыре шарика, причём девочка будет довольна, только если её шарики все либо одного цвета, либо все разных цветов. Вася и Петя знают, что в магазине есть шарики четырёх цветов, но выбрать конкретные цвета при заказе нельзя. Какое наименьшее количество шариков нужно заказать ребятам, чтобы все девочки остались довольны?

Ответ: 66

Решение: Последняя девочка должна при любой раскраске шариков иметь возможность выбрать себе четыре подходящих хотя бы одним из двух возможных способов. Если ей остаётся 9 шариков, то это могут быть по 3 шарика 3 цветов. Если шариков больше 9, найдётся либо хотя бы 4 шарика одного цвета, либо 4 шарика разных цветов.

Значит ответ $14 \cdot 4 + 10 = 66$ шариков.

3. (2 балла) Внутри трапеции $ABCD$ к основанию AD проведена высота BH. Оказалось. что площадь треугольника CDH составляет половину площади всей трапеции. Докажите, что трапеция равнобедренная (равнобокая).

Доказательство: Проведём к этому же основанию вторую высоту CH_1. $S_{CDH} = \frac{1}{2}CH_1 \cdot DH$, $S_{ABCD} = \frac{1}{4}CH_1(AD + BC)$, откуда $2DH = AD + BC$

Это можно переписать как $DH - BC = AD - DH$. Левую часть можно представить как $DH - HH_1 = DH_1$, а правая равна AH, поэтому $AH = DH_1$, откуда очевидно следует равнобедренность трапеции.

4. (3 балла) Решите уравнение $a + b + \text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b) = 997$, если известно, что 997 — простое число.

Ответ: Решений нет.

Решение: Можно заметить, что в левой части стоят либо 4 нечётных числа, либо 4 чётных, либо 2 нечётных и одно чётное, то есть правая часть всегда чётна.

Существует альтернативное решение использующее простоту правой части: дело в том, что левая часть делится на НОД, а значит, и правая тоже должна.

5. (3 балла) На доске было написано число, состоящее из 99 пятёрок. С числом на доске разрешается совершать следующие операции:

(1) уменьшать две соседние ненулевые цифры на 1;

(2) уменьшать две ненулевые цифры, между которыми стоят ровно две цифры, на 1;

(3) менять местами две цифры, между которыми стоит ровно 5 цифр.

Если после выполения такой операции в начале числа оказались нули, они исчезают.

После выполнения некоторого количества таких операций на доске оказалось однозначное число. Какое именно?

Ответ: 5

Решение: Давайте заметим, что все эти операции не меняют остаток от деления числа на 11.

(1) из числа вычитается $11 \cdot 10^k$, что делится на 11.

(2) Из числа вычитается $1001 \cdot 10^k$, делится на 11.

(3) Из числа вычитается $a \cdot 10^k + b \cdot 10^{k+6}$ и к числу прибавляется $b \cdot 10^k + a \cdot 10^{k+6}$. Разность этих чисел составляет $(a-b) \cdot 999999 \cdot 10^k$, что делится на 11, поскольку 999999 делится на 11.

Изначальное число даёт при делении на 11 остаток 5, так как число из 99 пятёрок и нуля на конце делится на 55, а значит, и на 11. Поэтому и итоговый ответ даёт остаток 5 при делении на 11.

6. (4 балла) Три различных числа a, b, c таковы, что $4a + 2b + c = 0$. Вася составил шесть квадратных уравнений, в каждом из которых все эти три числа являются коэффициентами, но в разном порядке. Какое наибольшее количество этих уравнений может не иметь корней?

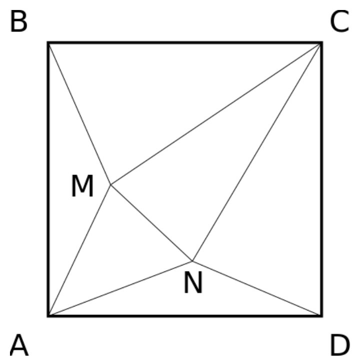
Ответ: 2

Решение: Уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $cx^2 + bx + a = 0$ имеют корни 2 и $\frac{1}{2}$ соответственно.

Расммотрим дискриминант уравнений $ax^2 + cx + b = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$. Он равен $c^2 - 4ab = (4a+2b)^2 - 4ab = (4a)^2 + (2b)^2 + 12ab$. Это число в любом случае находится между $(4a+2b)^2$ и $(4a)^2 + (2b)^2$, а значит, положительно, поэтому у этих уравнений также есть корни.

У уравнений $bx^2 + ax + c = 0$ и $cx^2 + ax + b = 0$ может не быть корней, например при $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$ дискриминант равен -7.

7. (4 балла) В квадрате $ABCD$ отмечены точки M и N такие, что треугольник AMN — равносторонний. Могут ли при этом все треугольники ABM, BCM, CMN, CDN и ADN быть равнобедренными?



Ответ: Да, могут.

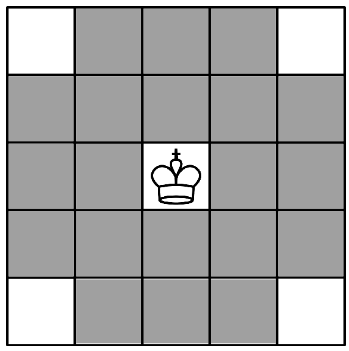
Решение: Отметим точку M так, что треугольник CMD равносторонний, а точку N так, что треугольник CBN равносторонний. Это гарантирует нам равнобедренность треугольников CDM, CMN, CBN, причём углы при вершине C в этих треугольниках равны 30°, а остальные углы — по 75°,

Кроме того, так как точка M лежит на серединном перпендикуляре к CD (и, соответственно, AB), треугольник ABM тоже равнобедренный. Аналогично треугольник ADN равнобедренный и равен треугольнику ABM. Поэтому треугольник AMN равнобедренный. Осталось доказать, что хотя бы один из его углов равен 60°.

В невыпуклом пятиугольнике $ABMND$ угол A прямой, а углы M и N составляют по 210°, откуда оставшиеся два угла равны по 15°. Но тогда равные им углы $\angle BAM$ и $\angle NAD$ также равны по 15°, откуда $\angle MAN = 60°$, что нам и оставалось доказать.

Замечание: Если точки M и N поменять местами, также полчается

8. (5 баллов) Шахматная фигура великий султан бьёт клетки, закрашенные на рисунке серым. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга великих султанов можно расставить на клетчатой доске 9×9?



Ответ: 13

Пример:

C				C				C
		C				C		
C				C				C
		C				C		
C				C				C

Оценка:

Разобъеи доску на 13 фигур, в каждой из которых может быть не больше одного великого султана.

1	1	1	2	2	2	3	3	3
1	1	1	2	2	2	3	3	3
4	4	5	5	2	6	6	7	7
4	4	5	5	6	6	6	7	7
4	4	5	5	12	6	6	7	7
11	11	11	12	12	12	13	13	13
11	11	11	12	12	12	13	13	13
8	8	8	9	9	9	10	10	10
8	8	8	9	9	9	10	10	10

Следовательно, султанов может стоять не больше 13.

2 вариант

1. (2 балла) Коля задумал число и записал на доске, во-первых, задуманное число увеличенное на 20%; во-вторых, задуманное число, уменьшенное на 20%; в-третьих, ещё какое-то число. Всегда ли Миша сможет по этим данным узнать Колино число?

Ответ: Нет, не всегда.

Решение: Два написанных Васей числа относятся как $2:3$. В качестве третьего достаточно взять число $\frac{3}{2}$ от большего или $\frac{2}{3}$ меньшего, тогда у Пети будет два равноправных варианта.

2. (2 балла) В подарок на Восьмое марта Коля и Миша заказали шестнадцати одноклассницам воздушные шарики. Каждая девочка должна зайти в класс и выбрать себе пять шариков, причём девочка будет довольна, только если её шарики все либо одного цвета, либо все разных цветов. Вася и Петя знают, что в магазине есть шарики пяти цветов, но выбрать конкретные цвета при заказе нельзя. Какое наименьшее количество шариков нужно заказать ребятам, чтобы все девочки гарантированно остались довольны?

Ответ: 92

Решение: Последняя девочка должна при любой раскраске шариков иметь возможность выбрать себе пять подходящих хотя бы одним из двух возможных способов. Если ей остаётся 16 шариков, то это могут быть по 4 шарика 4 цветов и у неё ничего не получится. Если шариков больше 16 найдётся либо хотя бы 5 шариков одного цвета, либо 5 шариков разных цветов.

Значит, ответ $15 \cdot 5 + 17 = 92$ шарика.

3. (2 балла) Внутри трапеции $ABCD$ к основанию AD проведена высота CH. Оказалось. что площадь треугольника ABH составляет половину площади всей трапеции. Докажите, что трапеция равнобедренная (равнобокая).

Доказательство: Проведём к этому же основанию вторую высоту BH_1. $S_{ABH} = \frac{1}{2}BH_1 \cdot AH$, $S_{ABCD} = \frac{1}{4}BH_1(AD+BC)$, откуда $2AH = AD + BC$

Это можно переписать как $AH - BC = AD - AH$. Левую часть можно представить как $AH - HH_1 = AH_1$, а правая равна DH, поэтому $AH_1 = DH$, откуда очевидно следует равнобедренность трапеции.

4. (3 балла) Решите уравнение $a + b + \text{НОД}(a,b) + \text{НОК}(a,b) = 991$, если известно, что 991 — простое число.

Ответ: решений нет.

Решение: Можно заметить, что в левой части стоят либо 4 нечётных числа, либо 4 чётных, либо 2 нечётных и одно чётное, то есть правая часть всегда чётна.

Существует альтернативное решение использующее простоту правой части: дело в том, что левая часть делится на НОД, а значит, и правая тоже должна.

5. (3 балла) На доске было написано число, состоящее из 49 девяток. С числом на доске разрешается совершать следующие операции:

(1) уменьшать любую цифру, большую 6, на 7;

(2) уменьшать две ненулевые цифры, между которыми стоят ровно две цифры, на 1;

(3) менять местами две цифры, между которыми стоит ровно 5 цифр.

Если после выполения такой операции в начале числа оказались нули, они исчезают.

После выполнения некоторого количества таких операций на доске оказалось однозначное число. Какое именно?

Ответ: 2 или 9

Решение: Давайте заметим, что все эти операции не меняют остаток от деления числа на 7.

(1) из числа вычитается $7 \cdot 10^k$, что делится на 7.

(2) Из числа вычитается $1001 \cdot 10^k$, делится на 7.

(3) Из числа вычитается $a \cdot 10^k + b \cdot 10^{k+6}$ и к числу прибавляется $b \cdot 10^k + a \cdot 10^{k+6}$. Разность этих чисел составляет $(a-b) \cdot 999999 \cdot 10^k$, что делится на 7, поскольку 999999 делится на 7.

Изначальное число даёт при делении на 7 остаток 2, так как число из 48 девяток и нуля на конце делится на 999999, а значит, и на 7. Поэтому и итоговый ответ даёт остаток 2 при делении на 7.

6. (4 балла) Три различных числа a, b, c таковы, что $9a + 3b + c = 0$. Вася составил шесть квадратных уравнений, в каждом из которых все эти три числа являются коэффициентами, но в разном порядке. Какое наибольшее количество этих уравнений может не иметь корней?

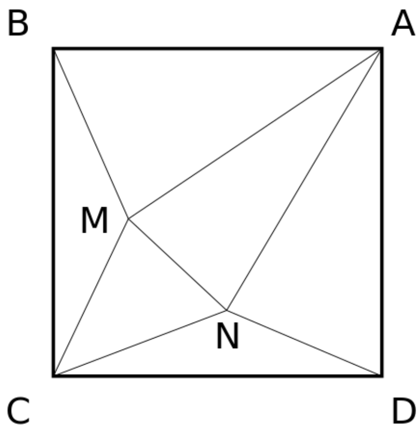
Ответ: 2

Решение: Уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $cx^2 + bx + a = 0$ имеют корни 3 и $\frac{1}{3}$ соответственно.

Расммотрим дискриминант уравнений $ax^2 + cx + b = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$. Он равен $c^2 - 4ab = (9a + 3b)^2 - 4ab = (3a)^2 + (3b)^2 + 50ab$. Это число в любом случае находится между $(9a + 3b)^2$ и $(9a)^2 + (3b)^2$, а значит, положительно, поэтому у этих уравнений также есть корни.

У уравнений $bx^2 + ax + c = 0$ и $cx^2 + ax + b = 0$ может не быть корней, например при $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$ дискриминант равен -23.

7. (4 балла) В квадрате $ABCD$ отмечены точки M и N такие, что треугольник CMN — равносторонний. Могут ли при этом все треугольники CDM, ADM, AMN, ABN и BCN быть равнобедренными?



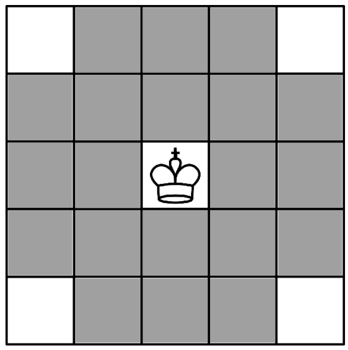
Ответ: Да, могут.

Решение: Отметим точку M так, что треугольник AMD равносторонний, а точку N так, что треугольник ABN равносторонний. Это гарантирует нам равнобедренность треугольников ADM, AMN, ABN, причём углы при вершине A в этих треугольниках равны $30°$, а остальные углы — по $75°$,

Кроме того, так как точка M лежит на серединном перпендикуляре к AD (и, соответственно, BC), треугольник CBM тоже равнобедренный. Аналогично треугольник CDN равнобедренный и равен треугольнику CBM. Поэтому треугольник CMN равнобедренный. Осталось доказать, что хотя бы один из его углов равен $60°$.

В невыпуклом пятиугольнике $CBMND$ угол C прямой, а углы M и N составляют по $210°$, откуда оставшиеся два угла равны по $15°$. Но тогда равные им углы $\angle BCM$ и $\angle NCD$ также равны по $15°$, откуда $\angle MCN = 60°$, что нам и оставалось доказать.

8. (5 баллов) Шахматная фигура великий султан бьёт клетки, закрашенные на рисунке серым. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга великих султанов можно расставить на клетчатой доске 7×7?



Ответ: 9

Пример:

C			C			C
C			C			C
C			C			C

Оценка:

Заметим, что в прямогульнике 2×3 или 3×2 не может стоять больше одного султана. Разобьём доску на 8 таких прямоугольников и одну клетку:

1	1	2	2	3	3	3
1	1	2	2	3	3	3
1	1	2	2	4	4	4
5	5	5		4	4	4
5	5	5	6	6	7	7
8	8	8	6	6	7	7
8	8	8	6	6	7	7

Следовательно, султанов может стоять не больше 9.

1.5 Задания для 7 класса

1 вариант

1. (2 балла) Существуют ли такие натуральные числа a, b и c что $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1$.

Ответ: Да

Решение: Можно взять, например, известное равенство $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ и преобразовать его в $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{18}=1$.

2. (2 балла) В подарок на Восьмое марта Вася и Петя заказали пятнадцати одноклассницам воздушные шарики. Каждая девочка должна зайти в класс и выбрать себе три шарика, причём девочка будет довольна, только если её шарики все либо одного цвета, либо все разных цветов. Вася и Петя знают, что в магазине есть шарики трёх цветов, но выбрать конкретные цвета при заказе нельзя. Какое наименьшее количество шариков нужно заказать ребятам, чтобы все девочки остались довольны?

Ответ: 47

Решение: Последняя девочка должна при любой раскраске шариков иметь возможность выбрать себе три подходящих хотя бы одним из двух возможных способов. Если ей остаётся 4 шарика, то это могут быть по 2 шарика 2 цветов. Если шариков больше 4, найдётся либо хотя бы 3 шарика одного цвета, либо 3 шарика разных цветов.

Значит ответ $14\cdot 3+5=47$ шариков.

3. (2 балла) Найдите наибольшее четырёхзначное число, состоящее из различных цифр, которое делится на каждую из своих цифр.

Ответ: 9864

Решение: Легко видеть, что число 9864 подходит.

Если у нас есть число больше, чем 9864, оно также должно начинаться на 98, а значит, должно делиться на 8 и на 9, а значит и на 72. Но $9864+72$ уже не начинается на 98.

4. (3 балла) Отрезок длины 11 разделили на пять отрезков с натуральными длинами. Докажите, что из каких-то трёх можно составить треугольник.

Доказательство: Предположим, это не так. Два самых маленьких отрезка имеют длину хотя бы 1. Следующий по величине отрезок хотя бы 2, так как чтобы из этих трёх отрезков нельзя было составить треугольник, для них должно нарушаться неравенство треугольника, то есть больший отрезок должен быть не меньше суммы двух меньших. Четвёртый по величине отрезок по аналогичным соображениям должен иметь длину хотя бы $2+1=3$, пятый хотя бы 5. Вместе это получается хотя бы 12, что противоречит условию.

Значит, подобрать такие числа, чтобы все неравенства треугольника нарушались, нельзя.

5. (3 балла) В правильном треугольнике ABC точка M — середина стороны BC. Кроме того, луч CB — биссектриса угла ACD. Прямая MK пересекает сторону AB в точке K, а луч CD в точке L. Докажите, что $AK+CL=AC$.

Доказательство:

В равностороннем треугольнике все углы равны, поэтому $\angle ABC=\angle BCA=\angle BCD$ по определению биссектрисы.

Углы $\angle BMK$ и $\angle CML$ равны как вертикальные.

$BM=MC$ так как M середина стороны.

Поэтому, по второму признаку равенства, треугольники BMK и CML равны, а значит $BK=CL$.

Отсюда $AK+CL=AK+BK=AB=AC$.

6. (3 балла) Имеет ли решение уравнение $a+b+\text{НОД}(a,b)+\text{НОК}(a,b)=512$ в натуральных числах при $a\neq b$?

Ответ: Да

Решение: Для $a = 1$ и $b = 3$ мы получаем соответствующую сумму равную 8. После этого достаточно умножить оба числа на 64 и получить подходящий пример, в котором a и НОД равны 64, b и НОК равны 192.

Есть много других примеров.

7. (4 балла) Жители племени мумба всегда говорят правду, а жители племени юмба всегда лгут. Некоторое количество членов этих племён расставили на клетчатой площади 10×10 (в каждой клетке обязательно стоит ровно один человек). Соседями будем называть людей, стоящих на клетках, имеющих общую сторону или угол.

Каждый из людей, стоящих на клетках площади, сказал, что среди его соседей нет его соплеменников. Какое наибольшее количество членов племени мумба могло быть на площади?

Ответ: 25

Решение: Никакие два мумба не должны стоять на соседних клетках.

Разобъём доску 25 квадратиков 2×2. В каждом из них стоит не более одного мумба.

Пример строится так: в каждый из указанных квадратиков поместим мумба в левый верхний угол (или в любой другой угол, главное, что в один и тот же). Легко видеть, что у каждого юмба всегда есть сосед тумба в том же квадратике, поэтому они все лгут.

8. (5 балла) Пять мальчиков собирали грибы, никакие двое не собрали поровну и каждый собрал меньше 21% от общего числа собранных грибов. Какое наименьшее число грибов могло быть собрано?

Ответ: 205

Решение: Пусть мальчик, собравший больше всех, собрал n грибов. Тогда все вместе ребята собрали не более $5n-10$ грибов. Отношение $\dfrac{n}{5n-10} = \dfrac{n}{5(n-2)} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5(n-2)}$. Это выражение уменьшается с увеличением n и при $n = 42$ составляет как раз $0,21$, то есть ровно 21%.

Значит, наименьшее подходящее $n = 43$. Кроме того, $\dfrac{43}{204} > 0,21 > \dfrac{43}{205}$, поэтому наименьшее возможное количество собранных грибов равно $205 = 43 + 42 + 41 + 40 + 39$.

2 вариант

1. (2 балла) Существуют ли такие натуральные числа a, b и c что $\dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{b}+\dfrac{5}{c}=1$.

Ответ: Да

Решение: Можно взять, например, известное равенство $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ и преобразовать его в $\frac{1}{2}+\frac{3}{6}+\frac{5}{30}=1$.

2. (2 балла) В подарок на Восьмое марта Вася и Петя заказали семнадцати одноклассницам воздушные шарики. Каждая девочка должна зайти в класс и выбрать себе три шарика, причём девочка будет довольна, только если её шарики все либо одного цвета, либо все разных цветов. Вася и Петя знают, что в магазине есть шарики трёх цветов, но выбрать конкретные цвета при заказе нельзя. Какое наименьшее количество шариков нужно заказать ребятам, чтобы все девочки остались довольны?

Ответ: 54

Решение: Последняя девочка должна при любой раскраске шариков иметь возможность выбрать себе три подходящих хотя бы одним из двух возможных способов. Если ей остаётся 4 шарика, то это могут быть по 2 шарика 2 цветов. Если шариков больше 4, найдётся либо хотя бы 3 шарика одного цвета, либо 3 шарика разных цветов.

Значит ответ $16\cdot 3+5=53$ шарика.

3. (2 балла) Найдите наименьшее четырёхзначное число, состоящее из различных цифр, которое делится на каждую из своих цифр.

Ответ: 1236

Решение: Число 1236, очевидно подходит. Меньшего числа не может быть, потому что первые три цифры в данном числе минимальны (так как не может быть нулей) а последняя цифра должна обеспечивать делимость числа на 6 и находится однозначно.

4. (3 балла) Отрезок длины 18 разделили на шесть отрезков с натуральными длинами. Докажите, что из каких-то трёх можно составить треугольник.

Доказательство: Предположим, это не так. Два самых маленьких отрезка имеют длину хотя бы 1. Следующий по величине отрезок хотя бы 2, так как чтобы из этих трёх отрезков нельзя было составить треугольник, для них должно нарушаться неравенство треугольника, то есть больший отрезок должен быть не меньше суммы двух меньших. Четвёртый по величине отрезок по аналогичным соображениям должен иметь длину хотя бы $2+1=3$, пятый хотя бы 5 и шестой хотя бы 8. Вместе это получается хотя бы 19, что противоречит условию.

Значит, подобрать такие числа, чтобы все неравенства треугольника нарушались, нельзя.

5. (3 балла) В правильном треугольнике ABC точка K — середина стороны AB. Кроме того, луч BA — биссектриса угла CBM. Прямая PK пересекает сторону AC в точке P, а луч BM в точке Q. Докажите, что $PC+QB=BC$.

Доказательство:

В равностороннем треугольнике все углы равны, поэтому $\angle CAB=\angle ABC=\angle ABM$ по определению биссектрисы.

Углы $\angle AKP$ и $\angle BKQ$ равны как вертикальные.

$AK=BK$ так как K середина стороны.

Поэтому, по второму признаку равенства, треугольники AKP и BKQ равны, а значит $PA=QB$.

Отсюда $PC+QB=PC+PA=AC=BC$.

6. (3 балла) Имеет ли решение уравнение $a+b+\text{НОД}(a,b)+\text{НОК}(a,b)=1024$ в натуральных числах при $a\neq b$?

Ответ: Да

Решение: Для $a=1$ и $b=3$ мы получаем соответствующую сумму равную 8. После этого достаточно умножить оба числа на 128 и получить подходящий пример, в котором a и НОД равны 128, b и НОК равны 384.

Есть много других примеров.

7. (4 балла) Жители племени юмба всегда говорят правду, а жители племени тумба всегда лгут. Некоторое количество членов этих племён расставили на клетчатой площади 8×8 (в каждой клетке обязательно стоит ровно один человек). Соседями будем называть людей, стоящих на клетках, имеющих общую сторону или угол.

Каждый из людей, стоящих на клетках площади, сказал, что среди его соседей нет его соплеменников. Какое наибольшее количество членов племени юмба могло быть на площади?

Ответ: 16

Решение: Никакие два рыцаря не должны стоять на соседних клетках.

Разобъём доску 16 квадратиков 2×2. В каждом из них стоит не более одного юмба.

Пример строится так: в каждый из указанных квадратиков поместим юмба в левый верхний угол (или в любой другой угол, главное, что в один и тот же). Легко видеть, что у каждого тумба всегда есть сосед юмба в том же квадратике, поэтому они все лгут.

8. (5 балла) Четверо мальчиков собирали орехи, никакие двое не собрали поровну и каждый собрал меньше 26% от общего числа собранных орехов. Какое наименьшее число орехов могло быть собрано?

Решение: 154

Решение: Пусть мальчик, собравший больше всех, собрал n грибов. Тогда все вместе ребята собрали не более $4n-6$ грибов. Отношение $\dfrac{n}{4n-6} = \dfrac{n}{4(n-1,5)} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1,5}{4(n-1,5)}$. Это выражение уменьшается с увеличением n и при $n = 39$ составляет как раз $0,26$, то есть ровно 26%.

Значит, наименьшее подходящее $n = 40$. Кроме того, $\dfrac{40}{153} > 0,26 > \dfrac{40}{154}$, поэтому наименьшее возможное количество собранных грибов равно $154 = 40 + 39 + 38 + 37$.

1.6 Критерии оценивания решений задач заключительного этапа

11 класс

1. (2 балла)

Доказано наличие трёх множителей — *1 балл.*

Доказательство наличия двух множителей — не оценивается.

Утверждение о том, что сумма m-ых степеней двух чисел при нечётном m делится на сумму самих чисел принимать без доказательства.

2. (2 балла)

Доказано, что $P(x) - P'(x)$ имеет ровно один корень — *0,5 балла.*

Выписана формула для дискриминанта — *ещё 0,5 балла.*

3. (3 балла)

Только ответ “не всегда” — *0 баллов.*

Ответ с конкретными (правильными) числами без объяснения — *1 балл.*

Решение, в котором доказывается существование таких чисел, но они не находятся в явном виде без необходимых проверок на соответствие дополнительным условиям — *2 балла.*

4. (3 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

За арифметические ошибки, несущественно влияющие на ход решения, *снимать 0,5 балла* за одну ошибку, *снимать 1 балл* за две ошибки или более.

5. (3 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

Ответ с примером — *1 балла.*

Оценка без упоминания того, что пример должен существовать — *2 балла.*

Оценка без с неверным примером или сформулированным, но недоказанным утверждением, что пример существует — *2,5 балла.*

Только начало оценки (найдено минимальное количество рыцарей) — *0,5 балла (складывается с баллами за пример)*

6. (4 балла)

Только ответ — it 0 баллов.

За арифметические ошибки, несущественно влияющие на ход решения, *снимать 0,5 балла* за одну ошибку, *снимать 1 балл* за две ошибки или более.

Теорему Брианшона принимать без доказательства, если она корректно сформулирована. Если точки просто оказываются на одной прямой без какого-то внятного доказательства, оценивать оставшуюся часть решения исходя максимум из 2 баллов.

Доказательство того, что указанная конфигурация сущетсвует также не требуется.

7. (4 балла)

Доказано только нестрогое неравенство *2 балла.*

8. (5 баллов) Только ответ без примера — *0 баллов.*

Ребёнок “увидел закономерность” и угадал правильную формулу общего члена, отсутствует проверка того, что эта формула удовлетворяет рекурренте — *3 балла.*

Для полного решения достаточно построить последовательность и доказать, что она удовлетворяет условию задачи, единственность очевидна и её доказывать не надо.

Разрешается пользоваться формулой для решения линейных рекуррент без доказательства. Решения с использованием производящих функций также допустимы.

За арифметические ошибки, несущественно влияющие на ход решения, *снимать 0,5 балла*

В ответе несвёрнутая формула (например, геометрической прогрессии) *снимать 1 балл*

10 класс

1. (2 балла)

Только ответ без примера — *0 баллов.*

Пример последовательности с правильным ответом — *1 балл.*

Верное решение с несущественными арифметическими ошибками — *1,5 балла.*

Верное решение ошибками, которые сильно меняют его ход или упрощают подсчёты — *1 балл.*

2. (2 балла)

Критерии на усмотрение проверяющих.

3. (3 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

Формулы для суммы и количества делителей считать известными и не требовать доказательств.

Правильное решение с арифметическими ошибками — *2 балла.*

4. (3 балла)

Частичные продвижения не оцениваются.

Неравенства о средних можно использовать без доказательства.

Утверждение о том, что минимум суммы двух или трёх чисел при фиксированном произведении считать известным.

Утверждение о том, что минимум суммы корней достигается когда $x = y = z$ практически эквивалентно задаче и требует доказательства.

За арифметические ошибки, несущественно влияющие на ход решения *снимать 1 балл* (Чаще всего в этой задаче арифметическая ошибка рушит всё доказательство, нужно применять этот критерий очень осторожно)

5. (3 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

Оценка (доказательство того, что корней не меньше 5 или 7) — *1 балл.*

Правильное построение примера — *2 балла* (без достаточного обоснования — *1 балл.*)

Не требовать подробного объяснения того, почему если корни многочлена не лежат на отрезке между указанными в решении значениями, то условие задачи выполняется.

6. (4 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

Верно показано, как получить 240 раскрасок, не объясняется, почему нет других — *1 балл.*

7. (4 балла)

Свойства степеней точек считать известными.

Разобран только один случай расположения точки K на луче MD (она может находиться на отрезке MD или вне его) в решении, где это важно (например, с подсчётом углов) —*3 балла.* Аналогично для точки P в первом варианте.

8. (4 балла)

По одному баллу за доказательство делимости на 5, 9, 16, 11 или 19 (в зависимости от варианта).

0,5 балла за делимость на 3 (вар 2 — 4 или 8), если делимость на 9 (вар 2 — 16) не доказана.

Малую теорему Ферма можно использовать без доказательства.

9 класс

1. (2 балла)

Отсутствует внятное объянение, не может быть числа, деляшегося на 37, в котором две цифры одинаковые, а третья другая — *1 балл.*

(Если просто выписаны все делящиеся на 37 чисел, это считается внятным объянением).

2. (2 балла)

Ошибочый ответ из-за арифметической ошибки: *1,5 балла.*

Решения, в которых неверный ответ получен из-за логической, а не арифметической ошибки, не оцениваются.

3. (2 балла)

Только ответ с проверкой или без — *0,5 балла.*

Проверка ответа не требуется.

4. (3 балла)

Только ответ *0 баллов.*

5. (3 балла)

Частичные продвижения не оцениваются.

Неравенства о средних можно использовать без доказательства.

За арифметические ошибки, несущественно влияющие на ход решения *снимать 1 балл* (Чаще всего в этой задаче арифметическая ошибка рушит всё доказательство, нужно применять этот критерий очень осторожно)

6. (3 балла)

Рассуждение о том, что точка является серединой дуги слишком простое и не оценивается.

Лемму о трезубце можно использовать без доказательства. Впрочем, вместо использования леммы можно просто посчитать углы; такие решения также должны засчитываться.

7. (4 балла)

Замечание о том, что разности трёхчленов имеют по одному корню — *0,5 балла.*

8. (5 баллов)

Только ответ — *0 баллов.*

Описание процесса построения таблицы как в авторском решении — *1 балл.*

Верно заполненные первая и вторая строка таблицы — *ещё 1 балл* (*0,5 балла*, если неверно последнее число во второй строке).

В решении, требующем разбора случаев выставлять баллы пропорционально проценту разобранных случаев.

8 класс

1. (2 балла)

Только ответ «Не всегда» без примера — *0 баллов.*

Пример трёх чисел без какого-либо обоснования, что они подходят — *1 балл.*

2. (2 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

Уровня строгости авторского решения должно быть достаточно для полного балла.

Только пример максимального числа, при котором у мальчиков ничего не получится, без корректного обоснования максимальности — *1 балл.*

3. (2 балла)

Разрешается пользоваться геометрическими знаниями за пределами программы 8 класса.

Остальные критерии по задаче на усмотрение проверяющих.

4. (3 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

Уравнение решено только в натуральных числах — не снижать баллы.

5. (3 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

Правильный ответ с примером его получения — *1 балл.*

В варианте 2 потерян один из ответов — *снимать 0,5 балла.*

Отсутствует доказательство того, что при третьей операции число не меняет остатка (или корректная ссылка на признак делимости на 7 или 11) — — *снимать 1 балл.*

6. (4 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

Правильный ответ с примером его получения — *1 балл.*

Верный разбор первых двух уравнений из авторского решения — *1 балл.*

Верный разбор второй пары уравнений из авторского решения — *2 балла.*

(Указанные баллы складываются)

7. (4 балла)

Только ответ "Могут" — *0 баллов.*

Картинка без обоснования — *1 балл.*

8. (5 баллов)

Только ответ без оценки и без примера (или с неправильным примером) — *0 баллов.*

Пример — *2 балла*, оценка — *ещё 3 балла*

Обоснование примера (если он предъявлен в явном виде и верен) не требуется.

7 класс

1. (2 балла)

Только ответ “Да” — *0 баллов.*

2. (2 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

Уровня строгости авторского решения должно быть достаточно для полного балла.

Только пример максимального числа, при котором у мальчиков ничего не получится, без корректного обоснования максимальности — *1 балл.*

3. (2 балла)

Только правильный ответ с проверкой или без — *1 балл.*

4. (3 балла)

Участник использует равенства вместо неравенств и никак не поясняет, что речь идёт о минимальных значениях длин отрезков — *не более 1 балла.*

Участник считатет, что если нельзя составить треугольник, то сумма меньших отрезков СТРОГО меньше большего — *не более 1 балла.*

5. (3 балла)

Вообще говоря, предполагается, что в данный момент свойства параллельных прямых известные ещё не всем семиклассникам, но пользоваться ими можно.

6. (3 балла)

Только ответ ”Да” — *0 баллов.*

Правильный пример a и b без вычисления НОД и НОК или каки-либо другим пояснений, которые заменили бы эти вычисления — *1 балл.*

7. (4 балла)

Только ответ без примера или с неправильным примером — *0 баллов.*

Правильный ответ с примером — *2 балла*

Не снижать оценку за отсутствие объянения, почему пример подходит, если он показан в явном виде и лешко проверяется.

Оценка — *2 балла*

8. (5 баллов)

Только ответ без примера — *0 баллов.*

Пример — *2 балла.*

Оценка — *3 балла*

2 Задания 1 отборочного этапа олимпиады

2.1 Задания для 11 класса

Задача 1. (2 балла)

1. Найдите площадь подграфика функции $\dfrac{\operatorname{tg}\sin x+2}{\pi}$ на участке $-\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$

Ответ: 8

2. Найдите площадь подграфика функции $\dfrac{\sin\sin x+3}{\pi}$ на участке $-\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$

Ответ: 12

3. Найдите площадь подграфика функции $\dfrac{\operatorname{tg}\cos x+4}{\pi}$ на участке $-3\pi \leqslant x \leqslant \pi$

Ответ: 16

Задача 2. (2 балла)

1. Сумма коэффициентов кубического многочлена $P(x)$ совпадает с суммой коэффициентов его производной, а также второй производной. Разность коэффициентов многочлена $P(x)$ при x^3 и x^2 равна 3. Найдите $P(-1)$.

Ответ: -6

2. Сумма коэффициентов кубического многочлена $P(x)$ совпадает с суммой коэффициентов его производной, а также второй производной. Разность коэффициентов многочлена $P(x)$ при x^3 и x^2 равна 5. Найдите $P(-1)$.

Ответ: -10

3. Сумма коэффициентов кубического многочлена $P(x)$ совпадает с суммой коэффициентов его производной, а также второй производной. Разность коэффициента при x и свободного члена равна 7. Найдите $P(-1)$.

Ответ: -14

Задача 3. (3 балла)

1. Внутри трапеции со средней линией длины 10 и боковыми сторонами 7 и 5, находятся две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Кроме того, каждая из окружностей касается обоих оснований и одной боковой стороны. Найдите радиус любой из окружностей.

Если возможны несколько ответов, перечислите их в любом порядке через точку с запятой

Ответ: 2

2. Внутри трапеции со средней линией длины 12 и боковыми сторонами 8 и 6, находятся две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Кроме того, каждая из окружностей касается обоих оснований и одной боковой стороны. Найдите радиус любой из окружностей.

Если возможны несколько ответов, перечислите их в любом порядке через точку с запятой

Ответ: 2,5

3. Внутри трапеции со средней линией длины 14 и боковыми сторонами 7 и 9, находятся две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Кроме того, каждая из окружностей касается обоих оснований и одной боковой стороны. Найдите радиус любой из окружностей.

Если возможны несколько ответов, перечислите их в любом порядке через точку с запятой

Ответ: 3

Задача 4. (3 балла)

1. Дан куб $10 \times 10 \times 10$, грани которого параллельны плоскостям координат. Одна из вершин куба находится в начале координат, а вторая в точке $(10, 10, 10)$. В каждой целой точке куба в начале игры находится фишка. За один ход каждая фишка, кроме стоящих в начале координат, перемещается так, что одна её координата уменьшается на 1, а остальные остаются неизменными, при это ни одна из координат не может стать отрицательной. Фишки, попавшие в начало координат, не могут двигаться по этим правилам, поэтому стоят на месте.

Какое наибольшее количество точек может быть занято фишками через 20 ходов?

Ответ: 91

2. Дан куб $9 \times 9 \times 9$, грани которого параллельны плоскостям координат. Одна из вершин куба находится в начале координат, а вторая в точке $(9, 9, 9)$. В каждой целой точке куба в начале игры находится фишка. За один ход каждая фишка, кроме стоящих в начале координат, перемещается так, что одна её координата уменьшается на 1, а остальные остаются неизменными, при это ни одна из координат не может стать отрицательной. Фишки, попавшие в начало координат, не могут двигаться по этим правилам, поэтому стоят на месте.

Какое наибольшее количество точек может быть занято фишками через 18 ходов?

Ответ: 70

3. Дан куб $11 \times 11 \times 11$, грани которого параллельны плоскостям координат. Одна из вершин куба находится в начале координат, а вторая в точке $(11, 11, 11)$. В каждой целой точке куба в начале игры находится фишка. За один ход каждая фишка, кроме стоящих в начале координат, перемещается так, что одна её координата уменьшается на 1, а остальные остаются неизменными, при это ни одна из координат не может стать отрицательной. Фишки, попавшие в начало координат, не могут двигаться по этим правилам, поэтому стоят на месте.

Какое наибольшее количество точек может быть занято фишками через 22 хода?

Ответ: 112

Задача 5. (3 балла)

1. Какое наибольшее целое значение может принимать выражение $\log_x zt + \log_y zt + \log_y xt + \log_z xt - \log_z xy - \log_t xy$ при $xyzt = 1$ и $x, y, z > 1 > t$.

Ответ: -9

2. Какое наибольшее целое значение может принимать выражение $\log_x zt + \log_y zt - \log_x yt - \log_z yt - \log_y xz - \log_t xz$ при $xyzt = 1$ и $x, y > 1 > z, t$.

Ответ: -5

3. Какое наибольшее целое значение может принимать выражение $\log_x zt + \log_y zt - \log_x yt - \log_z yt + \log_z xy + \log_t xy - \log_y xz - \log_t xz$ при $xyzt = 1$ и $x, y > 1 > z, t$.

Ответ: -8

Задача 6. (3 балла)

1. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{(2n+1)x_n + 1}$. Найдите x_{1000}.

Ответ: 0,000001

2. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{(2n+1)x_n + 1}$. Найдите x_{500}.

Ответ: 0,000004

3. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{(2n+1)x_n + 1}$. Найдите x_{200}.

Ответ: 0,000025

Задача 7. (3 балла)

1. В клубе состоят 70 джентльменов. У каждого из них ровно три друга. Каждый джентльмен знаком со всеми своими друзьями и их друзьями. Какое наименьшее количество пар знакомых может быть?

Ответ: 111

2. В клубе состоят 50 джентльменов. У каждого из них ровно три друга. Каждый джентльмен знаком со всеми своими друзьями и их друзьями. Какое наименьшее количество пар знакомых может быть?

Ответ: 81

3. В клубе состоят 56 джентльменов. У каждого из них ровно четыре друга. Каждый джентльмен знаком со всеми своими друзьями и их друзьями. Какое наименьшее количество пар знакомых может быть?

Ответ: 115

Задача 8. (3 балла)

1. При каком положительном значении параметра a длина области определения функции $\dfrac{1}{a+\frac{1}{4}\sqrt{ax-x^2}}$ совпадает с длиной множества её значений?

Ответ не округляйте, если надо, используйте правильную или неправильную дробь.

Ответ: 1/3

2. При каком положительном значении параметра a длина области определения функции $\dfrac{1}{a+\frac{1}{12}\sqrt{ax-x^2}}$ совпадает с длиной множества её значений?

Ответ: 1/5

3. При каком положительном значении параметра a длина области определения функции $\dfrac{1}{a+\frac{1}{24}\sqrt{ax-x^2}}$ совпадает с длиной множества её значений?

Ответ не округляйте, если надо, используйте правильную или неправильную дробь.

Ответ: 1/7

Задача 9. (4 балла)

1. Решите уравнение $p^3-4p=q^3+182q$ в простых числах. В ответе укажите все возможные значения p (через точку с запятой, если их больше одного).

Ответ: 31

2. Решите уравнение $p^3-16p=q^3+260q$ в простых числах. В ответе укажите все возможные значения q (через точку с запятой, если их больше одного).

Ответ: 19

3. Решите уравнение $p^3-4p=q^3+254q$ в простых числах. В ответе укажите все возможные значения q (через точку с запятой, если их больше одного).

Ответ: 41

Задача 10. (5 баллов)

1. Правильный тетраэдр со стороной 6 разбит на части плоскостями, параллельными его граням так, что рёбра тетраэра оказались разделены на отрезки длины 1. Сколько тетраэдров среди получившихся частей?

Ответ: 76

2. Правильный тетраэдр со стороной 7 разбит на части плоскостями, параллельными его граням так, что рёбра тетраэра оказались разделены на отрезки длины 1. Сколько тетраэдров среди получившихся частей?

Ответ: 119

3. Правильный тетраэдр со стороной 8 разбит на части плоскостями, параллельными его граням так, что рёбра тетраэра оказались разделены на отрезки длины 1. Сколько тетраэдров среди получившихся частей?

Ответ: 176

2.2 Задания для 10 класса

Задача 1. (2 балла)

1. $P(x)$ — кубический многочлен. Известно, что $P(\sqrt{2})+P(-sqrt2)=16$, $P(\sqrt{2})\cdot P(-\sqrt{2})=-274$, коэффициент при x равен 5.

Найдите старший коэффициент $P(x)$.

Ответ: 4

2. $P(x)$ — кубический многочлен. Известно, что $P(\sqrt{2})+P(-sqrt2)=10$, $P(\sqrt{2})\cdot P(-\sqrt{2})=-313$, коэффициент при x равен 3.

Найдите старший коэффициент $P(x)$.

Ответ: 5

3. $P(x)$ — кубический многочлен. Известно, что $P(\sqrt{2})+P(-sqrt2)=20$, $P(\sqrt{2})\cdot P(-\sqrt{2})=-478$, коэффициент при x равен 5.

Найдите старший коэффициент $P(x)$.

Ответ: 6

Задача 2. (2 балла)

1. Дана функция $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$. Найдите $f(\ldots f(3)\ldots)$, где функция f применяется 1000 раз.

Ответ не округляйте, запишите в виде правильной или неправильной дроби.

Ответ: 3/6001

2. Дана функция $f(x)=\dfrac{x}{3x+1}$. Найдите $f(\ldots f(4)\ldots)$, где функция f применяется 200 раз.

Ответ не округляйте, запишите в виде правильной или неправильной дроби.

Ответ: 4/2401

3. Дана функция $f(x)=\dfrac{x}{4x+1}$. Найдите $f(\ldots f(2)\ldots)$, где функция f применяется 500 раз.

Ответ не округляйте, запишите в виде правильной или неправильной дроби.

Ответ: 2/4001

Задача 3. (3 балла)

1. Дан куб $10\times10\times10$, грани которого параллельны плоскостям координат. Одна из вершин которого находится в начале координат, а вторая в точке $(10,10,10)$. В каждой целой точке куба в начале игры находится фишка. За один ход каждая фишка, кроме стоящих в начале координат, перемещается так, что одна её координата уменьшается на 1, а остальные остаются неизменными, при это ни одна из координат не может стать отрицательной. Фишки, попавшие в начало координат, не могут двигаться по этим правилам, поэтому стоят на месте.

Какое наименьшее количество точек может быть занято фишками через 20 ходов?

Ответ: 11

2. Дан куб $9\times9\times9$, грани которого параллельны плоскостям координат. Одна из вершин которого находится в начале координат, а вторая в точке $(9,9,9)$. В каждой целой точке куба в начале игры находится фишка. За один ход каждая фишка, кроме стоящих в начале координат, перемещается так, что одна её координата уменьшается на 1, а остальные остаются неизменными, при это ни одна из координат не может стать отрицательной. Фишки, попавшие в начало координат, не могут двигаться по этим правилам, поэтому стоят на месте.

Какое наименьшее количество точек может быть занято фишками через 18 ходов?

Ответ: 10

3. Дан куб $11\times11\times11$, грани которого параллельны плоскостям координат. Одна из вершин которого находится в начале координат, а вторая в точке $(11,11,11)$. В каждой целой точке куба в начале игры находится фишка. За один ход каждая фишка, кроме стоящих в начале координат, перемещается так, что одна её координата уменьшается на 1, а остальные остаются неизменными, при это ни одна из координат не может стать отрицательной. Фишки, попавшие в начало координат, не могут двигаться по этим правилам, поэтому стоят на месте.

Какое наименьшее количество точек может быть занято фишками через 22 хода?

Ответ: 12

Задача 4. (3 балла)

1. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1 = 2$ и $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{(2n+1)x_n - 1}$. Найдите x_{312}.

Ответ: 0,0032

2. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1 = 3$ и $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{(2n+1)x_n - 1}$. Найдите x_{209}.

Ответ: 0,0048

3. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1 = 5$ и $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{(2n+1)x_n - 1}$. Найдите x_{204}.

Ответ: 5/1024

Задача 5. (3 балла)

1. Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 12$ и $BC = 8$. Найдите расстояние между точками касания вписанных окружностей треугольников ABD и BCD с диагональю BD.

Ответ: 0

2. Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 16$ и $BC = 12$. Найдите расстояние между точками касания вписанных окружностей треугольников ABD и BCD с диагональю BD.

Ответ: 0

3. Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 13$ и $BC = 9$. Найдите расстояние между точками касания вписанных окружностей треугольников ABD и BCD с диагональю BD.

Ответ: 0

Задача 6. (3 балла)

1. Сколькими способами клетчатую таблицу 10×10 можно раскрасить в два цвета так, чтобы в каждом столбце обязательно присутствовали оба цвета?

Ответ: $1022^1 0$

2. Сколькими способами клетчатую таблицу 9×9 можно раскрасить в два цвета так, чтобы в каждом столбце обязательно присутствовали оба цвета?

Ответ: 510^9

3. Сколькими способами клетчатую таблицу 11×11 можно раскрасить в два цвета так, чтобы в каждом столбце обязательно присутствовали оба цвета?

Ответ: $2046^1 1$

Задача 7. (3 балла)

1. У натурального числа 40 различных делителей (включая единицу и само число). Какое наибольшее количество делителей может быть у его квадрата?

Ответ: 243

2. У натурального числа 36 различных делителей (включая единицу и само число). Какое наибольшее количество делителей может быть у его квадрата?

Ответ: 225

3. У натурального числа 50 различных делителей (включая единицу и само число). Какое наибольшее количество делителей может быть у его квадрата?

Ответ: 243

Задача 8. (4 балла)

1. Натуральные числа $x_1, \ldots, x_{13}$ таковы, что $\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_{13}} = 3$. Какое наименьшее значение может принимать произведение $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{13}$?

Ответ: 204800000

2. Натуральные числа $x_1, \ldots, x_{18}$ таковы, что $\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_{18}} = 4$. Какое наименьшее значение может принимать произведение $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{18}$?

Ответ: 640000000000

3. Натуральные числа $x_1, \ldots, x_{14}$ таковы, что $\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{14}} = 3$. Какое наименьшее значение может принимать произведение $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{14}$?

Ответ: 2500000000

Задача 9. (4 балла)

1. В треугольнике ABC точки I является центром вписанной окружности. На описанной окружности треугольника ABC отметили точки D и E — середины дуг BC и AC. Известно, что $DE = 17$, $ID = 9$, $CE = 10$.

Найдите длину отрезка IC

Ответ не округляйте, запишите в виде правильной или неправильной дроби.

Ответ: 144/17

2. В треугольнике ABC точки I является центром вписанной окружности. На описанной окружности треугольника ABC отметили точки D и E — середины дуг AC и AB. Известно, что $DE = 20$, $ID = 15$, $AE = 7$.

Найдите длину отрезка IA

Ответ: 42/5

3. В треугольнике ABC точки I является центром вписанной окружности. На описанной окружности треугольника ABC отметили точки D и E — середины дуг AB и BC. Известно, что $DE = 20$, $ID = 13$, $BE = 11$.

Найдите длину отрезка IB

Ответ: 66/5

Задача 10. (4 балла)

1. В клубе состоят 70 джентльменов. У каждого из них ровно три друга. Каждый джентльмен знаком со всеми своими друзьями и их друзьями. Какое наибольшее количество пар знакомых может быть?

Ответ: 315

2. В клубе состоят 50 джентльменов. У каждого из них ровно три друга. Каждый джентльмен знаком со всеми своими друзьями и их друзьями. Какое наибольшее количество пар знакомых может быть?

Ответ: 225

3. В клубе состоят 90 джентльменов. У каждого из них ровно три друга. Каждый джентльмен знаком со всеми своими друзьями и их друзьями. Какое наибольшее количество пар знакомых может быть?

Ответ: 405

2.3 Задания для 9 класса

Задача 1. (1 балл)

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка E внутри параллелограмма такова, что $\angle EBA = 2\angle EBC$ и $\angle ECD = 2\angle ECB$. Найдите $\angle BEC$. Ответ укажите в градусах.

Ответ: 120

2. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка E внутри параллелограмма такова, что $\angle EBA = 3\angle EBC$ и $\angle ECD = 3\angle ECB$. Найдите $\angle BEC$. Ответ укажите в градусах.

Ответ: 135

3. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка E внутри параллелограмма такова, что $\angle EBA = 4\angle EBC$ и $\angle ECD = 4\angle ECB$. Найдите $\angle BEC$. Ответ укажите в градусах.

Ответ: 144

Задача 2. (3 балла)

1. Приведённый квадратный трёхчлен таков, что точка пересечения его графика с осью ординат, одна из точек пересечения его графика с осью абсцисс и начало координат образуют равнобедренный треугольник. Найдите абсциссу второй точки пересечения этого графика с осью абсцисс, если известно, что она положительна.

Ответ: 1

2. Приведённый квадратный трёхчлен таков, что точка пересечения его графика с осью ординат, одна из точек пересечения его графика с осью абсцисс и начало координат образуют равнобедренный треугольник. Найдите абсциссу второй точки пересечения этого графика с осью абсцисс, если известно, что она отрицательна.

Ответ: -1

3. Приведённый квадратный трёхчлен таков, что точка пересечения его графика с осью ординат и обе точки пересечения его графика с осью абсцисс образуют прямоугольный равнобедренный треугольник с вершиной на оси ординат. Найдите свободный член этого трёхчлена.

Ответ: -1

Задача 3. (3 балла)

1. Натуральные числа a и b таковы, что $\text{НОК}(a,b)^2 - \text{НОД}(a,b)^2 = 560$. Какое наибольшее значение может принимать число a?

Ответ: 24

2. Натуральные числа a и b таковы, что $\text{НОК}(a,b)^2 - \text{НОД}(a,b)^2 = 600$. Какое наибольшее значение может принимать число a?

Ответ: 25

3. Натуральные числа a и b таковы, что $\text{НОК}(a,b)^2 - \text{НОД}(a,b)^2 = 320$. Какое наибольшее значение может принимать число a?

Ответ: 18

Задача 4. (3 балла)

1. Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 12$ и $BC = 8$. Найдите расстояние между точками касания вписанных окружностей треугольников ABD и BCD с диагональю BD.

Ответ: 0

2. Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 16$ и $BC = 12$. Найдите расстояние между точками касания вписанных окружностей треугольников ABD и BCD с диагональю BD.

Ответ: 0

3. Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 13$ и $BC = 9$. Найдите расстояние между точками касания вписанных окружностей треугольников ABD и BCD с диагональю BD.

Ответ: 0

Задача 5. (3 балла)

1. У натурального числа 40 различных делителей (включая единицу и само число). Какое наибольшее количество делителей может быть у его квадрата?

Ответ: 243

2. У натурального числа 36 различных делителей (включая единицу и само число). Какое наибольшее количество делителей может быть у его квадрата?

Ответ: 225

3. У натурального числа 50 различных делителей (включая единицу и само число). Какое наибольшее количество делителей может быть у его квадрата?

Ответ: 243

Задача 6. (3 балла)

1. Из пункта A стартовала машина со скоростью 60 км/ч. Через час оттуда же стартовала машина со скоростью 65 км/ч, ещё через час — со скоростбю 70 км/ч, и т.д. Последняя машина стартовала со скоростью 120 км/ч.

Через какое время (в часах) после начала между этими машинами состоится последний обгон?

Ответ: 35

2. Из пункта A стартовала машина со скоростью 70 км/ч. Через час оттуда же стартовала машина со скоростью 75 км/ч, ещё через час — со скоростбю 80 км/ч, и т.д. Последняя машина стартовала со скоростью 130 км/ч.

Через какое время (в часах) после начала между этими машинами состоится последний обгон?

Ответ: 37

3. Из пункта A стартовала машина со скоростью 65 км/ч. Через час оттуда же стартовала машина со скоростью 65 км/ч, ещё через час — со скоростбю 70 км/ч, и т.д. Последняя машина стартовала со скоростью 125 км/ч.

Через какое время (в часах) после начала между этими машинами состоится последний обгон?

Ответ: 36

Задача 7. (4 балла)

1. Дан клетчатый квадрат 20×20, в каждой клетке которого стоит фишка. За один ход каждая фишка сдвигается влево или вниз на одну клетку, если это возможно. Какое наибольшее количество клеток может быть занято фишками через 19 ходов? (Фишки не могут выходить за пределы доски; на одной клетке может стоять несколько фишек).

Ответ: 110

2. Дан клетчатый квадрат 19×19, в каждой клетке которого стоит фишка. За один ход каждая фишка сдвигается влево или вниз на одну клетку, если это возможно. Какое наибольшее количество клеток может быть занято фишками через 19 ходов? (Фишки не могут выходить за пределы доски; на одной клетке может стоять несколько фишек).

Ответ: 90

3. Дан клетчатый квадрат 18×18, в каждой клетке которого стоит фишка. За один ход каждая фишка сдвигается влево или вниз на одну клетку, если это возможно. Какое наибольшее количество клеток может быть занято фишками через 19 ходов? (Фишки не могут выходить за пределы доски; на одной клетке может стоять несколько фишек).

Ответ: 72

Задача 8. (4 балла)

1. Сколькими способами клетчатую таблицу 10×10 можно раскрасить в два цвета так, чтобы в каждом столбце обязательно присутствовали оба цвета?

Ответ: 1022^10

2. Сколькими способами клетчатую таблицу 9×9 можно раскрасить в два цвета так, чтобы в каждом столбце обязательно присутствовали оба цвета?

Ответ: 510^9

3. Сколькими способами клетчатую таблицу 11×11 можно раскрасить в два цвета так, чтобы в каждом столбце обязательно присутствовали оба цвета?

Ответ: 2046^11

Задача 9. (4 балла)

1. Натуральные числа $x_1, \ldots, x_{13}$ таковы, что $\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{13}} = 3$. Какое наименьшее значение может принимать произведение $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{13}$?

Ответ: 204800000

2. Натуральные числа $x_1, \ldots, x_{18}$ таковы, что $\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{18}} = 4$. Какое наименьшее значение может принимать произведение $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{18}$?

Ответ: 640000000000

3. Натуральные числа $x_1, \ldots, x_{14}$ таковы, что $\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{14}} = 3$. Какое наименьшее значение может принимать произведение $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{14}$?

Ответ: 2500000000

Задача 10. (5 баллов)

1. В клубе состоят 70 джентльменов. У каждого из них ровно три друга. Каждый джентльмен знаком со всеми своими друзьями и их друзьями. Какое наибольшее количество пар знакомых может быть?

Ответ: 315

2. В клубе состоят 50 джентльменов. У каждого из них ровно три друга. Каждый джентльмен знаком со всеми своими друзьями и их друзьями. Какое наибольшее количество пар знакомых может быть?

Ответ: 225

3. В клубе состоят 90 джентльменов. У каждого из них ровно три друга. Каждый джентльмен знаком со всеми своими друзьями и их друзьями. Какое наибольшее количество пар знакомых может быть?

Ответ: 405

2.4 Задания для 8 класса

Задача 1. (1 балл)

1. 17 разбойников делили награбленное: несколько одинаковых золотых монет. Каждый забрал себе целое ненулевое число процентов от добычи. Какое наименьшее число золотых монет могло быть?

Ответ: 20

2. 22 разбойника делили награбленное: несколько одинаковых золотых монет. Каждый забрал себе целое ненулевое число процентов от добычи. Какое наименьшее число золотых монет могло быть?

Ответ: 25

3. 37 разбойников делили награбленное: несколько одинаковых золотых монет. Каждый забрал себе целое ненулевое число процентов от добычи. Какое наименьшее число золотых монет могло быть?

Ответ: 50

Задача 2. (2 балла)

1. Периметр треугольника ABC равен 20, периметр треугольника BCD равен 25. Какое наименьшее целочисленное значение может принимать периметр четырёхугольника $ABCD$?

Ответ: 26

2. Периметр треугольника ABC равен 23, периметр треугольника BCD равен 27. Какое наименьшее целочисленное значение может принимать периметр четырёхугольника $ABCD$?

Ответ: 28

3. Периметр треугольника ABC равен 32, периметр треугольника BCD равен 27. Какое наименьшее целочисленное значение может принимать периметр четырёхугольника $ABCD$?

Ответ: 33

Задача 3. (2 балла)

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка E внутри параллелограмма такова, что $\angle EBA = 2\angle EBC$ и $\angle ECD = 2\angle ECB$. Найдите $\angle BEC$. Ответ укажите в градусах.

Ответ: 120

2. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка E внутри параллелограмма такова, что $\angle EBA = 3\angle EBC$ и $\angle ECD = 3\angle ECB$. Найдите $\angle BEC$. Ответ укажите в градусах.

Ответ: 135

3. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка E внутри параллелограмма такова, что $\angle EBA = 4\angle EBC$ и $\angle ECD = 4\angle ECB$. Найдите $\angle BEC$. Ответ укажите в градусах.

Ответ: 144

Задача 4. (3 балла)

1. Двадцать ребят собирали деньги на подарок однокласснику Угэдэю. Хорошие мальчики сдали по три тугрика, а жадные — меньше. Какое наибольшее количество жадных ребят могло быть, если всего собрали 48 тугриков?

(Каждый ребёнок сдаёт целое число тугриков).

Ответ: 12

2. Пятнадцать ребят собирали деньги на подарок однокласснику Тохтамышу. Хорошие мальчики сдали по пять тугриков, а жадные — меньше. Какое наибольшее количество жадных ребят могло быть, если всего собрали 70 тугриков?

(Каждый ребёнок сдаёт целое число тугриков).

Ответ: 5

3. Шестнадцать ребят собирали деньги на подарок однокласснику Субудаю. Хорошие мальчики сдали по четыре тугрика, а жадные — меньше. Какое наибольшее количество жадных ребят могло быть, если всего собрали 55 тугриков?

Ответ: 9

(Каждый ребёнок сдаёт целое число тугриков).

Задача 5. (3 балла)

1. Из пункта A стартовала машина со скоростью 60 км/ч. Через час оттуда же стартовала машина со скоростью 65 км/ч, ещё через час — со скоростбю 70 км/ч, и т.д. Последняя машина стартовала со скоростью 120 км/ч.

Через какое время (в часах) после начала между этими машинами состоится последний обгон?

Ответ: 35

2. Из пункта A стартовала машина со скоростью 70 км/ч. Через час оттуда же стартовала машина со скоростью 75 км/ч, ещё через час — со скоростбю 80 км/ч, и т.д. Последняя машина стартовала со скоростью 130 км/ч.

Через какое время (в часах) после начала между этими машинами состоится последний обгон?

Ответ: 37

3. Из пункта A стартовала машина со скоростью 65 км/ч. Через час оттуда же стартовала машина со скоростью 65 км/ч, ещё через час — со скоростбю 70 км/ч, и т.д. Последняя машина стартовала со скоростью 125 км/ч.

Через какое время (в часах) после начала между этими машинами состоится последний обгон?

Ответ: 36

Задача 6. (3 балла)

1. Круговое шоссе имеет длину 30 километров. На нём находятся деревни A, B, C, D, E, F, G, H в каком-то порядке. Вася выехал из деревни H, посетил все остальные деревни в алфавитном порядке и снова вернулся в деревню H. При этом он всегда двигался по часовой стрелке. Какое наибольшее число километров он мог проехать?

(Вася не может проехать мимо деревни, в которую ему сейчас надо, он обязательно в ней остановится. Зато он всегда проезжает мимо деревни, в которую ему не надо, не заезжая в неё).

Ответ: 210

2. Круговое шоссе имеет длину 40 километров. На нём находятся деревни A, B, C, D, E, F, G в каком-то порядке. Вася выехал из деревни G, посетил все остальные деревни в алфавитном порядке и снова вернулся в деревню G. При этом он всегда двигался по часовой стрелке. Какое наибольшее число километров он мог проехать?

(Вася не может проехать мимо деревни, в которую ему сейчас надо, он обязательно в ней остановится. Зато он всегда проезжает мимо деревни, в которую ему не надо, не заезжая в неё).

Ответ: 240

3. Круговое шоссе имеет длину 45 километров. На нём находятся деревни A, B, C, D, E, F в каком-то порядке. Вася выехал из деревни F, посетил все остальные деревни в алфавитном порядке и снова вернулся в деревню F. При этом он всегда двигался против часовой стрелки. Какое наибольшее число километров он мог проехать?

(Вася не может проехать мимо деревни, в которую ему сейчас надо, он обязательно в ней остановится. Зато он всегда проезжает мимо деревни, в которую ему не надо, не заезжая в неё).

Ответ: 225

Задача 7. (4 балла)

1. Шесть чисел дают попарно различные остатки при делении на 8. Какие остатки при делении на 8 не может давать сумма их квадратов? Если ответов несколько, перечислите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 1, 5, 6

2. Пять чисел дают попарно различные остатки при делении на 8. Какие остатки при делении на 8 не может давать сумма их квадратов? Если ответов несколько, перечислите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 5

3. Семь чисел дают попарно различные остатки при делении на 9. Какие остатки при делении на 9 не может давать сумма их квадратов? Если ответов несколько, перечислите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 3, 0

Задача 8. (4 балла)

1. Натуральные числа a и b таковы, что $\text{НОК}(a,b)^2 - \text{НОД}(a,b)^2 = 560$. Какое наибольшее значение может принимать число a?

Ответ: 24

2. Натуральные числа a и b таковы, что $\text{НОК}(a,b)^2 - \text{НОД}(a,b)^2 = 600$. Какое наибольшее значение может принимать число a?

Ответ: 25

3. Натуральные числа a и b таковы, что $\text{НОК}(a,b)^2 - \text{НОД}(a,b)^2 = 320$. Какое наибольшее значение может принимать число a?

Ответ: 18

Задача 9. (5 баллов)

1. Дан клетчатый квадрат 20×20, в каждой клетке которого стоит фишка. За один ход каждая фишка сдвигается влево или вниз на одну клетку, если это возможно. Какое наибольшее количество клеток может быть занято фишками через 19 ходов? (Фишки не могут выходить за пределы доски; на одной клетке может стоять несколько фишек).

Ответ: 110

2. Дан клетчатый квадрат 19×19, в каждой клетке которого стоит фишка. За один ход каждая фишка сдвигается влево или вниз на одну клетку, если это возможно. Какое наибольшее количество клеток может быть занято фишками через 19 ходов? (Фишки не могут выходить за пределы доски; на одной клетке может стоять несколько фишек).

Ответ: 90

3. Дан клетчатый квадрат 18×18, в каждой клетке которого стоит фишка. За один ход каждая фишка сдвигается влево или вниз на одну клетку, если это возможно. Какое наибольшее количество клеток может быть занято фишками через 19 ходов? (Фишки не могут выходить за пределы доски; на одной клетке может стоять несколько фишек).

Ответ: 72 **Задача 10. (5 баллов)**

1. В каждой клетке доски 10×10 стоит рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждый из них сказал одну из следующих фраз: «На горизонтали, где я стою, ровно 7 рыцарей» или «На вертикали, где я стою, хотя бы 7 лжецов», причём все рыцари сказади первую фразу. Какое наименьшее ненулевое число рыцарей могло быть на доске?

Ответ: 42

2. В каждой клетке доски 10×10 стоит рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждый из них сказал одну из следующих фраз: «На горизонтали, где я стою, ровно 6 рыцарей» или «На вертикали, где я стою, хотя бы 6 лжецов», причём все рыцари сказади первую фразу. Какое наименьшее ненулевое число рыцарей могло быть на доске?

Ответ: 54

3. В каждой клетке доски 9×9 стоит рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждый из них сказал одну из следующих фраз: «На горизонтали, где я стою, ровно 8 рыцарей» или «На вертикали, где я стою, хотя бы 8 лжецов», причём все рыцари сказади первую фразу. Какое наименьшее ненулевое число рыцарей могло быть на доске?

Ответ: 48

2.5 Задания для 7 класса

Задача 1. (2 балла)

1. Найдите наибольшее четырёхзначное число, делящееся на 7, для которого его сумма цифр тоже делится на 7.

Ответ: 9989

2. Найдите наибольшее четырёхзначное число, делящееся на 8, для которого его сумма цифр тоже делится на 8.

Ответ: 9968

1. Найдите наибольшее четырёхзначное число, делящееся на 6, для которого его сумма цифр тоже делится на 6.

Ответ: 9984

Задача 2. (2 балла)

1. 17 разбойников делили награбленное: несколько одинаковых золотых монет. Каждый забрал себе целое ненулевое число процентов от добычи. Какое наименьшее число золотых монет могло быть?

Ответ: 20

2. 22 разбойника делили награбленное: несколько одинаковых золотых монет. Каждый забрал себе целое ненулевое число процентов от добычи. Какое наименьшее число золотых монет могло быть?

Ответ: 25

3. 37 разбойников делили награбленное: несколько одинаковых золотых монет. Каждый забрал себе целое ненулевое число процентов от добычи. Какое наименьшее число золотых монет могло быть?

Ответ: 50

Задача 3. (3 балла)

1. Дан клетчатый квадрат 20×20, в каждой клетке которого стоит фишка. За один ход каждая фишка сдвигается влево или вниз на одну клетку, если это возможно. Какое наменьшее количество клеток может быть занято фишками через 25 ходов? (Фишки не могут выходить за пределы доски; на одной клетке может стоять несколько фишек).

Ответ: 14

2. Дан клетчатый квадрат 19×19, в каждой клетке которого стоит фишка. За один ход каждая фишка сдвигается влево или вниз на одну клетку, если это возможно. Какое наименьшее количество клеток может быть занято фишками через 25 ходов? (Фишки не могут выходить за пределы доски; на одной клетке может стоять несколько фишек).

Ответ: 12

3. Дан клетчатый квадрат 18×18, в каждой клетке которого стоит фишка. За один ход каждая фишка сдвигается влево или вниз на одну клетку, если это возможно. Какое наименьшее количество клеток может быть занято фишками через 25 ходов? (Фишки не могут выходить за пределы доски; на одной клетке может стоять несколько фишек).

Ответ: 10

Задача 4. (3 балла)

1. Периметр треугольника ABC равен 20, периметр треугольника BCD равен 25. Какое наименьшее целочисленное значение может принимать периметр четырёхугольника $ABCD$?

Ответ: 26

2. Периметр треугольника ABC равен 23, периметр треугольника BCD равен 27. Какое наименьшее целочисленное значение может принимать периметр четырёхугольника $ABCD$?

Ответ: 28

3. Периметр треугольника ABC равен 32, периметр треугольника BCD равен 27. Какое наименьшее целочисленное значение может принимать периметр четырёхугольника $ABCD$?

Ответ: 33

Задача 5. (3 балла)

1. На столе лежат 60 палочек, имеющие длины 1, 2, ..., 60. Какое наименьшее количестов палочек нужно убрать, чтобы ни из каких трёх оставшихся нельзя было сложить треугольник?

Ответ: 51

2. На столе лежат 35 палочек, имеющие длины 2, 4, ..., 70. Какое наименьшее количестов палочек нужно убрать, чтобы ни из каких трёх оставшихся нельзя было сложить треугольник?

Ответ: 27

3. На столе лежат 30 палочек, имеющие длины 1, 3, 5, ..., 59. Какое наименьшее количестов палочек нужно убрать, чтобы ни из каких трёх оставшихся нельзя было сложить треугольник?

Ответ: 23

Задача 6. (3 балла)

1. Электронные часы показывают часы (от 0 до 23) и минуты (от 0 до 59). Например, половина первого ночи показывается как 0:30.

На протяжении какого количества минут в сутках число часов на часах делится на число минут? (0 делится на все числа, включая 0).

Ответ: 136

2. Электронные часы показывают часы (от 1 до 24) и минуты (от 0 до 59). Например, половина первого ночи показывается как 24:30.

На протяжении какого количества минут в сутках число часов на часах делится на число минут?

Ответ: 84

3. Электронные часы показывают часы (от 1 до 12) и минуты (от 0 до 59). Например, половина первого дня или ночи показывается как 12:30.

На протяжении какого количества минут в сутках число часов на часах делится на число минут?

Ответ: 70

Задача 7. (3 балла)

1. Двадцать ребят собирали деньги на подарок однокласснику Угэдэю. Хорошие мальчики сдали по три тугрика, а жадные — меньше. Какое наибольшее количество жадных ребят могло быть, если всего собрали 48 тугриков?

(Каждый ребёнок сдаёт целое число тугриков).

Ответ: 12

2. Пятнадцать ребят собирали деньги на подарок однокласснику Тохтамышу. Хорошие мальчики сдали по пять тугриков, а жадные — меньше. Какое наибольшее количество жадных ребят могло быть, если всего собрали 70 тугриков?

(Каждый ребёнок сдаёт целое число тугриков).

Ответ: 5

3. Шестнадцать ребят собирали деньги на подарок однокласснику Субудаю. Хорошие мальчики сдали по четыре тугрика, а жадные — меньше. Какое наибольшее количество жадных ребят могло быть, если всего собрали 55 тугриков?

Ответ: 9

(Каждый ребёнок сдаёт целое число тугриков).

Задача 8. (3 балла)

1. Круговое шоссе имеет длину 30 километров. На нём находятся деревни A, B, C, D, E, F, G, H в каком-то порядке. Вася выехал из деревни H, посетил все остальные деревни в алфавитном порядке и снова вернулся в деревню H. При этом он всегда двигался по часовой стрелке. Какое наибольшее число километров он мог проехать?

(Вася не может проехать мимо деревни, в которую ему сейчас надо, он обязательно в ней остановится. Зато он всегда проезжает мимо деревни, в которую ему не надо, не заезжая в неё).

Ответ: 210

2. Круговое шоссе имеет длину 40 километров. На нём находятся деревни A, B, C, D, E, F, G в каком-то порядке. Вася выехал из деревни G, посетил все остальные деревни в алфавитном порядке и снова вернулся в деревню G. При этом он всегда двигался по часовой стрелке. Какое наибольшее число километров он мог проехать?

(Вася не может проехать мимо деревни, в которую ему сейчас надо, он обязательно в ней остановится. Зато он всегда проезжает мимо деревни, в которую ему не надо, не заезжая в неё).

Ответ: 240

3. Круговое шоссе имеет длину 45 километров. На нём находятся деревни A, B, C, D, E, F в каком-то порядке. Вася выехал из деревни F, посетил все остальные деревни в алфавитном порядке и снова вернулся в деревню F. При этом он всегда двигался против часовой стрелки. Какое наибольшее число километров он мог проехать?

(Вася не может проехать мимо деревни, в которую ему сейчас надо, он обязательно в ней остановится. Зато он всегда проезжает мимо деревни, в которую ему не надо, не заезжая в неё).

Ответ: 225

Задача 9. (4 балла)

1. Шесть чисел дают попарно различные остатки при делении на 8. Какие остатки при делении на 8 не может давать сумма их квадратов? Если ответов несколько, перечислите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 1, 5, 6

2. Пять чисел дают попарно различные остатки при делении на 8. Какие остатки при делении на 8 не может давать сумма их квадратов? Если ответов несколько, перечислите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 5

3. Семь чисел дают попарно различные остатки при делении на 9. Какие остатки при делении на 9 не может давать сумма их квадратов? Если ответов несколько, перечислите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 3, 0

Задача 10. (5 баллов)

1. В каждой клетке доски 10×10 стоит рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждый из них сказал одну из следующих фраз: «На горизонтали, где я стою, ровно 7 рыцарей» или «На вертикали, где я стою, хотя бы 7 лжецов», причём все рыцари сказади первую фразу. Какое наименьшее ненулевое число рыцарей могло быть на доске?

Ответ: 42

2. В каждой клетке доски 10×10 стоит рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждый из них сказал одну из следующих фраз: «На горизонтали, где я стою, ровно 6 рыцарей» или «На вертикали, где я стою, хотя бы 6 лжецов», причём все рыцари сказади первую фразу. Какое наименьшее ненулевое число рыцарей могло быть на доске?

Ответ: 54

3. В каждой клетке доски 9×9 стоит рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждый из них сказал одну из следующих фраз: «На горизонтали, где я стою, ровно 8 рыцарей» или «На вертикали, где я стою, хотя бы 8 лжецов», причём все рыцари сказади первую фразу. Какое наименьшее ненулевое число рыцарей могло быть на доске?

Ответ: 48

3 Задания 2 отборочного этапа олимпиады

3.1 Задания для 11 класса

Задача 1. (2 балла)

1. Найдите количество решений уравнений $x^2y = 7200000$ в натуральных числах.

Ответ: 30

2. Найдите количество решений уравнений $x^2y = 64800$ в натуральных числах.

Ответ: 18

3. Найдите количество решений уравнений $x^2y = 882000$ в натуральных числах.

Ответ: 24

Задача 2. (2 балла)

1. В скольки точках на промежутке $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin 17x \cos 17x$ достигается максимума?

Ответ: 9

2. В скольки точках на промежутке $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin 19x \cos 19x$ достигается максимума?

Ответ: 10

3. В скольки точках на промежутке $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin 23x \cos 23x$ достигается максимума?

Ответ: 12

Задача 3. (2 балла)

1. В сферу S_1 вписан куб Q_1, в него вписана сфера S_2, в неё — куб Q_2, и так далее, для каждого k в сферу S_k вписан куб Q_k, а в него — сфера S_{k+1}.

Найдите отношение радиуса сферы S_1 к радиусу сферы S_{239}.

Ответ: $3^1 19$

2. В сферу S_1 вписан куб Q_1, в него вписана сфера S_2, в неё — куб Q_2, и так далее, для каждого k в сферу S_k вписан куб Q_k, а в него — сфера S_{k+1}.

Найдите отношение площади сферы S_1 к площади сферы S_{101}.

Ответ: $3^1 00$

3. В сферу S_1 вписан куб Q_1, в него вписана сфера S_2, в неё — куб Q_2, и так далее, для каждого k в сферу S_k вписан куб Q_k, а в него — сфера S_{k+1}.

Найдите отношение объёма сферы S_1 к объему сферы S_{21}.

Ответ: $3^3 0$

Задача 4. (3 балла)

1. Клетчатая доска 9×9 раскрашена в шахматном порядке (угловые клетки — чёрные). Какое наименьшее число клеток надо перекрасить из чёрного цвета в белый, чтобы множество белых клеток оказалось связным, то есть от любой клетки можно было бы добраться до любой по белым клеткам, переходя каждый раз на клетку, соседнюю по стороне?

Ответ: 14

2. Клетчатая доска 11×11 раскрашена в шахматном порядке (угловые клетки — чёрные). Какое наименьшее число клеток надо перекрасить из чёрного цвета в белый, чтобы множество белых клеток оказалось связным, то есть от любой клетки можно было бы добраться до любой по белым клеткам, переходя каждый раз на клетку, соседнюю по стороне?

Ответ: 20

3. Клетчатая доска 10×10 раскрашена в шахматном порядке. Какое наименьшее число клеток надо перекрасить из чёрного цвета в белый, чтобы множество белых клеток оказалось связным, то есть от любой клетки можно было бы добраться до любой по белым клеткам, переходя каждый раз на клетку, соседнюю по стороне?

Ответ: 18

Задача 5. (3 балла)

1. 10 натуральных чисел таковы, что логарифм любого из них по основанию любого другого — целое число, причём все эти логарифмы различны.

Какое наименьшее значение может принимать логарифм самого большого числа по самому маленькому?

Ответ: 10!=3628800

2. 9 натуральных чисел таковы, что логарифм любого из них по основанию любого другого — целое число, причём все эти логарифмы различны.

Какое наименьшее значение может принимать логарифм самого большого числа по самому маленькому?

Ответ: 9!=362880

3. 8 натуральных чисел таковы, что логарифм любого из них по основанию любого другого — целое число, причём все эти логарифмы различны.

Какое наименьшее значение может принимать логарифм самого большого числа по самому маленькому?

Ответ: 8!=40320

Задача 6. (3 балла)

1. Найдите площадь области или областей, ограниченных графиками функций $f(x)$ и $g(x)$, а также прямым $x = 0$ и $x = 2$, если известно, что $f(x) + g(x) = 2(x + \sin x)$ и $f(x)g(x) = 2x(\sin x + 1) - \cos^2 x$.

Ответ: 2

2. Найдите площадь области или областей, ограниченных графиками функций $f(x)$ и $g(x)$, а также прямым $x = 0$ и $x = 4$,

если известно, что $f(x) + g(x) = 2(x - \cos x)$ и $f(x)g(x) = -2x(\cos x + 1) - \sin^2 x$.

Ответ: 24

3. Найдите площадь области или областей, ограниченных графиками функций $f(x)$ и $g(x)$, а также прямым $x = 1$ и $x = 3$

если известно, что $f(x) + g(x) = \left(x - \dfrac{2}{\cos x}\right)$ и $f(x)g(x) = \left(x - \dfrac{1}{\cos x} - 1\right)\left(1 - \dfrac{1}{\cos x}\right)$.

Ответ: 1

Задача 7. (3 балла)

1. Функция $f(x)$ такова, что для любого x, отличного от нуля, $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + f(1 - x) = \dfrac{1}{x}$.
Найдите $f\left(\frac{5}{3}\right) - f(2,5)$.
Дробный ответ не округляйте, используйте правильную или неправильную дробь.
Ответ: -5/6

2. Функция $f(x)$ такова, что для любого x, отличного от нуля, $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + f(1 - x) = \dfrac{1}{x}$.
Найдите $f\left(\frac{7}{3}\right) - f\left(\frac{7}{4}\right)$.
Дробный ответ не округляйте, используйте правильную или неправильную дробь.
Ответ: 7/12

3. Функция $f(x)$ такова, что для любого x, отличного от нуля, $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + f(1 - x) = \dfrac{1}{x}$.
Найдите $f\left(\frac{8}{3}\right) - f\left(\frac{8}{5}\right)$.
Дробный ответ не округляйте, используйте правильную или неправильную дробь.
Ответ: 16/15

Задача 8. (4 балла)

1. Треугольник ABC имеет площадь 42. На сторонах AB и AC, длины которых составляют 15 и 12 соответственно, как на диаметрах построены окружности. Общие касательные к этим окружностям пересекаются в точке K. Одна из этих общих касательных пересекается с прямой BC в точке L, причем точки касания лежат на луче KL. Найдите длину отрезка KL.

Ответ: 14

2. Треугольник ABC имеет площадь 48. На сторонах AB и BC, длины которых составляют 17 и 13 соответственно, как на диаметрах построены окружности. Общие касательные к этим

окружностям пересекаются в точке P. Одна из этих общих касательных пересекается с прямой AC в точке Q, причем точки касания лежат на луче PQ. Найдите длину отрезка PQ.

Ответ: 12

3. Треугольник ABC имеет площадь 45. На сторонах BC и AC, длины которых составляют 16 и 11 соответственно, как на диаметрах построены окружности. Общие касательные к этим окружностям пересекаются в точке M. Одна из этих общих касательных пересекается с прямой AB в точке N, причем точки касания лежат на луче MN. Найдите длину отрезка MN.

Ответ: 9

Задача 8. (4 балла)

1. Даны три квадратных трёхчлена $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ со старшими коэффициентами p, q и r соответственно. Сумма этих трёхчленов равна 1. Любые два из них имеют общий корень, не являющийся корнем третьего. Кроме того, $\dfrac{pq}{r} = \dfrac{1}{16}$. Найдите разность корней трёхчлена $R(x)$ (из большего вычесть меньший).

Ответ: 4

2. Даны три квадратных трёхчлена $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ со старшими коэффициентами p, q и r соответственно. Сумма этих трёхчленов равна 1. Любые два из них имеют общий корень, не являющийся корнем третьего. Кроме того, $\dfrac{pq}{r} = \dfrac{1}{9}$. Найдите разность корней трёхчлена $R(x)$ (из большего вычесть меньший).

Ответ: 3

3. Даны три квадратных трёхчлена $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ со старшими коэффициентами p, q и r соответственно. Сумма этих трёхчленов равна 1. Любые два из них имеют общий корень, не являющийся корнем третьего. Кроме того, $\dfrac{pq}{r} = \dfrac{1}{25}$. Найдите разность корней трёхчлена $R(x)$ (из большего вычесть меньший).

Ответ: 5

Задача 10. (5 баллов)

1. В некоторой стране 125 городов и 3 авиакомпании. Авиалиниями каждой авиакомпании можно добраться от любого города до любого другого. Стоимость прямого перелёта между двумя городами составляет 3 тугрика, если они соединены единственной прямой авиалинией, 2 тугрика — если двумя и 1 тугрик — если тремя. Стоимость маршрутов с пересадками складывается из отдельных участков.

Вася хочет добраться из города А в город В потратив как можно меньше денег. Какое наибольшее количество тугриков ему, тем не менее, может потребоваться?

Ответ: 186

2. В некоторой стране 175 городов и 3 авиакомпании. Авиалиниями каждой авиакомпании можно добраться от любого города до любого другого. Стоимость прямого перелёта между двумя городами составляет 3 тугрика, если они соединены единственной прямой авиалинией, 2 тугрика — если двумя и 1 тугрик — если тремя. Стоимость маршрутов с пересадками складывается из отдельных участков.

Вася хочет добраться из города А в город В потратив как можно меньше денег. Какое наибольшее количество тугриков ему, тем не менее, может потребоваться?

Ответ: 261

3. В некоторой стране 225 городов и 3 авиакомпании. Авиалиниями каждой авиакомпании можно добраться от любого города до любого другого. Стоимость прямого перелёта между двумя городами составляет 3 тугрика, если они соединены единственной прямой авиалинией, 2 тугрика — если двумя и 1 тугрик — если тремя. Стоимость маршрутов с пересадками складывается из отдельных участков.

Вася хочет добраться из города А в город В потратив как можно меньше денег. Какое наибольшее количество тугриков ему, тем не менее, может потребоваться?

Ответ: 336

3.2 Задания для 10 класса

Задача 1. (2 балла)

1. В центре клетчатого листа 100×100 отметили начало координат и провели оси, параллельные сторонам листа, после чего построили график функции $y = x^3 - 2x$. Сколько клеток он пересекает больше, чем по одной точке?

Ответ: 106

2. В центре клетчатого листа 200×200 отметили начало координат и провели оси, параллельные сторонам листа, после чего построили график функции $y = x^3 - 3x$. Сколько клеток он пересекает больше, чем по одной точке?

Ответ: 204

3. В центре клетчатого листа 100×100 отметили начало координат и провели оси, параллельные сторонам листа, после чего построили график функции $y = x^3 - 3x$. Сколько клеток он пересекает больше, чем по одной точке?

Ответ: 104

Задача 2. (2 балла)

1. Даны три окружности радиусов 6, 7 и 8, попарно касающиеся друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки их касания.

Ответ: 4

2. Даны три окружности радиусов 2, 9 и 11, попарно касающиеся друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки их касания.

Ответ: 3

3. Даны три окружности радиусов 1, 5 и 24, попарно касающиеся друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки их касания.

Ответ: 2

Задача 3. (3 балла)

1. Три вектора на плоскости $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ таковы, что $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -10$, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = -15$, $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 6$. Какое наименьшее значение может принимать сумма квадратов длин этих векторов?

Ответ: 38

2. Три вектора на плоскости $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ таковы, что $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -9$, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = 5$, $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = -8$. Какое наименьшее значение может принимать сумма квадратов длин этих векторов?

Ответ: 24

3. Три вектора на плоскости $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ таковы, что $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 7$, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = 12$, $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 11$. Какое наименьшее значение может принимать сумма квадратов длин этих векторов?

Ответ: 32

Задача 4. (3 балла)

1. Кубический многочлен $P(x)$ таков, что $P(-2) = -7$, $P(-1) = 4$, $P(1) = 2$, $P(2) = 25$. Найдите $P(0)$.

Ответ: 1

2. Кубический многочлен $P(x)$ таков, что $P(-1) = -14$, $P(0) = -4$, $P(2) = 10$, $P(3) = 38$. Найдите $P(1)$.

Ответ: 0

3. Кубический многочлен $P(x)$ таков, что $P(-3) = -24$, $P(-2) = -17$, $P(0) = 3$, $P(1) = 4$. Найдите $P(-1)$.

Ответ: -6

Задача 5. (3 балла)

1. Для натурального числа y существует натуральное число x такое, что числа $x^3+3x+22-y^2$ и $y - 7x$ делятся на 23. Какой остаток может давайть y при делении на 23?

Если правильных ответов несколько, запишите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 7

2. Для натурального числа y существует натуральное число x такое, что числа $x^3+12x+15-y^2$ и $y-11x$ делятся на 23. Какой остаток может давайть y при делении на 23?

Если правильных ответов несколько, запишите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 22

3. Для натурального числа y существует натуральное число x такое, что числа $x^3+27x+19-y^2$ и $y-20x$ делятся на 23. Какой остаток может давайть y при делении на 23?

Если правильных ответов несколько, запишите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 14

Задача 6. (3 балла)

1. Последовательность задана формулой $x_{n+1}=\left[\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}\right]$ и начальным значением $x_1=1$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Найдите x_{529}.

Ответ: 32

2. Последовательность задана формулой $x_{n+1}=\left[\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}\right]$ и начальным значением $x_1=\dfrac{1}{4}$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Найдите x_{250}.

Ответ: 23

3. Последовательность задана формулой $x_{n+1}=\left[\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}\right]$ и начальным значением $x_1=\dfrac{1}{3}$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Найдите x_{350}.

Ответ: 27

Задача 7. (3 балла)

1. Вася написал на доске некоторое количество подряд идущих членов арифметической прогрессии. Петя нашёл среди них 9 подряд идущих членов возрастащей геометрической прогрессии с рациональным, но не целым знаменателем.

Какое наименьшее количество чисел мог написать Вася?

Ответ: 6306

2. Вася написал на доске некоторое количество подряд идущих членов арифметической прогрессии. Петя нашёл среди них 8 подряд идущих членов возрастащей геометрической прогрессии с рациональным, но не целым знаменателем.

Какое наименьшее количество чисел мог написать Вася?

Ответ: 2060

3. Вася написал на доске некоторое количество подряд идущих членов арифметической прогрессии. Петя нашёл среди них 10 подряд идущих членов возрастащей геометрической прогрессии с рациональным, но не целым знаменателем.

Какое наименьшее количество чисел мог написать Вася?

Ответ: 19172

Задача 8. (3 балла)

1. Квадрат площади $\sqrt{50}+5$ повернули вокруг одной из его точек на $45°$. Какова наименьшая возможная площадь пересечения исходного и повёрнутого квадратов?

Ответ: 5

2. Квадрат площади 1 повернули вокруг одной из его точек на $60°$. Каков наименьший возможный квадрат площади пересечения исходного и повёрнутого квадратов?

Ответ: 3

3. Квадрат площади $4+\sqrt{12}$ повернули вокруг одной из его точек на $30°$. Какова наименьшая возможная площадь пересечения исходного и повёрнутого квадратов?

Ответ: 2

Задача 9. (4 балла)

1. Сколькими способами можно раскрасить квадрат 4×4 в чёрный, красный, синий и белый цвета так, чтобы в любом квадрате 2×2 все клетки были разного цвета? (Раскраски, отличающиеся поворотом, симметрией или заменой одного цвета на другой считать разными).

Ответ: 168

2. Сколькими способами можно раскрасить прямоугольник 3×5 в чёрный, красный, синий и белый цвета так, чтобы в любом квадрате 2×2 все клетки были разного цвета? (Раскраски, отличающиеся поворотом, симметрией или заменой одного цвета на другой считать разными).

Ответ: 216

3. Сколькими способами можно раскрасить прямоугольник 3×6 в чёрный, красный, синий и белый цвета так, чтобы в любом квадрате 2×2 все клетки были разного цвета? (Раскраски, отличающиеся поворотом, симметрией или заменой одного цвета на другой считать разными).

Ответ: 408

Задача 10. (4 балла)

1. В некоторой стране 125 городов и две авиакомпании. Авиалиниями каждой авиакомпании можно добраться от любого города до любого другого. Стоимость прямого перелёта между двумя городами составляет 2 тугрика, если они соединены единственной прямой авиалинией и 1 тугрик — если двумя. Стоимость маршрутов с пересадками складывается из отдельных участков.

Вася хочет добраться из города A в город B потратив как можно меньше денег. Какое наибольшее количество тугриков ему, тем не менее, может потребоваться?

Ответ: 124

2. В некоторой стране 175 городов и две авиакомпании. Авиалиниями каждой авиакомпании можно добраться от любого города до любого другого. Стоимость прямого перелёта между двумя городами составляет 2 тугрика, если они соединены единственной прямой авиалинией и 1 тугрик — если двумя. Стоимость маршрутов с пересадками складывается из отдельных участков.

Вася хочет добраться из города A в город B потратив как можно меньше денег. Какое наибольшее количество тугриков ему, тем не менее, может потребоваться?

Ответ: 174

3. В некоторой стране 225 городов и две авиакомпании. Авиалиниями каждой авиакомпании можно добраться от любого города до любого другого. Стоимость прямого перелёта между двумя городами составляет 2 тугрика, если они соединены единственной прямой авиалинией и 1 тугрик — если двумя. Стоимость маршрутов с пересадками складывается из отдельных участков.

Вася хочет добраться из города A в город B потратив как можно меньше денег. Какое наибольшее количество тугриков ему, тем не менее, может потребоваться?

Ответ: 224

3.3 Задания для 9 класса

Задача 1. (2 балла)

1. На прямой ℓ отмечены точки A, B, C и D; на прямой ℓ_1 отмечены точки A_1, B_1, C_1 и D_1. При этом $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ и $AB_1 \parallel BC_1 \parallel CD_1 \parallel$. $AB = 4$, $CD = 9$. Найдите BC.

Ответ: 6

2. На прямой ℓ отмечены точки A, B, C и D; на прямой ℓ_1 отмечены точки A_1, B_1, C_1 и D_1. При этом $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ и $A_1B \parallel B_1C \parallel C_1D \parallel$. $AB = 16$, $CD = 9$. Найдите BC.

Ответ: 12

3. На прямой ℓ отмечены точки A, B, C и D; на прямой ℓ_1 отмечены точки A_1, B_1, C_1 и D_1. При этом $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ и $A_1B \parallel B_1C \parallel C_1D \parallel$. $A_1B_1 = 9$, $C_1D_1 = 25$. Найдите B_1C_1.

Ответ: 15

Задача 2. (2 балла)

1. Квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + ax + c = 0$ имеют общий корень. Чему он может быть равен? Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 0; 1

2. Квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $cx^2 + bx + a = 0$ имеют общий корень. Чему он может быть равен? Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -1; 1

3. Квадратные уравнения $ax^2 - bx + c = 0$ и $bx^2 - ax + c = 0$ имеют общий корень. Чему он может быть равен? Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 0; -1

Задача 3. (3 балла)

1. Даны три окружности радиусов 6, 7 и 8, попарно касающиеся друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки их касания.

Ответ: 4

2. Даны три окружности радиусов 2, 9 и 11, попарно касающиеся друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки их касания.

Ответ: 3

3. Даны три окружности радиусов 1, 5 и 24, попарно касающиеся друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки их касания.

Ответ: 2

Задача 4. (3 балла)

1. Вася умеет превращать одно число в другое, несколько раз уменьшая на 1 одну из его цифр, например $98 \to 97 \to 87 \to 77$ или $98 \to 88 \to 78 \to 77$. Сколько таких цепочек он может составить для чисел 887 и 642?

Ответ: 6930

2. Вася умеет превращать одно число в другое, несколько раз уменьшая на 1 одну из его цифр, например $98 \to 97 \to 87 \to 77$ или $98 \to 88 \to 78 \to 77$. Сколько таких цепочек он может составить для чисел 947 и 523?

Ответ: 3150

3. Вася умеет превращать одно число в другое, несколько раз уменьшая на 1 одну из его цифр, например $98 \to 97 \to 87 \to 77$ или $98 \to 88 \to 78 \to 77$. Сколько таких цепочек он может составить для чисел 676 и 125?

Ответ: 2772

Задача 5. (3 балла)

1. На декартовой плоскости нарисован шестиугольник (не обязательно выпуклый) с вершинами в целых точках, среди сторон которого нет равных. Какое наименьшее значение может принимать квадрат его наибольшей стороны?

Ответ: 10

1. На декартовой плоскости нарисован семиугольник (не обязательно выпуклый) с вершинами в целых точках, среди сторон которого нет равных. Какое наименьшее значение может принимать квадрат его наибольшей стороны?

Ответ: 13

1. На декартовой плоскости нарисован шестиугольник (не обязательно выпуклый) с вершинами в целых точках, среди сторон которого нет параллельных. Какое наименьшее значение может принимать квадрат его наибольшей стороны?

Ответ: 5

Задача 6. (3 балла)

1. Для натурального числа y существует натуральное число x такое, что числа $x^3+3x+22-y^2$ и $y-7x$ делятся на 23. Какой остаток может давайть y при делении на 23?

Если правильных ответов несколько, запишите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 7

2. Для натурального числа y существует натуральное число x такое, что числа $x^3+12x+15-y^2$ и $y-11x$ делятся на 23. Какой остаток может давайть y при делении на 23?

Если правильных ответов несколько, запишите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 22

3. Для натурального числа y существует натуральное число x такое, что числа $x^3+27x+19-y^2$ и $y-20x$ делятся на 23. Какой остаток может давайть y при делении на 23?

Если правильных ответов несколько, запишите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 14

Задача 7. (3 балла)

1. Натуральные числа a и b таковы, что $a+b+HOK(a,b)=91$. Какое наибольшее значение может принимать $HOK(a,b)$?

Ответ: 66

2. Натуральные числа a и b таковы, что $a+b+HOK(a,b)=77$. Какое наибольшее значение может принимать $HOK(a,b)$?

Ответ: 60

3. Натуральные числа a и b таковы, что $a+b+HOK(a,b)=65$. Какое наибольшее значение может принимать $HOK(a,b)$?

Ответ: 42

Задача 8. (4 балла)

1. Кубический многочлен $P(x)$ таков, что $P(-2)=-7$, $P(-1)=4$, $P(1)=2$, $P(2)=25$. Найдите $P(0)$.

Ответ: 1

2. Кубический многочлен $P(x)$ таков, что $P(-1)=-14$, $P(0)=-4$, $P(2)=10$, $P(3)=38$. Найдите $P(1)$.

Ответ: 0

3. Кубический многочлен $P(x)$ таков, что $P(-3)=-24$, $P(-2)=-17$, $P(0)=3$, $P(1)=4$. Найдите $P(-1)$.

Ответ: -6

Задача 9. (4 балла)

1. Сколькими способами можно раскрасить квадрат 4×4 в чёрный, красный, синий и белый цвета так, чтобы в любом квадрате 2×2 все клетки были разного цвета? (Раскраски, отличающиеся поворотом, симметрией или заменой одного цвета на другой считать разными).

Ответ: 168

2. Сколькими способами можно раскрасить прямоугольник 3×5 в чёрный, красный, синий и белый цвета так, чтобы в любом квадрате 2×2 все клетки были разного цвета? (Раскраски, отличающиеся поворотом, симметрией или заменой одного цвета на другой считать разными).

Ответ: 216

3. Сколькими способами можно раскрасить прямоугольник 3×6 в чёрный, красный, синий и белый цвета так, чтобы в любом квадрате 2×2 все клетки были разного цвета? (Раскраски, отличающиеся поворотом, симметрией или заменой одного цвета на другой считать разными).

Ответ: 408

Задача 10. (4 балла)

1. В некоторой стране 125 городов и две авиакомпании. Авиалиниями каждой авиакомпании можно добраться от любого города до любого другого. Стоимость прямого перелёта между двумя городами составляет 2 тугрика, если они соединены единственной прямой авиалинией и 1 тугрик — если двумя. Стоимость маршрутов с пересадками складывается из отдельных участков.

Вася хочет добраться из города A в город B потратив как можно меньше денег. Какое наибольшее количество тугриков ему, тем не менее, может потребоваться?

Ответ: 124

2. В некоторой стране 175 городов и две авиакомпании. Авиалиниями каждой авиакомпании можно добраться от любого города до любого другого. Стоимость прямого перелёта между двумя городами составляет 2 тугрика, если они соединены единственной прямой авиалинией и 1 тугрик — если двумя. Стоимость маршрутов с пересадками складывается из отдельных участков.

Вася хочет добраться из города A в город B потратив как можно меньше денег. Какое наибольшее количество тугриков ему, тем не менее, может потребоваться?

Ответ: 174

3. В некоторой стране 225 городов и две авиакомпании. Авиалиниями каждой авиакомпании можно добраться от любого города до любого другого. Стоимость прямого перелёта между двумя городами составляет 2 тугрика, если они соединены единственной прямой авиалинией и 1 тугрик — если двумя. Стоимость маршрутов с пересадками складывается из отдельных участков.

Вася хочет добраться из города A в город B потратив как можно меньше денег. Какое наибольшее количество тугриков ему, тем не менее, может потребоваться?

Ответ: 224

3.4 Задания для 8 класса

Задача 1. (2 балла)

1. В равнобедренном треугольнике ABC (не указано, какие стороны равны) биссектриса AL перпендикулярнам медиане BM. $AB = 5$. Найдите периметр треугольника ABC. Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 25

2. В равнобедренном треугольнике ABC (не указано, какие стороны равны) биссектриса BL перпендикулярнам медиане CM. $BC = 7$. Найдите периметр треугольника ABC. Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 35

3. В равнобедренном треугольнике ABC (не указано, какие стороны равны) биссектриса CL перпендикулярнам медиане AM. $AC = 4$. Найдите периметр треугольника ABC. Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 20

Задача 2. (3 балла)

1. На прямой ℓ отмечены точки A, B, C и D; на прямой ℓ_1 отмечены точки A_1, B_1, C_1 и D_1. При этом $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ и $AB_1 \parallel BC_1 \parallel CD_1 \parallel$. $AB = 4$, $CD = 9$. Найдите BC.

Ответ: 6

2. На прямой ℓ отмечены точки A, B, C и D; на прямой ℓ_1 отмечены точки A_1, B_1, C_1 и D_1. При этом $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ и $A_1B \parallel B_1C \parallel C_1D \parallel$. $AB = 16$, $CD = 9$. Найдите BC.

Ответ: 12

3. На прямой ℓ отмечены точки A, B, C и D; на прямой ℓ_1 отмечены точки A_1, B_1, C_1 и D_1. При этом $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ и $A_1B \parallel B_1C \parallel C_1D \parallel$. $A_1B_1 = 9$, $C_1D_1 = 25$. Найдите B_1C_1.

Ответ: 15

Задача 3. (3 балла)

1. Квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + ax + c = 0$ имеют общий корень. Чему он может быть равен? Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 0; 1

2. Квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $cx^2 + bx + a = 0$ имеют общий корень. Чему он может быть равен? Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -1; 1

3. Квадратные уравнения $ax^2 - bx + c = 0$ и $bx^2 - ax + c = 0$ имеют общий корень. Чему он может быть равен? Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 0; -1

Задача 4. (3 балла)

1. Палочку длиной 1 метр сломали на четыре части, длина каждой из которых составляет целое число сантиметров. Оказалось, что ни из каких двух частей нельзя составить треугольник. Какую наибольшую длину (в сантиметрах) может иметь наименьшая из частей?

Ответ: 14

2. Палочку длиной 60 сантиметров сломали на четыре части, длина каждой из которых составляет целое число сантиметров. Оказалось, что ни из каких двух частей нельзя составить треугольник. Какую наибольшую длину (в сантиметрах) может иметь наименьшая из частей?

Ответ: 8

3. Палочку длиной 80 сантиметров сломали на четыре части, длина каждой из которых составляет целое число сантиметров. Оказалось, что ни из каких двух частей нельзя составить треугольник. Какую наибольшую длину (в сантиметрах) может иметь наименьшая из частей?

Ответ: 11

Задача 5. (3 балла)

1. НОК(a, b) в 6 раз больше, чем НОД(a, b). Во сколько раз большее из чисел a и b превосходит меньшее? Приведите все возможные ответы через точку с запятой.

Ответ: 6; 1,5

2. НОК(a, b) в 10 раз больше, чем НОД(a, b). Во сколько раз большее из чисел a и b превосходит меньшее? Приведите все возможные ответы через точку с запятой.

Ответ: 10; 2,5

3. НОК(a, b) в 35 раз больше, чем НОД(a, b). Во сколько раз большее из чисел a и b превосходит меньшее? Приведите все возможные ответы через точку с запятой.

Ответ: 35; 7/5

Задача 6. (3 балла)

1. На длинной скамье сидят рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут, всего 50 человек. Каждого (включая Васю и Петю) из них спросили, где относительно них сидит Вася. 30 человек сказали, что Вася сидит правее, чем они, а остальные 20 — что левее. Затем каждого из них (включая Васю и Петю) спросили, где относительно них сидит Петя. 22 человека сказали, что Петя сидит правее, чем они, а остальные 28 — что левее. Какое наименьшее количество человек может сидеть между Васей и Петей (не включая Васю и Петю)?

Ответ: 6

2. На длинной скамье сидят рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут, всего 100 человек. Каждого (включая Васю и Петю) из них спросили, где относительно них сидит Вася. 75 человек сказали, что Вася сидит правее, чем они, а остальные 25 — что левее. Затем каждого из них (включая Васю и Петю) спросили, где относительно них сидит Петя. 62 человека сказали, что Петя сидит правее, чем они, а остальные 38 — что левее. Какое наименьшее количество человек может сидеть между Васей и Петей (не включая Васю и Петю)?

Ответ: 11

3. На длинной скамье сидят рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут, всего 70 человек. Каждого (включая Васю и Петю) из них спросили, где относительно них сидит Вася. 45 человек сказали, что Вася сидит правее, чем они, а остальные 25 — что левее. Затем каждого из них (включая Васю и Петю) спросили, где относительно них сидит Петя. 38 человек сказали, что Петя сидит правее, чем они, а остальные 37 — что левее. Какое наименьшее количество человек может сидеть между Васей и Петей (не включая Васю и Петю)?

Ответ: 5

Задача 7. (3 балла)

1. Вася умеет превращать одно число в другое, несколько раз уменьшая на 1 одну из его цифр, например $98 \to 97 \to 87 \to 77$ или $98 \to 88 \to 78 \to 77$. Сколько таких цепочек он может составить для чисел 887 и 642?

Ответ: 6930

2. Вася умеет превращать одно число в другое, несколько раз уменьшая на 1 одну из его цифр, например $98 \to 97 \to 87 \to 77$ или $98 \to 88 \to 78 \to 77$. Сколько таких цепочек он может составить для чисел 947 и 523?

Ответ: 3150

3. Вася умеет превращать одно число в другое, несколько раз уменьшая на 1 одну из его цифр, например $98 \to 97 \to 87 \to 77$ или $98 \to 88 \to 78 \to 77$. Сколько таких цепочек он может составить для чисел 676 и 125?

Ответ: 2772

Задача 8. (3 балла)

1. На декартовой плоскости нарисован шестиугольник (не обязательно выпуклый) с вершинами в целых точках, среди сторон которого нет равных. Какое наименьшее значение может принимать квадрат его наибольшей стороны?

Ответ: 10

1. На декартовой плоскости нарисован семиугольник (не обязательно выпуклый) с вершинами в целых точках, среди сторон которого нет равных. Какое наименьшее значение может принимать квадрат его наибольшей стороны?

Ответ: 13

1. На декартовой плоскости нарисован шестиугольник (не обязательно выпуклый) с вершинами в целых точках, среди сторон которого нет параллельных. Какое наименьшее значение может принимать квадрат его наибольшей стороны?

Ответ: 5

Задача 9. (4 балла)

1. Натуральные числа a и b таковы, что $a+b+HOK(a,b)=91$. Какое наибольшее значение может принимать $HOK(a,b)$?

Ответ: 66

2. Натуральные числа a и b таковы, что $a+b+HOK(a,b)=77$. Какое наибольшее значение может принимать $HOK(a,b)$?

Ответ: 60

3. Натуральные числа a и b таковы, что $a+b+HOK(a,b)=65$. Какое наибольшее значение может принимать $HOK(a,b)$?

Ответ: 42

Задача 10. (5 баллов)

1. Какое наименьшее количество крестов из пяти клеток нужно, чтобы покрыть все белые клетки шахматной доски? (Фигурки могут перекрываться и выходить за пределы доски).

Ответ: 10

2. Клетки доски 7×7 раскрашены в шахматном порядке, угловые клетки — белые. Какое наименьшее количество крестов из пяти клеток нужно, чтобы покрыть все белые клетки этой доски? (Фигурки могут перекрываться и выходить за пределы доски).

Ответ: 8

3. Клетки доски 9×9 раскрашены в шахматном порядке, угловые клетки — чёрные. Какое наименьшее количество крестов из пяти клеток нужно, чтобы покрыть все белые клетки шахматной доски? (Фигурки могут перекрываться и выходить за пределы доски).

Ответ: 12

3.5 Задания для 7 класса

Задача 1. (2 балла)

1. На доске было написано число 1. Каждую минуту вместо числа на доске записывают сумму цифр вчетверо большего числа. Какое число окажется на доске через час?

Ответ: 10

2. На доске было написано число 1. Каждую минуту вместо числа на доске записывают сумму цифр вдвое большего числа. Какое число окажется на доске через час?

Ответ: 1

3. На доске было написано число 2. Каждую минуту вместо числа на доске записывают сумму цифр впятеро большего числа. Какое число окажется на доске через час?

Ответ: 2

Задача 2. (2 балла)

1. Вася назначил Пете встречу, но Петя перепутал часы и минуты между собой и пришёл позже, но в те же календарные сутки. Какое наибольшее количество минут Вася мог ждать Петю, если сам Вася пришёл вовремя?

Ответ: 1357

2. Вася назначил Пете встречу, но Петя перепутал часы и минуты между собой и пришёл позже, но в те же календарные сутки. Какое наибольшее количество минут Вася мог ждать Петю, если сам Вася пришёл вовремя, а количество и часов, и минут во времени, которое он назначил, было чётным?

Ответ: 1298

3. Вася назначил Пете встречу, но Петя перепутал часы и минуты между собой и пришёл позже, но в те же календарные сутки. Какое наибольшее количество минут Вася мог ждать Петю, если сам Вася пришёл вовремя, а количество и часов, и минут во времени, которое он назначил, было нечётным?

Ответ: 1298

Задача 3. (3 балла)

1. Вася умеет превращать одно число в другое, несколько раз уменьшая на 1 одну из его цифр, например $98 \to 97 \to 87 \to 77$ или $98 \to 88 \to 78 \to 77$. Сколько таких цепочек он может составить для чисел 89 и 53?

Ответ: 84

2. Вася умеет превращать одно число в другое, несколько раз уменьшая на 1 одну из его цифр, например $98 \to 97 \to 87 \to 77$ или $98 \to 88 \to 78 \to 77$. Сколько таких цепочек он может составить для чисел 79 и 34?

Ответ: 126

3. Вася умеет превращать одно число в другое, несколько раз уменьшая на 1 одну из его цифр, например $98 \to 97 \to 87 \to 77$ или $98 \to 88 \to 78 \to 77$. Сколько таких цепочек он может составить для чисел 87 и 52?

Ответ: 56

Задача 4. (3 балла)

1. Палочку длиной 1 метр сломали на четыре части, длина каждой из которых составляет целое число сантиметров. Оказалось, что ни из каких двух частей нельзя составить треугольник. Какую наибольшую длину (в сантиметрах) может иметь наименьшая из частей?

Ответ: 14

2. Палочку длиной 60 сантиметров сломали на четыре части, длина каждой из которых составляет целое число сантиметров. Оказалось, что ни из каких двух частей нельзя составить треугольник. Какую наибольшую длину (в сантиметрах) может иметь наименьшая из частей?

Ответ: 8

3. Палочку длиной 80 сантиметров сломали на четыре части, длина каждой из которых составляет целое число сантиметров. Оказалось, что ни из каких двух частей нельзя составить треугольник. Какую наибольшую длину (в сантиметрах) может иметь наименьшая из частей?

Ответ: 11

Задача 5. (3 балла)

1. НОК(a, b) в 6 раз больше, чем НОД(a, b). Во сколько раз большее из чисел a и b превосходит меньшее? Приведите все возможные ответы через точку с запятой.

Ответ: 6; 1,5

2. НОК(a, b) в 10 раз больше, чем НОД(a, b). Во сколько раз большее из чисел a и b превосходит меньшее? Приведите все возможные ответы через точку с запятой.

Ответ: 10; 2,5

3. НОК(a, b) в 35 раз больше, чем НОД(a, b). Во сколько раз большее из чисел a и b превосходит меньшее? Приведите все возможные ответы через точку с запятой.

Ответ: 35; 7/5

Задача 6. (3 балла)

1. Три мальчика (Вася, Коля и Петя) собирали грибы. Вася собрал более 60% грибов от собранного всеми тремя мальчиками, Коля — более 20%, а Петя — более 10%. Какое наименьшее число грибов мог собрать Вася?

Ответ: 5

2. Три мальчика (Вася, Коля и Петя) собирали грибы. Вася собрал более 65% грибов от собранного всеми тремя мальчиками, Коля — более 15%, а Петя — более 10%. Какое наименьшее число грибов мог собрать Вася?

Ответ: 4

3. Три мальчика (Вася, Коля и Петя) собирали грибы. Вася собрал более 40% грибов от собранного всеми тремя мальчиками, Коля — более 25%, а Петя — тоже более 25%. Какое наименьшее число грибов мог собрать Вася?

Ответ: 3

Задача 7. (3 балла)

1. Самолёт вылетел из города A в 6:00 по местному времени и прилетел в город B в 21:00 того же дня по времени города B. Спустя три с половиной часа он с той же скоростью вылетел обратно и приземлился в городе A в 23:30 по местному времени. Сколько мог длиться полёт в одну сторону? Если правильных ответов несколько, перечислите их порядке возрастания или убывания через точку с запятой. (Часовые пояса на Земле отличаются не больше, чем на 26 часов)

Ответ: 7; 19; 31

2. Самолёт вылетел из города A в 11:30 по местному времени и прилетел в город B в 23:30 того же дня по времени города B. Спустя полтора часа он с той же скоростью вылетел обратно и приземлился в городе A в 23:00 по местному времени. Сколько мог длиться полёт в одну сторону? Если правильных ответов несколько, перечислите их порядке возрастания или убывания через точку с запятой. (Часовые пояса на Земле отличаются не больше, чем на 26 часов)

Ответ: 5; 17; 29

3. Самолёт вылетел из города A в 6:00 по местному времени и прилетел в город B в 23:00 того же дня по времени города B. Спустя два часа он с той же скоростью вылетел обратно и приземлился в городе A в 22:00 по местному времени. Сколько мог длиться полёт в одну сторону? Если правильных ответов несколько, перечислите их порядке возрастания или убывания через точку с запятой. (Часовые пояса на Земле отличаются не больше, чем на 26 часов)

Ответ: 6; 18; 30

Задача 8. (3 балла)

1. В равнобедренном треугольнике ABC (не указано, какие стороны равны) биссектриса AL перпендикулярнам медиане BM. $AB = 5$. Найдите периметр треугольника ABC. Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 25

2. В равнобедренном треугольнике ABC (не указано, какие стороны равны) биссектриса BL перпендикулярнам медиане CM. $BC = 7$. Найдите периметр треугольника ABC. Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 35

3. В равнобедренном треугольнике ABC (не указано, какие стороны равны) биссектриса CL перпендикулярнам медиане AM. $AC = 4$. Найдите периметр треугольника ABC. Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 20

Задача 9. (4 балла)

1. На длинной скамье сидят рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут, всего 50 человек. Каждого (включая Васю и Петю) из них спросили, где относительно них сидит Вася. 30 человек сказали, что Вася сидит правее, чем они, а остальные 20 — что левее. Затем каждого из них (включая Васю и Петю) спросили, где относительно них сидит Петя. 22 человека сказали, что Петя сидит правее, чем они, а остальные 28 — что левее. Какое наименьшее количество человек может сидеть между Васей и Петей (не включая Васю и Петю)?

Ответ: 6

2. На длинной скамье сидят рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут, всего 100 человек. Каждого (включая Васю и Петю) из них спросили, где относительно них сидит Вася. 75 человек сказали, что Вася сидит правее, чем они, а остальные 25 — что левее. Затем каждого из них (включая Васю и Петю) спросили, где относительно них сидит Петя. 62 человека сказали, что Петя сидит правее, чем они, а остальные 38 — что левее. Какое наименьшее количество человек может сидеть между Васей и Петей (не включая Васю и Петю)?

Ответ: 11

3. На длинной скамье сидят рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут, всего 70 человек. Каждого (включая Васю и Петю) из них спросили, где относительно них сидит Вася. 45 человек сказали, что Вася сидит правее, чем они, а остальные 25 — что левее. Затем каждого из них (включая Васю и Петю) спросили, где относительно них сидит Петя. 38 человек сказали, что Петя сидит правее, чем они, а остальные 37 — что левее. Какое наименьшее количество человек может сидеть между Васей и Петей (не включая Васю и Петю)?

Ответ: 5

Задача 10. (5 баллов)

1. Какое наименьшее количество крестов из пяти клеток нужно, чтобы покрыть все белые клетки шахматной доски? (Фигурки могут перекрываться и выходить за пределы доски).

Ответ: 10

2. Клетки доски 7×7 раскрашены в шахматном порядке, угловые клетки — белые. Какое наименьшее количество крестов из пяти клеток нужно, чтобы покрыть все белые клетки этой доски? (Фигурки могут перекрываться и выходить за пределы доски).

Ответ: 8

3. Клетки доски 9×9 раскрашены в шахматном порядке, угловые клетки — чёрные. Какое наименьшее количество крестов из пяти клеток нужно, чтобы покрыть все белые клетки шахматной доски? (Фигурки могут перекрываться и выходить за пределы доски).

Ответ: 12