Задания
Открытой олимпиады школьников по математике
(№67 Перечня олимпиад школьников, 2016/2017 уч. год)

Оглавление

I. Задания заключительного этапа олимпиады для 11 класса

Открытая олимпиада школьников по математике

12 марта 2017 г.

11 класс

Решения.

1 вариант

1. (2 балла) Решите уравнение $p^3 - q^3 = 11r$, где p, q, r — простые числа.

Ответ: $p = 13$, $q = 2$, $r = 199$.

Решение: Если все три искомых числа нечётные или нечётное ровно одно из них, то правая и левая части разной чётности. Случай, когда все три числа равны двум, также не подходит. Значит, среди наших чисел ровно одна двойка. Кроме того, $p > q$, поэтому двойка это либо r, либо q.

Пусть $r = 2$. Тогда $p^3 - q^3 = (p - q)(p^2 + pq + q^2) = 2 \cdot 11$. Второй множитель очевидно больше первого и ни один из них не равен 1, таким образом $p = q + 2$ и $3q^2 + 6q + 4 = 11$. Данное квадратное уравнение относительно q не имеет натуральных решеий.

Второй случай: $q = 2$. Тогда $p^3 - 2^3 = (p - 2)(p^2 + 2p + 4) = 11r$. Очевидно, $p = 3$ не подходит, так что один из множителей в $(p-2)(p^2+2p+4)$ это 11, а вторй r. У квадратного уравнения $p^2+2p+4 = 11$ нет натуральных решений, значит остаётся вариант $p - 2 = 11$, т.е. $p = 13$. Отсюда получаем $r = 199$.

2. (2 балла) Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + 4x \sin y - 4 \cos^2 y$.

Ответ: -4.

Решение: Добавим и вычтем $4 \sin^2 y$. Получаем выражение $x^2 + 4x \sin y + 4 \sin^2 y - 4 = (x + 2 \sin y)^2 - 4$. Очевидно, это выражение имеет минимум, равный -4.

Идея решения 2: Чтобы найти наименьшее значение, можно взять производные от этого выражения по x и по y и найти точку, где обе эти производные равны нулю. Производная по x равна нулю, когда $x = -2 \sin y$.

Производная по y равна $4x \cos y + 8 \sin y \cos y$. Она равна нулю в двух случаях: когда $x = -2 \sin y$ и когда $\cos y = 0$. После этого необходимо разобраться, в каких из этих точек действительно локальный минимум и почему глобальный минимум существует.

Корректное доказательство этого в терминах производных, к сожалению, выходит за рамки школьной программы, поэтому для учащихся школ это решение может служить скорее всего только подсказкой к ответу и к решению, изложенному выше.

3. (3 балла) Пусть x_1, x_2, $\ldots$, x_{100} — натуральные числа, большие 1 (не обязательно различные). В таблице 100×100 расставлены числа следующим образом: на пересечении i-ой строки и k-го столбца записано число $\log_{x_k} \frac{x_i}{4}$. Найдите наименьшее возможное значение суммы всех чисел в таблице.

Ответ: -10000

Решение: $\log_{x_k} \frac{x_i}{4} = \log_{x_k} x_i - \log_{x_k} 4$. Сложим уменьшаемое с аналогичным уменьшаемым в симметричной ячейке: $\log_{x_k} x_i + \log_{x_i} x_k = \log_{x_k} x_i + \dfrac{1}{\log_{x_k} x_i} \geqslant 2$, поскольку данный логарифм положителен. Если же $i = k$, то этот логарифм равен единице.

Таким образом, сумма уменьшаемых во всех выражениях $\log_{x_k} x_i - \log_{x_k} 4$ не меньше количества ячеек, т.е. 100^2. Вычитаемые же максимальны при минимальном $x_k = 2$ и равны 2. Следовательно, сумма чисел во всей таблице не меньше $100^2(1 - 2) = -100^2$ и равенство достигается когда все $x_k = 2$.

4. (3 балла) Дана функция $f(x) = P(x)e^x$, где $P(x)$ — многочлен степени 1000 с положительнымии коэффициентами. Пусть $g(x)$ — сороковая производная $f(x)$. Докажите, что $\dfrac{g(1000)}{f(1000)} < 2^{40}$.

Доказательство: Рассмотрим какой-то одночлен $a_k x^k$. Его n-ая производная равна $k(k-1)\ldots(k-n+1)a_k x^{k-n}$, а поскольку и k, и n не больше тысячи, эта производная не превосходит $1000^n a_k x^{k-n}$, причём равенство достигается только когда $n = 1$ и $k = 1000$. Значит, аналогичное неравенство верно и для суммы одночленов. Подставляем вместо x число 1000, и получаем, что $P(1000) \geqslant P^{(k)}(1000)$.

По индукции легко доказать выполнение следующего равенства: $(P(x)e^x)^{(n)} = e^x(C_n^0 P(x) + C_n^1 P'(x) + \ldots + C_n^n P^{(n)}(x))$. Тогда, воспользовавшись доказанным в предыдущем абзаце, получаем, что $g(1000) = (P(x)e^x)^{(40)}(1000) = e^{1000}\left(C_{40}^0 P(1000) + C_{40}^1 P'(1000) + \ldots + C_{40}^{40} P^{(40)}(1000)\right) \leqslant e^{1000}\left(C_{40}^0 P(1000) + C_{40}^1 P(1000) + \ldots + C_{40}^{40} P^{(1000)}\right) \leqslant e^{1000}\left(C_{40}^0 + C_{40}^1 + \ldots + C_{40}^{40}\right) P(1000) = 2^{40} e^{1000} P(1000) 2^{40} f(1000)$. Кроме того, заметим, что поскольку в данной сумме встречается не только первая производная, хотя бы одно из суммируемых нами равенств на самом деле строгое, поэтому мы можем заменить знак $\leqslant$ на $<$.

Таким образом, мы получили, что $g(1000) < 2^{40} f(1000)$, откуда делением на $f(1000)$ получаем требуемое неравенство.

5. (3 балла) Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$. CD — меньшее основание, H — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на AB. Докажите, что биссектриса угла A пересекает отрезок CH.

Доказательство: Пусть $CD = a$, $AD = BC = b$. Тогда, по признаку описанного четырёхугольника, $AB = 2b - a$. Тогда $BH = \frac{AB - CD}{2} = b - a$. Отсюда по теореме Пифагора находим $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{b^2 - (b-a)^2} = \sqrt{a^2 + 2ab} > a$.

Далее, $AH = AB - BH = b$. Значит, треугольник ADH равнобедренный и биссектриса угла A является в нём серединным перпендикуляром к DH. Но тогда это и серединный перпендикуляр в треугольнике CDH, а серединный перпендикуляр к стороне треугольника пересекает большую из оставшихся сторон, то есть BH.

6. (3 балла) Сфера радиуса 10 вписана в каркас тетраэдра (т.е. касается всех его рёбер). Сумма длин рёбер тетраэдра составляет 180. Докажите, что объём тетраэдра не превосходит 3000.

Доказательство: Обозначим наш тетраэдр $ABCD$, центр сферы, вписанной в каркас, за O, а саму сферу за S. Объём тетраэдра равен сумме объёмов маленьких тетраэдров $OABC$, $OABD$, $OACD$ и $OBCD$.

Пересечение S и плоскости ABC это вписанная окружность треугольника ABC. Обозначим за I её центр, тогда OI — высота тетраэдра $OABC$. Пусть R — радиус сферы S, r — радиус вписанной окружности треугольника ABC, тогда выполняется равенство $R^2 = OI^2 + r^2$.

$V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot OI \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot OI \cdot p_{ABC} \cdot r$, где p_{ABC} — полупериметр треугольника ABC.

По неравенству о среднем геометрическом и среднем квадратичном $\sqrt{OI \cdot r} \leqslant \sqrt{\dfrac{OI^2 + r^2}{2}}$, то есть $OI \cdot r \leqslant \dfrac{OI^2 + r^2}{2} = \dfrac{R^2}{2}$. Таким образом, $V_{OABC} \leqslant \frac{1}{6} \cdot R^2 p_{ABC}$.

Складывая объёмы четырёх маленьких тетраэдров мы получаем $V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{6} \cdot R^2 \cdot (p_{ABC} + p_{ABD} + p_{ACD} + p_{BCD})$, а сумма полупериметров граней это в точности сумма длин рёбер тетрадра. Значит, $V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{6} \cdot 10^2 \cdot 180 = 3000$, что и требовалось.

7. (4 балла) Докажите, что не существует функции $f(x)$, определённой для всех $x > 1$, такой, что $f(x^2) = 2f(x)$ и $f(x + \frac{1}{x}) = f(x) + 3$.

Доказательство: С одной стороны, $f\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = f(x^2) + 3 = 2f(x) + 3$.

С другой стороны, $f\left(x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = f\left(\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2\right) = 2f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 2(f(x) + 3) = 2f(x) + 6$.

Сравнивая эти равенства, получаем, что для любого числа y, представимого в виде $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ при $x > 1$, то есть для любого $y > 2$, выполняется равенство $f(y + 2) = f(y) + 3$.

Тогда $2f(3) = f(3^2) = f(9) = f(3 + 2 \cdot 3) = f(3) + 9$, откуда $f(3) = 9$. Следовательно, $f(5) = f(3) + 3 = 12$. С другой стороны, $2f(5) = f(25) = f(5 + 2 \cdot 10) = f(5) + 30$, откуда $f(5) = 30 \neq 12$.

Получаем противоречие, значит такой функции действительно не существует.

8. (5 баллов) Родоначальник дворянского рода получил участок земли. Каждый из мужчин в роду умирая делил доставшуюся ему землю поровну между своими сыновьями. Если же сыновей у него не было, земля переходила к государству. Больше никто из членов рода никаким образом не получал или не лишался своей земли. Всего в роду было 180 человек. Какую наименьшую долю исходного участка мог получить кто-либо из членов рода?

Ответ: $\dfrac{1}{2 \cdot 3^{59}}$

Решение: Рассмотрим человека с самой наименьшей долей. Пусть у его отца было a_1 сыновей, у деда — a_2 и так далее до основателя рода, у которого было a_n. Тогда доля этого человека составляет $\dfrac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}$, причём нам известно, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ не превосходит 179 (поскольку основатель рода в эту сумму точно не входит).

Таким образом, мы ищем набор чисел с суммой, не превосходящей 179 и максимальным произведением. Докажем, что любой набор, кроме набора, состоящего из 59 троек и одной двойки, не обладает максимальным произведением, так как его можно увеличить,

Во-первых, если сумма чисел в наборе меньше 179, добавим туда ещё одно число, чтобы сделать её равной 179. Произведение от этого не уменьшится.

Во-вторых, пусть в нашем наборе есть число $a \geqslant 4$. Заменим a на пару чисел b и c больших единицы, таких, что $b + c = a$. Докажем, что $bc \geqslant b + c$. Действительно, $bc - b - c = (b-1)(c-1) - 1$, что неотрицательно при b и c больших единицы.

В-третьих, если среди набора есть число 1, то можно заменить любое число a и 1 на $a + 1$, отчего произведение этих чисел увеличится на 1.

Таким образом, любой набор можно преобразовать в набор из двоек и троек, не уменьшая произведения его чисел.

Далее, пусть количество двоек хотя бы три, тогда их произведение равно 8. Если же мы заменим три двойки на две тройки, сумма чисел не изменится, а произведение станет равно 9, то есть опять-таки увеличится. Таким образом можно добится того, чтобы количество двоек стало не больше двух.

Поскольку $179 = 59 \cdot 3 + 2$, в итоговом наборе будет ровно одна двойка.

Итак, любой набор натуральных чисел с суммой, не превосходящей 179, можно преобразовать в набор из 59 троек и одной двойки, и при этом произведение чисел в наборе не уменьшится. Значит, полученный в итоге набор обладает наибольшим произведением, равным $3^{59} \cdot 2$, что даёт нам наименьшую долю наследства обратную к этому числу.

11 класс
2 вариант

1. (2 балла) Решите уравнение $p^3 - q^3 = 5r$, где p, q, r — простые числа.

Ответ: $p = 7$, $q = 2$, $r = 67$.

Решение: Если все три искомых числа нечётные или нечётное ровно одно из них, то правая и левая части разной чётности. Случай, когда все три числа равны двум, также не подходит. Значит, среди наших чисел ровно одна двойка. Кроме того, $p > q$, поэтому двойка это либо r, либо q.

Пусть $r = 2$. Тогда $p^3 - q^3 = (p - q)(p^2 + pq + q^2) = 5 \cdot 11$. Второй множитель очевидно больше первого и ни один из них не равен 1, таким образом $p = q + 2$ и $3q^2 + 6q + 4 = 5$. Данное квадратное уравнение относительно q не имеет натуральных решеий.

Второй случай: $q = 2$. Тогда $p^3 - 2^3 = (p - 2)(p^2 + 2p + 4) = 5r$. Очевидно, $p = 3$ не подходит, так что один из множителей в $(p-2)(p^2+2p+4)$ это 5, а вторй r. У квадратного уравнения $p^2+2p+4 = 5$ нет натуральных решений, значит остаётся вариант $p - 2 = 5$, т.е. $p = 7$. Отсюда получаем $r = 67$.

2. (2 балла) Найдите наименьшее значение выражения $x^2 - 6x \sin y - 9 \cos^2 y$.

Ответ: -9.

Решение: Добавим и вычтем $9 \sin^2 y$. Получаем выражение $x^2 - 6x \sin y + 9 \sin^2 y - 9 = (x - 3 \sin y)^2 - 9$. Очевидно, это выражение имеет минимум, равный -9.

Идея решения 2: Чтобы найти наименьшее значение, можно взять производные от этого выражения по x и по y и найти точку, где обе эти производные равны нулю. Производная по x равна нулю, когда $x = 3 \sin y$.

Производная по y равна $-6x \cos y + 18 \sin y \cos y$. Она равна нулю в двух случаях: когда $x = 3 \sin y$ и когда $\cos y = 0$. После этого необходимо разобраться, в каких из этих точек действительно локальный минимум и почему глобальный минимум существует.

Корректное доказательство этого в терминах производных, к сожалению, выходит за рамки школьной программы, поэтому для учащихся школ это решение может служить скорее всего только подсказкой к ответу и к решению, изложенному выше.

3. (3 балла) Пусть x_1, x_2, $\ldots$, x_{60} — натуральные числа, большие 1 (не обязательно различные). В таблице 60×60 расставлены числа следующим образом: на пересечении i-ой строки и k-го столбца записано число $\log_{x_k} \frac{x_i}{8}$. Найдите наименьшее возможное значение суммы всех чисел в таблице.

Ответ: -7200

Решение: $\log_{x_k} \frac{x_i}{8} = \log_{x_k} x_i - \log_{x_k} 8$. Сложим уменьшаемое с аналогичным уменьшаемым в симметричной ячейке: $\log_{x_k} x_i + \log_{x_i} x_k = \log_{x_k} x_i + \dfrac{1}{\log_{x_k} x_i} \geqslant 2$, поскольку данный логарифм положителен. Если же $i = k$, то этот логарифм равен единице.

Таким образом, сумма уменьшаемых во всех выражениях $\log_{x_k} x_i - \log_{x_k} 4$ не меньше количества ячеек, т.е. 60^2. Вычитаемые же максимальны при минимальном $x_k = 2$ и равны 3. Следовательно, сумма чисел во всей таблице не меньше $60^2(1 - 3) = -60^2 \cdot 2$ и равенство достигается когда все $x_k = 2$.

4. (3 балла) Дана функция $f(x) = P(x)e^x$, где $P(x)$ — многочлен степени 100 с положительнымии коэффициентами. Пусть $g(x)$ — двадцатая производная $f(x)$. Докажите, что $\dfrac{g(100)}{f(100)} < 2^{20}$.

Доказательство: Рассмотрим какой-то одночлен $a_k x^k$. Его n-ая производная равна $k(k-1)\ldots(k-n+1)a_k x^{k-n}$, а поскольку и k, и n не больше ста, эта производная не превосходит $100^n a_k x^{k-n}$, причём равенство достигается только когда $n = 1$ и $k = 100$. Значит, аналогичное неравенство верно и для суммы одночленов. Подставляем вместо x число 100, и получаем, что $P(100) \geqslant P^{(k)}(100)$.

По индукции легко доказать выполнение следующего равенства: $(P(x)e^x)^{(n)} = e^x(C_n^0 P(x) + C_n^1 P'(x) + \ldots + C_n^n P^{(n)}(x))$. Тогда, воспользовавшись доказанным в предыдущем абзаце, получаем, что $g(100) = (P(x)e^x)^{(20)}(100) = e^{100}\left(C_{20}^0 P(100) + C_{20}^1 P'(100) + \ldots + C_{20}^{20} P^{(20)}(100)\right) \leqslant e^{100}\left(C_{20}^0 P(100) + C_{20}^1 P(100) + \ldots + C_{20}^{20} P^{(100)}\right) \leqslant e^{100}\left(C_{20}^0 + C_{20}^1 + \ldots + C_{20}^{20}\right) P(100) = 2^{20} e^{100} P(100) = 2^{20} f(100)$. Кроме того, заметим, что поскольку в данной сумме встречается не только первая производная, хотя бы одно из суммируемых нами равенств на самом деле строгое, поэтому мы можем заменить знак $\leqslant$ на $<$.

Таким образом, мы получили, что $g(100) < 2^{20} f(100)$, откуда делением на $f(100)$ получаем требуемое неравенство.

5. (3 балла)

Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$. BC — меньшее основание, H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на AD. Докажите, что биссектриса угла D пересекает отрезок BH.

Доказательство: Пусть $BC = a$, $AB = CD = b$. Тогда, по признаку описанного четырёхугольника, $AD = 2b - a$. Тогда $AH = \frac{AD - BC}{2} = b - a$. Отсюда по теореме Пифагора находим $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{b^2 - (b-a)^2} = \sqrt{a^2 + 2ab} > a$.

Далее, $DH = AB - AH = b$. Значит, треугольник CDH равнобедренный и биссектриса угла D является в нём серединным перпендикуляром к CH. Но тогда это и серединный перпендикуляр в треугольнике CBH, а серединный перпендикуляр к стороне треугольника пересекает большую из оставшихся сторон, то есть BH.

6. (3 балла) Сфера радиуса 3 вписана в каркас тетраэдра (т.е. касается всех его рёбер). Сумма длин рёбер тетраэдра составляет 60. Докажите, что объём тетраэдра не превосходит 90.

Доказательство: Обозначим наш тетраэдр $ABCD$, центр сферы, вписанной в каркас, за O, а саму сферу за S. Объём тетраэдра равен сумме объёмов маленьких тетраэдров $OABC$, $OABD$, $OACD$ и $OBCD$.

Пересечение S и плоскости ABC это вписанная окружность треугольника ABC. Обозначим за I её центр, тогда OI — высота тетраэдра $OABC$. Пусть R — радиус сферы S, r — радиус вписанной окружности треугольника ABC, тогда выполняется равенство $R^2 = OI^2 + r^2$.

$V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot OI \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot OI \cdot p_{ABC} \cdot r$, где p_{ABC} — полупериметр треугольника ABC.

По неравенству о среднем геометрическом и среднем квадратичном $\sqrt{OI \cdot r} \leqslant \sqrt{\dfrac{OI^2 + r^2}{2}}$, то есть $OI \cdot r \leqslant \dfrac{OI^2 + r^2}{2} = \dfrac{R^2}{2}$. Таким образом, $V_{OABC} \leqslant \frac{1}{6} \cdot R^2 p_{ABC}$.

Складывая объёмы четырёх маленьких тетраэдров мы получаем $V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{6} \cdot R^2 \cdot (p_{ABC} + p_{ABD} + p_{ACD} + p_{BCD})$, а сумма полупериметров граней это в точности сумма длин рёбер тетрадра. Значит, $V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{6} \cdot 3^2 \cdot 60 = 90$, что и требовалось.

7. (4 балла) Докажите, что не существует функции $f(x)$, определённой для всех $x > 1$, такой, что $f(x^2) = 3f(x)$ и $f(x + \frac{1}{x}) = f(x) + 2$.

Доказательство: С одной стороны, $f\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = f(x^2) + 2 = 3f(x) + 2$.

С другой стороны, $f\left(x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = f\left(\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2\right) = 3f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 3(f(x) + 2) = 3f(x) + 6$.

Сравнивая эти равенства, получаем, что для любого числа y, представимого в виде $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ при $x > 1$, то есть для любого $y > 2$, выполняется равенство $f(y + 2) = f(y) + 4$.

Тогда $3f(3) = f(3^2) = f(9) = f(3 + 2 \cdot 3) = f(3) + 12$, откуда $f(3) = 6$. Следовательно, $f(5) = f(3) + 4 = 10$. С другой стороны, $3f(5) = f(25) = f(5 + 2 \cdot 10) = f(5) + 40$, откуда $f(5) = 20 \neq 10$.

Получаем противоречие, значит такой функции действительно не существует.

8. (5 баллов) Родоначальник дворянского рода получил участок земли. Каждый из мужчин в роду умирая делил доставшуюся ему землю поровну между своими сыновьями. Если же сыновей у него не было, земля переходила к государству. Больше никто из членов рода никаким образом не получал или не лишался своей земли. Всего в роду было 120 человек. Какую наименьшую долю исходного участка мог получить кто-либо из членов рода?

Ответ: $\dfrac{1}{2 \cdot 3^{39}}$

Решение: Рассмотрим человека с самой наименьшей долей. Пусть у его отца было a_1 сыновей, у деда — a_2 и так далее до основателя рода, у которого было a_n. Тогда доля этого человека составляет $\dfrac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}$, причём нам известно, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ не превосходит 119 (поскольку основатель рода в эту сумму точно не входит).

Таким образом, мы ищем набор чисел с суммой, не превосходящей 119 и максимальным произведением. Докажем, что любой набор, кроме набора, состоящего из 39 троек и одной двойки, не обладает максимальным произведением, так как его можно увеличить,

Во-первых, если сумма чисел в наборе меньше 119, добавим туда ещё одно число, чтобы сделать её равной 119. Произведение от этого не уменьшится.

Во-вторых, пусть в нашем наборе есть число $a \geqslant 4$. Заменим a на пару чисел b и c больших единицы, таких, что $b + c = a$. Докажем, что $bc \geqslant b + c$. Действительно, $bc - b - c = (b-1)(c-1) - 1$, что неотрицательно при b и c больших единицы.

В-третьих, если среди набора есть число 1, то можно заменить любое число a и 1 на $a + 1$, отчего произведение этих чисел увеличится на 1.

Таким образом, любой набор можно преобразовать в набор из двоек и троек, не уменьшая произведения его чисел.

Далее, пусть количество двоек хотя бы три, тогда их произведение равно 8. Если же мы заменим три двойки на две тройки, сумма чисел не изменится, а произведение станет равно 9, то есть опять-таки увеличится. Таким образом можно добится того, чтобы количество двоек стало не больше двух.

Поскольку $119 = 39 \cdot 3 + 2$, в итоговом наборе будет ровно одна двойка.

Итак, любой набор натуральных чисел с суммой, не превосходящей 119, можно преобразовать в набор из 39 троек и одной двойки, и при этом произведение чисел в наборе не уменьшится. Значит, полученный в итоге набор обладает наибольшим произведением, равным $3^{39} \cdot 2$, что даёт нам наименьшую долю наследства обратную к этому числу.

11 класс
3 вариант

1. (2 балла) Решите уравнение $11p = q^3 - r^3$, где p, q, r — простые числа.

Ответ: $q = 13$, $r = 2$, $p = 199$.

Решение: Если все три искомых числа нечётные или нечётное ровно одно из них, то правая и левая части разной чётности. Случай, когда все три числа равны двум, также не подходит. Значит, среди наших чисел ровно одна двойка. Кроме того, $q > r$, поэтому двойка это либо r, либо p.

Пусть $p = 2$. Тогда $q^3 - r^3 = (q-r)(q^2+qr+r^2) = 2 \cdot 11$. Второй множитель очевидно больше первого и ни один из них не равен 1, таким образом $q = r+2$ и $3r^2+6r+4 = 11$. Данное квадратное уравнение относительно r не имеет натуральных решеий.

Второй случай: $r = 2$. Тогда $q^3 - 2^3 = (q-2)(q^2+2q+4) = 11p$. Очевидно, $q = 3$ не подходит, так что один из множителей в $(q-2)(q^2+2q+4)$ это 11, а вторй p. У квадратного уравнения $q^2+2q+4 = 11$ нет натуральных решений, значит остаётся вариант $q-2 = 11$, т.е. $q = 13$. Отсюда получаем $p = 199$.

2. (2 балла) Найдите наименьшее значение выражения $4x^2 + 4x\sin y - \cos^2 y$.

Ответ: -1.

Решение: Добавим и вычтем $\sin^2 y$. Получаем выражение $4x^2 + 4x\sin y + \sin^2 y - 1 = (x + 2\sin y)^2 - 1$. Очевидно, это выражение имеет минимум, равный -1.

Идея решения 2: Чтобы найти наименьшее значение, можно взять производные от этого выражения по x и по y и найти точку, где обе эти производные равны нулю. Производная по x равна нулю, когда $2x = -\sin y$.

Производная по y равна $4x\cos y - 2\sin y\cos y$. Она равна нулю в двух случаях: когда $x = -2\sin y$ и когда $\cos y = 0$. После этого необходимо разобраться, в каких из этих точек действительно локальный минимум и почему глобальный минимум существует.

Корректное доказательство этого в терминах производных, к сожалению, выходит за рамки школьной программы, поэтому для учащихся школ это решение может служить скорее всего только подсказкой к ответу и к решению, изложенному выше.

3. (3 балла) Пусть x_1, x_2, $\ldots$, x_{200} — натуральные числа, большие 2 (не обязательно различные). В таблице 200×200 расставлены числа следующим образом: на пересечении i-ой строки и k-го столбца записано число $\log_{x_k} \frac{x_i}{9}$. Найдите наименьшее возможное значение суммы всех чисел в таблице.

Ответ: -40000

Решение: $\log_{x_k} \frac{x_i}{4} = \log_{x_k} x_i - \log_{x_k} 9$. Сложим уменьшаемое с аналогичным уменьшаемым в симметричной ячейке: $\log_{x_k} x_i + \log_{x_i} x_k = \log_{x_k} x_i + \dfrac{1}{\log_{x_k} x_i} \geqslant 2$, поскольку данный логарифм положителен. Если же $i = k$, то этот логарифм равен единице.

Таким образом, сумма уменьшаемых во всех выражениях $\log_{x_k} x_i - \log_{x_k} 9$ не меньше количества ячеек, т.е. 200^2. Вычитаемые же максимальны при минимальном $x_k = 3$ и равны 2. Следовательно, сумма чисел во всей таблице не меньше $200^2(1-2) = -200^2$ и равенство достигается когда все $x_k = 3$.

4. (3 балла) Дана функция $f(x) = P(x)e^x$, где $P(x)$ — многочлен степени 200 с положительнымии коэффициентами. Пусть $g(x)$ — десятая производная $f(x)$. Докажите, что $\dfrac{g(200)}{f(200)} < 1024$.

Доказательство: Рассмотрим какой-то одночлен $a_k x^k$. Его n-ая производная равна $k(k-1)\ldots(k-n+1)a_k x^{k-n}$, а поскольку и k, и n не больше двухсот, эта производная не превосходит $200^n a_k x^{k-n}$, причём равенство достигается только когда $n = 1$ и $k = 200$. Значит, аналогичное неравенство верно и для суммы одночленов. Подставляем вместо x число 200, и получаем, что $P(200) \geqslant P^{(k)}(200)$.

По индукции легко доказать выполнение следующего равенства: $(P(x)e^x)^{(n)} = e^x(C_n^0 P(x) + C_n^1 P'(x) + \ldots + C_n^n P^{(n)}(x))$. Тогда, воспользовавшись доказанным в предыдущем абзаце, получаем, что $g(200) = (P(x)e^x)^{(10)}(200) = e^{200}\left(C_{10}^0 P(200) + C_{10}^1 P'(200) + \ldots + C_{10}^{10} P^{(10)}(200)\right) \leqslant e^{200}\left(C_{10}^0 P(200) + C_{10}^1 P(200) + \ldots + C_{10}^{10} P^{(200)}\right) \leqslant e^{200}\left(C_{10}^0 + C_{10}^1 + \ldots + C_{10}^{10}\right) P(200) = 2^{10} e^{200} P(200) 2^{10} f(200)$. Кроме того, заметим, что поскольку в данной сумме встречается не только первая производная, хотя бы одно из суммируемых нами равенств на самом деле строгое, поэтому мы можем заменить знак $\leqslant$ на $<$.

Таким образом, мы получили, что $g(200) < 2^{10} f(200)$, откуда делением на $f(200)$ получаем требуемое неравенство.

5. (3 балла) Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$. BC — большее основание, H — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на BC. Докажите, что биссектриса угла B пересекает отрезок DH.

Доказательство: Пусть $AD = a$, $AB = CD = b$. Тогда, по признаку описанного четырёхугольника, $BC = 2b - a$. Тогда $CH = \frac{BC-AD}{2} = b - a$. Отсюда по теореме Пифагора находим $DH = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{b^2 - (b-a)^2} = \sqrt{a^2 + 2ab} > a$.

Далее, $BH = BC - CH = b$. Значит, треугольник ABH равнобедренный и биссектриса угла B является в нём серединным перпендикуляром к AH. Но тогда это и серединный перпендикуляр в треугольнике ADH, а серединный перпендикуляр к стороне треугольника пересекает большую из оставшихся сторон, то есть DH.

6. (3 балла) Сфера радиуса 12 вписана в каркас тетраэдра (т.е. касается всех его рёбер). Сумма длин рёбер тетраэдра составляет 300. Докажите, что объём тетраэдра не превосходит 7200.

Доказательство: Обозначим наш тетраэдр $ABCD$, центр сферы, вписанной в каркас, за O, а саму сферу за S. Объём тетраэдра равен сумме объёмов маленьких тетраэдров $OABC$, $OABD$, $OACD$ и $OBCD$.

Пересечение S и плоскости ABC это вписанная окружность треугольника ABC. Обозначим за I её центр, тогда OI — высота тетраэдра $OABC$. Пусть R — радиус сферы S, r — радиус вписанной окружности треугольника ABC, тогда выполняется равенство $R^2 = OI^2 + r^2$.

$V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot OI \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot OI \cdot p_{ABC} \cdot r$, где p_{ABC} — полупериметр треугольника ABC.

По неравенству о среднем геометрическом и среднем квадратичном $\sqrt{OI \cdot r} \leqslant \sqrt{\dfrac{OI^2+r^2}{2}}$, то есть $OI \cdot r \leqslant \dfrac{OI^2+r^2}{2} = \dfrac{R^2}{2}$. Таким образом, $V_{OABC} \leqslant \frac{1}{6} \cdot R^2 p_{ABC}$.

Складывая объёмы четырёх маленьких тетраэдров мы получаем $V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{6} \cdot R^2 \cdot (p_{ABC} + p_{ABD} + p_{ACD} + p_{BCD})$, а сумма полупериметров граней это в точности сумма длин рёбер тетрадра. Значит, $V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{6} \cdot 12^2 \cdot 300 = 7200$, что и требовалось.

7. (4 балла) Докажите, что не существует функции $f(x)$, определённой для всех $x > 1$, такой, что $f(x^2) = 2f(x)$ и $f(x + \frac{1}{x}) = f(x) + 5$.

Доказательство: С одной стороны, $f\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = f(x^2) + 5 = 2f(x) + 5$.

С другой стороны, $f\left(x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = f\left(\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2\right) = 2f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 2(f(x) + 5) = 2f(x) + 10$.

Сравнивая эти равенства, получаем, что для любого числа y, представимого в виде $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ при $x > 1$, то есть для любого $y > 2$, выполняется равенство $f(y + 2) = f(y) + 5$.

Тогда $2f(3) = f(3^2) = f(9) = f(3 + 2 \cdot 3) = f(3) + 15$, откуда $f(3) = 15$. Следовательно, $f(5) = f(3) + 5 = 20$. С другой стороны, $2f(5) = f(25) = f(5 + 2 \cdot 10) = f(5) + 50$, откуда $f(5) = 50 \neq 20$.

Получаем противоречие, значит такой функции действительно не существует.

8. (5 баллов) Родоначальник дворянского рода получил участок земли. Каждый из мужчин в роду умирая делил доставшуюся ему землю поровну между своими сыновьями. Если же сыновей у него не было, земля переходила к государству. Больше никто из членов рода никаким образом не получал или не лишался своей земли. Всего в роду было 150 человек. Какую наименьшую долю исходного участка мог получить кто-либо из членов рода?

Ответ: $\dfrac{1}{2 \cdot 3^{49}}$

Решение: Рассмотрим человека с самой наименьшей долей. Пусть у его отца было a_1 сыновей, у деда — a_2 и так далее до основателя рода, у которого было a_n. Тогда доля этого человека составляет $\dfrac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}$, причём нам известно, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ не превосходит 149 (поскольку основатель рода в эту сумму точно не входит).

Таким образом, мы ищем набор чисел с суммой, не превосходящей 149 и максимальным произведением. Докажем, что любой набор, кроме набора, состоящего из 49 троек и одной двойки, не обладает максимальным произведением, так как его можно увеличить,

Во-первых, если сумма чисел в наборе меньше 149, добавим туда ещё одно число, чтобы сделать её равной 149. Произведение от этого не уменьшится.

Во-вторых, пусть в нашем наборе есть число $a \geqslant 4$. Заменим a на пару чисел b и c больших единицы, таких, что $b + c = a$. Докажем, что $bc \geqslant b + c$. Действительно, $bc - b - c = (b-1)(c-1) - 1$, что неотрицательно при b и c больших единицы.

В-третьих, если среди набора есть число 1, то можно заменить любое число a и 1 на $a + 1$, отчего произведение этих чисел увеличится на 1.

Таким образом, любой набор можно преобразовать в набор из двоек и троек, не уменьшая произведения его чисел.

Далее, пусть количество двоек хотя бы три, тогда их произведение равно 8. Если же мы заменим три двойки на две тройки, сумма чисел не изменится, а произведение станет равно 9, то есть опять-таки увеличится. Таким образом можно добится того, чтобы количество двоек стало не больше двух.

Поскольку $149 = 49 \cdot 3 + 2$, в итоговом наборе будет ровно одна двойка.

Итак, любой набор натуральных чисел с суммой, не превосходящей 149, можно преобразовать в набор из 49 троек и одной двойки, и при этом произведение чисел в наборе не уменьшится. Значит, полученный в итоге набор обладает наибольшим произведением, равным $3^{49} \cdot 2$, что даёт нам наименьшую долю наследства обратную к этому числу.

11 класс
4 вариант

1. (2 балла) Решите уравнение $5p = q^3 - r^3$, где p, q, r — простые числа.

Ответ: $q = 7$, $r = 2$, $p = 67$.

Решение: Если все три искомых числа нечётные или нечётное ровно одно из них, то правая и левая части разной чётности. Случай, когда все три числа равны двум, также не подходит. Значит, среди наших чисел ровно одна двойка. Кроме того, $q > r$, поэтому двойка это либо r, либо p.

Пусть $p = 2$. Тогда $q^3 - r^3 = (q-r)(q^2 + qr + r^2) = 2 \cdot 5$. Второй множитель очевидно больше первого и ни один из них не равен 1, таким образом $q = r + 2$ и $3r^2 + 6r + 4 = 5$. Данное квадратное уравнение относительно r не имеет натуральных решеий.

Второй случай: $r = 2$. Тогда $q^3 - 2^3 = (q-2)(q^2 + 2q + 4) = 5p$. Очевидно, $q = 3$ не подходит, так что один из множителей в $(q-2)(q^2+2q+4)$ это 5, а вторй p. У квадратного уравнения $q^2 + 2q + 4 = 5$ нет натуральных решений, значит остаётся вариант $q - 2 = 5$, т.е. $q = 7$. Отсюда получаем $p = 67$.

2. (2 балла) Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + 8x \sin y - 16 \cos^2 y$.

Ответ: -16.

Решение: Добавим и вычтем $16 \sin^2 y$. Получаем выражение $x^2+8x\sin y+16\sin^2 y-16 = (x+4\sin y)^2-16$. Очевидно, это выражение имеет минимум, равный -4.

Идея решения 2: Чтобы найти наименьшее значение, можно взять производные от этого выражения по x и по y и найти точку, где обе эти производные равны нулю. Производная по x равна нулю, когда $x = -4\sin y$.

Производная по y равна $4x\cos y - 8\sin y \cos y$. Она равна нулю в двух случаях: когда $x = -4\sin y$ и когда $\cos y = 0$. После этого необходимо разобраться, в каких из этих точек действительно локальный минимум и почему глобальный минимум существует.

Корректное доказательство этого в терминах производных, к сожалению, выходит за рамки школьной программы, поэтому для учащихся школ это решение может служить скорее всего только подсказкой к ответу и к решению, изложенному выше.

3. (3 балла) Пусть x_1, x_2, ..., x_{100} — натуральные числа, большие 1 (не обязательно различные). В таблице 80×80 расставлены числа следующим образом: на пересечении i-ой строки и k-го столбца записано число $\log_{x_k} \frac{x_i}{16}$. Найдите наименьшее возможное значение суммы всех чисел в таблице.

Ответ: -19200

Решение: $\log_{x_k} \frac{x_i}{16} = \log_{x_k} x_i - \log_{x_k} 16$. Сложим уменьшаемое с аналогичным уменьшаемым в симметричной ячейке: $\log_{x_k} x_i + \log_{x_i} x_k = \log_{x_k} x_i + \dfrac{1}{\log_{x_k} x_i} \geqslant 2$, поскольку данный логарифм положителен. Если же $i = k$, то этот логарифм равен единице.

Таким образом, сумма уменьшаемых во всех выражениях $\log_{x_k} x_i - \log_{x_k} 16$ не меньше количества ячеек, т.е. 80^2. Вычитаемые же максимальны при минимальном $x_k = 2$ и равны 4. Следовательно, сумма чисел во всей таблице не меньше $80^2(1-4) = -80^2 \cdot 3 = -19200$ и равенство достигается когда все $x_k = 2$.

4. (3 балла) Дана функция $f(x) = P(x)e^x$, где $P(x)$ — многочлен степени 100 с положительнымии коэффициентами. Пусть $g(x)$ — тридцатая производная $f(x)$. Докажите, что $\dfrac{g(100)}{f(100)} < 2^{30}$.

Доказательство: Рассмотрим какой-то одночлен $a_k x^k$. Его n-ая производная равна $k(k-1)\ldots(k-n+1)a_k x^{k-n}$, а поскольку и k, и n не больше ста, эта производная не превосходит $100^n a_k x^{k-n}$, причём равенство достигается только когда $n = 1$ и $k = 100$. Значит, аналогичное неравенство верно и для суммы одночленов. Подставляем вместо x число 100, и получаем, что $P(100) \geqslant P^{(k)}(100)$.

По индукции легко доказать выполнение следующего равенства: $(P(x)e^x)^{(n)} = e^x(C_n^0 P(x) + C_n^1 P'(x) + \ldots + C_n^n P^{(n)}(x))$. Тогда, воспользовавшись доказанным в предыдущем абзаце, получаем, что $g(100) = (P(x)e^x)^{(30)}(100) = e^{100}\left(C_{30}^0 P(100) + C_{30}^1 P'(100) + \ldots + C_{30}^{30} P^{(30)}(100)\right) \leqslant e^{100}\left(C_{30}^0 P(100) + C_{30}^1 P(100) + \ldots + C_{30}^{30} P^{(100)}\right) \leqslant e^{100}\left(C_{30}^0 + C_{30}^1 + \ldots + C_{30}^{30}\right) P(100) = 2^{30} e^{100} P(100) 2^{30} f(100)$. Кроме того, заметим, что поскольку в данной сумме встречается не только первая производная, хотя бы одно из суммируемых нами равенств на самом деле строгое, поэтому мы можем заменить знак $\leqslant$ на $<$.

Таким образом, мы получили, что $g(100) < 2^{30} f(100)$, откуда делением на $f(100)$ получаем требуемое неравенство.

5. (3 балла) Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$. CD — большее основание, H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на CD. Докажите, что биссектриса угла C пересекает отрезок AH.

Доказательство: Пусть $AB = a$, $AD = BC = b$. Тогда, по признаку описанного четырёхугольника, $CD = 2b - a$. Тогда $DH = \frac{CD-AB}{2} = b - a$. Отсюда по теореме Пифагора находим $CH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{b^2 - (b-a)^2} = \sqrt{a^2 + 2ab} > a$.

Далее, $CH = CD - DH = b$. Значит, треугольник DCH равнобедренный и биссектриса угла C является в нём серединным перпендикуляром к AH. Но тогда это и серединный перпендикуляр в треугольнике ABH, а серединный перпендикуляр к стороне треугольника пересекает большую из оставшихся сторон, то есть AH.

6. (3 балла) Сфера радиуса 5 вписана в каркас тетраэдра (т.е. касается всех его рёбер). Сумма длин рёбер тетраэдра составляет 120. Докажите, что объём тетраэдра не превосходит 500.

Доказательство: Обозначим наш тетраэдр $ABCD$, центр сферы, вписанной в каркас, за O, а саму сферу за S. Объём тетраэдра равен сумме объёмов маленьких тетраэдров $OABC$, $OABD$, $OACD$ и $OBCD$.

Пересечение S и плоскости ABC это вписанная окружность треугольника ABC. Обозначим за I её центр, тогда OI — высота тетраэдра $OABC$. Пусть R — радиус сферы S, r — радиус вписанной окружности треугольника ABC, тогда выполняется равенство $R^2 = OI^2 + r^2$.

$V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot OI \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot OI \cdot p_{ABC} \cdot r$, где p_{ABC} — полупериметр треугольника ABC.

По неравенству о среднем геометрическом и среднем квадратичном, $\sqrt{OI \cdot r} \leqslant \sqrt{\dfrac{OI^2 + r^2}{2}}$, то есть $OI \cdot r \leqslant \dfrac{OI^2 + r^2}{2} = \dfrac{R^2}{2}$. Таким образом, $V_{OABC} \leqslant \frac{1}{6} \cdot R^2 p_{ABC}$.

Складывая объёмы четырёх маленьких тетраэдров мы получаем $V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{6} \cdot R^2 \cdot (p_{ABC} + p_{ABD} + p_{ACD} + p_{BCD})$, а сумма полупериметров граней это в точности сумма длин рёбер тетрадра. Значит, $V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{6} \cdot 5^2 \cdot 120 = 500$, что и требовалось.

7. (4 балла) Докажите, что не существует функции $f(x)$, определённой для всех $x > 1$, такой, что $f(x^2) = 3f(x)$ и $f(x + \frac{1}{x}) = f(x) + 5$.

Доказательство: С одной стороны, $f\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = f(x^2) + 5 = 3f(x) + 5$.

С другой стороны, $f\left(x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = f\left(\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2\right) = 3f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 3(f(x) + 5) = 3f(x) + 15$.

Сравнивая эти равенства, получаем, что для любого числа y, представимого в виде $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ при $x > 1$, то есть для любого $y > 2$, выполняется равенство $f(y + 2) = f(y) + 10$.

Тогда $3f(3) = f(3^2) = f(9) = f(3 + 2 \cdot 3) = f(3) + 30$, откуда $f(3) = 15$. Следовательно, $f(5) = f(3) + 10 = 25$. С другой стороны, $3f(5) = f(25) = f(5 + 2 \cdot 10) = f(5) + 100$, откуда $f(5) = 50 \neq 25$.

Получаем противоречие, значит такой функции действительно не существует.

8. (5 баллов) Родоначальник дворянского рода получил участок земли. Каждый из мужчин в роду умирая делил доставшуюся ему землю поровну между своими сыновьями. Если же сыновей у него не было, земля переходила к государству. Больше никто из членов рода никаким образом не получал или не лишался своей земли. Всего в роду было 200 человек. Какую наименьшую долю исходного участка мог получить кто-либо из членов рода?

Ответ: $\dfrac{1}{4 \cdot 3^{65}}$

Решение: Рассмотрим человека с самой наименьшей долей. Пусть у его отца было a_1 сыновей, у деда — a_2 и так далее до основателя рода, у которого было a_n. Тогда доля этого человека составляет $\dfrac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}$, причём нам известно, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ не превосходит 199 (поскольку основатель рода в эту сумму точно не входит).

Таким образом, мы ищем набор чисел с суммой, не превосходящей 199 и максимальным произведением. Докажем, что любой набор, кроме набора, состоящего из 39 троек и одной двойки, не обладает максимальным произведением, так как его можно увеличить,

Во-первых, если сумма чисел в наборе меньше 199, добавим туда ещё одно число, чтобы сделать её равной 199. Произведение от этого не уменьшится.

Во-вторых, пусть в нашем наборе есть число $a \geqslant 4$. Заменим a на пару чисел b и c больших единицы, таких, что $b + c = a$. Докажем, что $bc \geqslant b + c$. Действительно, $bc - b - c = (b-1)(c-1) - 1$, что неотрицательно при b и c больших единицы.

В-третьих, если среди набора есть число 1, то можно заменить любое число a и 1 на $a + 1$, отчего произведение этих чисел увеличится на 1.

Таким образом, любой набор можно преобразовать в набор из двоек и троек, не уменьшая произведения его чисел.

Далее, пусть количество двоек хотя бы три, тогда их произведение равно 8. Если же мы заменим три двойки на две тройки, сумма чисел не изменится, а произведение станет равно 9, то есть опять-таки увеличится. Таким образом можно добится того, чтобы количество двоек стало не больше двух.

Поскольку $199 = 65 \cdot 3 + 2 \cdot 2$, в итоговом наборе будет ровно две двойки.

Итак, любой набор натуральных чисел с суммой, не превосходящей 199, можно преобразовать в набор из 65 троек и двух двоек, и при этом произведение чисел в наборе не уменьшится. Значит, полученный в итоге набор обладает наибольшим произведением, равным $3^{65} \cdot 4$, что даёт нам наименьшую долю наследства обратную к этому числу.

II. Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады для 11 класса

Задача 1. (2 балла)

1. Три высоты тетраэдра больше радиуса его вписанной сферы в три, четыре и шесть раз соответственно. Во сколько раз четвёртая высота больше радиуса вписанной сферы?

Ответ: 4

2. Три высоты тетраэдра больше радиуса его вписанной сферы в три, три и шесть раз соответственно. Во сколько раз четвёртая высота больше радиуса вписанной сферы?

Ответ: 6

3. Три высоты тетраэдра больше радиуса его вписанной сферы в три, четыре и четыре раза соответственно. Во сколько раз четвёртая высота больше радиуса вписанной сферы?

Ответ: 6

Примеры записи ответов:
14
1/4

Задача 2. (2 балла)

1. Калькулятор АЧ-2016 может выполнять две операции: извлечение квадратного корня и взятие тангенса. Изначально в калькулятор было введено число 3^{-1024}. За какое наименьшее число операций из него можно получить число, большее 1?

Ответ: 14

2. Калькулятор АЧ-2016 может выполнять две операции: извлечение квадратного корня и взятие арксинуса. Изначально в калькулятор было введено число 2^{-512}. За какое наименьшее число операций из него можно получить число, большее 1?

Ответ: 13

3. Калькулятор АЧ-2016 может выполнять две операции: извлечение кубического корня и взятие тангенса. Изначально в калькулятор было введено число 2^{-243}. За какое наименьшее число операций из него можно получить число, большее 1?

Ответ: 7

Примеры записи ответов:
10

Задача 3. (2 балла)

1. При каком наибольшем a множество значений функции $\sqrt{a(\sqrt{3}\sin \pi x + \cos \pi x)}$ целиком содержится в области её определения?

Ответ: 25/72

2. При каком наибольшем a множество значений функции $\sqrt{a(\sin \pi x + \sqrt{3}\cos \pi x)}$ целиком

содержится в области её определения?

Ответ: 2/9

3. При каком наибольшем *a* множество значений функции $\sqrt{\sqrt{2}\,a\,(\sin \pi x + \cos \pi x)}$ целиком содержится в области её определения?

Ответ: 9/32 || 0,28125

Задача 4. (3 балла)

1. Кубический многочлен p(x) со старшим коэффициентом 1 таков, что p'(0) = p(-1), p'(1) = p(0), p'(2) = p(1). Найдите свободный член в многочлене p(x).

Ответ: 20

2. Кубический многочлен p(x) со старшим коэффициентом 1 таков, что p'(-2) = p(-1), p'(-1) = p(0), p'(0) = p(1). Найдите свободный член в многочлене p(x).

Ответ: -4

3. Кубический многочлен p(x) со старшим коэффициентом 1 таков, что p'(1) = p(0), p'(2) = p(1), p'(3) = p(2),. Найдите коэффициент при *x* в многочлене p(x).

Ответ: 8

Задача 5. (3 балла)

1. В стране есть 11 городов, некоторые из которых соединены почтовыми рейсами. Чтобы письмо дошло из одного города в другой, на него нужно наклеить столько марок, сколько рейсов для это требуется (используется маршрут, требующий наименьшего количества рейсов). Известно, что даже если два города не соединены рейсом, послать письмо из одного в другой всегда возможно.
Под Новый Год мэры всех городов послали друг другу поздравительные письма. Какое наибольшее количество марок могло им всем потребоваться?

Ответ: 440

2. В стране есть 10 городов, некоторые из которых соединены почтовыми рейсами. Чтобы письмо дошло из одного города в другой, на него нужно наклеить столько марок, сколько рейсов для это требуется (используется маршрут, требующий наименьшего количества рейсов). Известно, что даже если два города не соединены рейсом, послать письмо из одного в другой всегда возможно.
Под Новый Год мэры всех городов послали друг другу поздравительные письма. Какое наибольшее количество марок могло им всем потребоваться?

Ответ: 330

3. В стране есть 9 городов, некоторые из которых соединены почтовыми рейсами. Чтобы письмо дошло из одного города в другой, на него нужно наклеить столько марок, сколько рейсов для это требуется (используется маршрут, требующий наименьшего количества

рейсов). Известно, что даже если два города не соединены рейсом, послать письмо из одного в другой всегда возможно.
Под Новый Год мэры всех городов послали друг другу поздравительные письма. Какое наибольшее количество марок могло им всем потребоваться?

Ответ: 240

Примеры записи ответов:
1000

Задача 6. (3 балла)

1. Коля взял дробно-линейную функцию $\frac{ax+b}{cx+d}$, где *a*, *b*, *c*, *d* — различные по абсолютной величине числа, и сложил её со всеми оставшимися 23 функциями, которые получаются из неё перестановкой чисел *a*, *b*, *c*, *d*. Найдите корень суммы всех этих фунций, не зависящий от чисел *a*, *b*, *c*, *d*.

Ответ: -1

2. Аня взяла дробно-линейную функцию $\frac{ax-b}{cx-d}$, где *a*, *b*, *c*, *d* — различные по абсолютной величине числа, и сложила её со всеми оставшимися 23 функциями, которые получаются из неё перестановкой чисел *a*, *b*, *c*, *d*. Найдите корень суммы всех этих фунций, не зависящий от чисел *a*, *b*, *c*, *d*.

Ответ: 1

3. Дима взял дробно-линейную функцию $\frac{ax+2b}{cx+2d}$, где *a*, *b*, *c*, *d* — положительные числа, и сложил её со всеми оставшимися 23 функциями, которые получаются из неё перестановкой чисел *a*, *b*, *c*, *d*. Найдите корень суммы всех этих фунций, не зависящий от чисел *a*, *b*, *c*, *d*.

Ответ: -1

Примеры записи ответов:
14
1/4
-1,4

Задача 7. (3 балла)

1. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами 15 и 12 соответственно пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на луче AB и такова, что $O_1X = 41$, $AX = 52$. Найдите расстояние между центрами окружностей.

Ответ: 9

2. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами 10 и 6 соответственно пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на луче BA и такова, что $O_1X = 17$, $AX = 9$. Найдите расстояние между центрами окружностей.

Ответ: 8

3. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами 5 и 13 соответственно пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на луче AB и такова, что $O_2X = 37$, $XB = 30$. Найдите расстояние между центрами окружностей.

Ответ: 12

Задача 8. (3 балла)

1. Функия f(x) такова, что $f(2x)=6 — f(x)/2$. Найдите площадь подграфика функции $f(1 — x + 2|x|)$ на участке от -1 до 3.

Ответ: 16

2. Функия f(x) такова, что $f(3x)=8 — f(x)/3$. Найдите площадь подграфика функции $f(1 — 3{,}5x + 4{,}5|x|)$ на участке от -1 до 8.

Ответ: 54

3. Функия f(x) такова, что $f(4x)=7{,}5 — f(x)/4$. Найдите площадь подграфика функции $f(1 — 7x + 8|x|)$ на участке от -1 до 15.

Ответ: 96

Задача 9. (4 балла)

1. Найдите последнюю цифру целой части числа $\left(\sqrt{15}+\sqrt{13}\right)^{2012}$.
Ответ: 7

2. Найдите последнюю цифру целой части числа $\left(\sqrt{22}+\sqrt{20}\right)^{2002}$.
Ответ: 3

3. Найдите последнюю цифру целой части числа $\left(\sqrt{37}+\sqrt{35}\right)^{2016}$.
Ответ: 1

<u>**Примеры записи ответов:**</u>
0

Задача 10. (4 балла)

1. Правильный додекаэдр (12-гранник с 20 вершинами) вписан в сферу радиуса 1. Из одной из вершин додекаэдра провели векторы ко всем остальным и посчитали скалярные произведения для каждой пары различных векторов, всего 171 штука. Чему равна сумма этих скалярных произведений?

Ответ: 180

2. Правильный икосаэдр (20-гранник с 12 вершинами) вписан в сферу радиуса 1. Из одной из вершин икосаэдра провели векторы ко всем остальным и посчитали скалярные произведения

для каждой пары различных векторов, всего 55 штук. Чему равна сумма этих скалярных произведений?

Ответ: 60

3. Куб описан вокруг сферы радиуса 1. Из одного из центров граней куба проведены векторы ко всем остальным центрам граней и вершинам. У получившихся векторов посчитали скалярные произведения для каждой пары различных векторов, всего 78 штук.
Чему равна сумма этих скалярных произведений?

Ответ: 76

III. Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады для 11 класса

Задача 1. (2 балла)

1. Функция $f(x)$ такова, что $f(x + 1) + f(x-1) = 2{,}5\, f(x)$. Известно, что $f(0) = 2$, а $f(3) = -15{,}5$. Найдите $f(2)$.

Ответ: -7.

2. Функция $f(x)$ такова, что $f(x + 1) + f(x-1) = 4{,}25\, f(x)$. Известно, что $f(1) = -15$, а $f(4) = 63{,}75$. Найдите $f(3)$.

Ответ: 15

3. Функция $f(x)$ такова, что $f(x + 1) + f(x-1) = 5{,}2\, f(x)$. Известно, что $f(0) = -98$, а $f(3) = 249{,}2$. Найдите $f(1)$.

Ответ: -10

<u>Примеры записи ответов:</u>
17
-1,7
1/7

Задача 2. (2 балла)

1. Сколько целочисленных решений имеет уравнение $x^{(y^z)}=2^{16}$ при y^z не равном 1?

Ответ: 22

2. Сколько целочисленных решений имеет уравнение $x^{(y^z)}=2^{81}$ при y^z не равном 1?

Ответ: 11

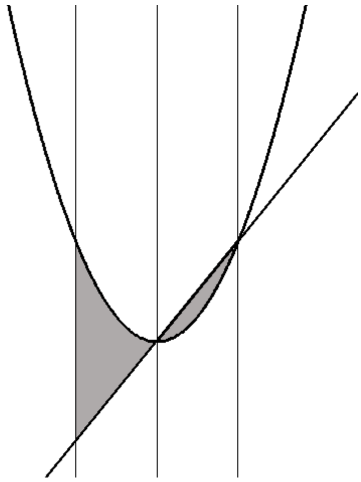
3. Сколько целочисленных решений имеет уравнение $x^{(y^z)}=2^{12}$ при y^z не равном 1?

Ответ: 13

<u>Примеры записи ответов:</u>
17

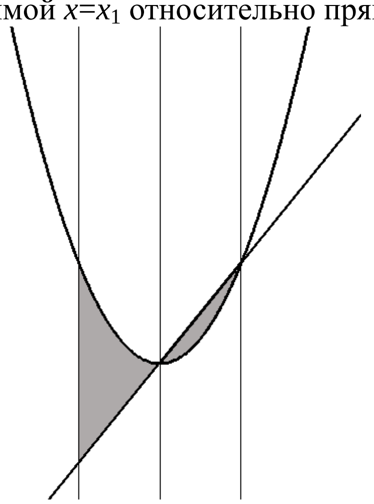
Задача 3. (2 балла)

1. Графики квадратного трёхчлена с положительным старшим коэффициентом 5 и его производной пересекаются в вершине параболы с абсциссой x_0 и ещё одной точке с абсциссой x_1. Найдите суммарную площадь обеих ограниченных областей, получающей при разрезании плоскости по графикам трёхчлена, его производной и прямой, симметричной прямой $x=x_1$ относительно прямой $x=x_0$ (см. рисунок).



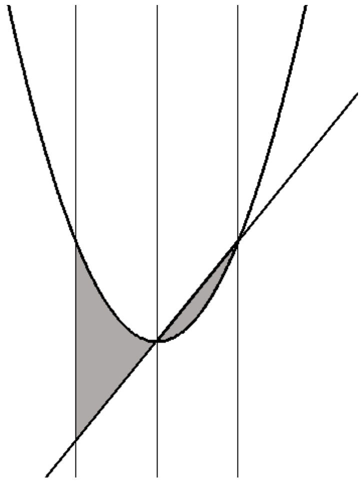
Ответ: 40

2. Графики квадратного трёхчлена с положительным старшим коэффициентом 10 и его производной пересекаются в вершине параболы с абсциссой x_0 и ещё одной точке с абсциссой x_1. Найдите суммарную площадь обеих ограниченных областей, получающей при разрезании плоскости по графикам трёхчлена, его производной и прямой, симметричной прямой x=x_1 относительно прямой x=x_0 (см. рисунок).



Ответ: 80

1. Графики квадратного трёхчлена с положительным старшим коэффициентом 2 и его производной пересекаются в вершине параболы с абсциссой x_0 и ещё одной точке с абсциссой x_1. Найдите суммарную площадь обеих ограниченных областей, получающей при разрезании плоскости по графикам трёхчлена, его производной и прямой, симметричной прямой x=x_1 относительно прямой x=x_0 (см. рисунок).



Ответ: 16

Примеры записи ответов:
17
-1,7
1/7

Задача 4. (3 балла)

1. Ночью пошел снег и равномерно покрыл круглую площадку радиусом полтора метра слоем высотой полметра. Какой максимальной высоты (в метрах) дети могут слепить снеговика, если считать, что снеговик — это два шара, один поставлен на другой. Изменением плотности снега при скатывании снеговика пренебречь.

Ответ: 3.

2. Ночью пошел снег и равномерно покрыл круглую площадку радиусом два метра слоем высотой 1,8 сантиметра. Какой максимальной высоты (в сантиметрах) дети могут слепить снеговика, если считать, что снеговик — это два шара, один поставлен на другой. Изменением плотности снега при скатывании снеговика пренебречь.

Ответ: 120

3. Ночью пошел снег и равномерно покрыл круглую площадку радиусом пять метров слоем высотой 36 сантиметров. Какой максимальной высоты (в метрах) дети могут слепить снеговика, если считать, что снеговик — это два шара, один поставлен на другой. Изменением плотности снега при скатывании снеговика пренебречь.

Ответ: 6

Примеры записи ответов:
17
1,7
1/7

Задача 5. (3 балла)

1. На какое наименьшее количество прямоугольных трапеций можно разбить правильный треугольник?

Ответ: 6

2. На какое наименьшее количество прямоугольных трапеций можно разбить прямоугольный равнобедренный треугольник?

Ответ: 4

3. На какое наименьшее количество равнобедренных трапеций можно разбить прямоугольник, составленный из двух квадратов?

Ответ: 8

Примеры записи ответов:
17

Задача 6. (3 балла)

1. Найдите значение выражения

$$\frac{\cos 0{,}000001^o + \cos 0{,}000003^o + \cos 0{,}000005^o + \ldots + \cos 29{,}999999^o}{\sin 0{,}000001^o + \sin 0{,}000003^o + \sin 0{,}000005^o + \ldots + \sin 29{,}999999^o}.$$

Ответ не округляйте. Для записи квадратного корня используйте знак «?».

Ответ: 2+?3 || ?3+2

2. Найдите значение выражения

$$\frac{\cos 0{,}000001^o + \cos 0{,}000003^o + \cos 0{,}000005^o + \ldots + \cos 44{,}999999^o}{\sin 0{,}000001^o + \sin 0{,}000003^o + \sin 0{,}000005^o + \ldots + \sin 44{,}999999^o}.$$

Ответ не округляйте. Для записи квадратного корня используйте знак «?».

Ответ: 1+?2 || ?2+1

3. Найдите значение выражения

$$\frac{\sin 30{,}000001^o + \sin 30{,}000003^o + \sin 30{,}000005^o + \ldots + \sin 59{,}999999^o}{\sin 0{,}000001^o + \sin 0{,}000003^o + \sin 0{,}000005^o + \ldots + \sin 29{,}999999^o}.$$

Ответ не округляйте. Для записи квадратного корня используйте знак «?».

Ответ: 1+?3 || ?3+1

Примеры записи ответов:
17
-1,7
1/7
1+?7

Задача 7. (3 балла)

1. Даны две геометрические прогрессии, одна из десяти членов, другая из девяти. Оказалось, что все эти 19 чисел различны и являются членами некоторой положительной арифметической прогрессии. Какое наименьшее количество членов может быть в этой арифметической прогрессии?

Ответ: 768

2. Даны две геометрические прогрессии, одна из десяти членов, другая из одиннадцати, всего 21 различное число. Оказалось, что все эти числа являются членами некоторой положительной арифметической прогрессии. Какое наименьшее количество членов может быть в этой арифметической прогрессии?

Ответ: 1536

3. Даны две геометрические прогрессии, одна из восьми членов, другая из девяти. Оказалось, что все эти 17 чисел различны и являются членами некоторой положительной арифметической прогрессии. Какое наименьшее количество членов может быть в этой арифметической прогрессии?

Ответ: 384

__**Примеры записи ответов:**__
17

Задача 8. (3 балла)

1. Дан параллелограмм *ABCD* с углом $A=30^{\circ}$. Описанные окружности треугольников *ABD* и *CBD* пересекают диагональ *AC* в двух точках, которые делят её на три равные части. Найдите отношение большей стороны параллелограмма к меньшей.

Ответ не округляйте. Для записи квадратного корня используйте знак «?».

Ответ: ?3+?2 || ?2+?3

2. Дан параллелограмм *ABCD* с углом $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. Описанные окружности треугольников *ABD* и *CBD* пересекают диагональ *AC* в двух точках, которые делят её на три равные части. Найдите отношение большей стороны параллелограмма к меньшей.

Ответ не округляйте. Для записи квадратного корня используйте знак «?».

Ответ: ?3

3. Дан параллелограмм *ABCD* с углом $A=45^{\circ}$. Описанные окружности треугольников *ABD* и *CBD* пересекают диагональ *AC* в двух точках, которые делят её на три равные части. Найдите отношение большей стороны параллелограмма к меньшей.

Ответ не округляйте. Для записи квадратного корня используйте знак «?».

Ответ: 1+?2 || ?2+1

Примеры записи ответов:

17

-1,7

1/7

1+?7

Задача 9. (4 балла)

1. Найдите общую длину всех промежутков положительных решений неравенства $3^{[x]}\{x\} < 6$. Квадратные скобки обозначают целую часть, фигурные — дробную.

Ответ: 3

2. Найдите общую длину всех промежутков положительных решений неравенства $4^{[x]}\{x\} < 6$. Квадратные скобки обозначают целую часть, фигурные — дробную.

Ответ: 2,5 || 5/2

3. Найдите общую длину всех промежутков положительных решений неравенства $5^{[x]}\{x\} < 15$. Квадратные скобки обозначают целую часть, фигурные — дробную.

Ответ: 2,75 || 11/4

Примеры записи ответов:

17

1,7

1/7

Задача 10. (5 баллов)

1. По кругу были написаны 65 (не обязательно целых) чисел от 10 до 100 включительно. От каждого числа взяли логарифм по основанию следующего за ним по часовой стрелке, после чего все полученные логарифмы сложили. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих логарифмов?

Ответ: 81

2. По кругу были написаны 55 (не обязательно целых) чисел от 10 до 1000 включительно. От каждого числа взяли логарифм по основанию следующего за ним по часовой стрелке, после чего все полученные логарифмы сложили. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих логарифмов?

Ответ: 91

3. По кругу были написаны 129 (не обязательно целых) чисел от 5 до 25 включительно. От каждого числа взяли логарифм по основанию следующего за ним по часовой стрелке, после

чего все полученные логарифмы сложили. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих логарифмов?

Ответ: 161

<u>Примеры записи ответов:</u>
17
-1,7
1/7

IV. Задания заключительного этапа олимпиады для 10 класса

Открытая олимпиада школьников по математике

12 марта 2017 г.

10 класс
Решения
1 вариант

1. (2 балла) Что больше: $\frac{1}{50}+\frac{1}{51}+\ldots+\frac{1}{150}$ или $\frac{2}{150}+\frac{2}{151}+\ldots\frac{2}{250}$?

Ответ: Первая сумма больше.

Решение: Перепишем вторую сумму как $\frac{1}{75}+\frac{1}{75,5}+\ldots\frac{1}{125}$. У неё одинаковое количество слагаемых с первой суммой, причём среднее слагаемое $\frac{1}{100}$ общее.

Сравним пары слагаемых $\frac{1}{100-k}+\frac{1}{100+k}=\frac{1}{100^2-k^2}$ и $\frac{1}{100-\frac{k}{2}}+\frac{1}{100+\frac{k}{2}}=\frac{1}{100^2-\frac{k^2}{4}}$. Первая пара слагаемых очевидно больше, значит, первая сумма больше.

2. (2 балла) На доске записали дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$, а также все остальные дроби, получающиеся из неё перестановкой чисел a, b, c, d, кроме имеющих тождественно нулевой знаменатель. Могло ли так получится, что среди выписанных дробей ровно 7 различных?

Ответ: Да.

Решение: Например, возьмём числа 2, 1, 0, 0. Всего 4 числа, из которых два одинаковых, можно расставить 12 способами. Два из них имеют нулевой знаменатель, т.е. не рассматриваются. Осталось 10.

Два варианта нашей дроби нулевые. Ещё есть дроби $\frac{2x}{1}$, $\frac{2}{x}$, $\frac{2x}{x}=\frac{2}{1}$ и ещё столько же обратных к ним.

3. (2 балла) Один двоечник написал следующие неверные формулы синуса и косинуса суммы: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ и $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$. В свое оправдание он сказал, что при некоторых α и β его формулы всё же верны. Найдите все такие пары (α,β).

Ответ: $\alpha=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m, m\in\mathbb{Z}$ и $\beta=\mp\frac{\pi}{3}+2\pi l, l\in\mathbb{Z}$.

Решение:

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta\end{cases}$$

Из первого равенства следует, что $2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0\\ \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha+\beta=2\pi k, k\in\mathbb{Z}\\ \dfrac{\alpha+\beta}{2}=\pm\dfrac{\alpha-\beta}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

В первом случае $\cos\alpha=\cos\beta$. Таким образом, формула “косинуса суммы” превращается в $1=2\cos\alpha$, откуда $\alpha=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m, m\in\mathbb{Z}$ и, соответственно, $\beta=\mp\frac{\pi}{3}+2\pi l, l\in\mathbb{Z}$.

Во втором случае мы получаем либо $\beta=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ или $\alpha=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. Тогда второе равенство превращается в $\cos\alpha=1+\cos\alpha$ или аналогичное равенство для β, что невозможно. Значит, остаётся только первый случай.

4. (3 балла) На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 10 см. Эта окружность пересекает стороны AB и BC в точках X и Y соответственно. Найдите $AX\cdot AB+CY\cdot BC$.

Ответ: 400

Решение: Пусть точка M — середина стороны AC, она же центр окружности. Тогда $AB\cdot BX=BC\cdot BY=(BM+10)(BM-10)$. Тогда $BX=\frac{BM^2-100}{AB}=\frac{2AB^2+2BC^2-400-400}{4AB}$. Соответственно, $AX=AB-\frac{2AB^2+2BC^2-800}{4AB}=\frac{2AB^2-2BC^2+800}{4AB}$.

аналогично $CY=\frac{2BC^2-2AB^2+800}{4BC}$. Тогда $AX\cdot AB+CY\cdot BC=\frac{1600}{4}=400$.

5. (3 балла) Вписанная окружность четырёхугольника $ABCD$ касается сторон AB, BC, CD и AD в точках E, F, G и H соответственно. Прямые EH и GH пересекают прямую BC в точках K и L соответственно. Оказалось, что $BK=BF$. Докажите, что $CL=CF$.

Доказательство: $BK=BF=BE$, следовательно треугольник KFE прямоугольный с прямым углом $\angle KEF$. Но $\angle KEF=\angle HEF$. Значит, $\angle HEF$ прямой, но $\angle HEF+\angle HGF=180^\circ$, следовательно, $\angle HGF$ тоже прямой, и смежный к нему $\angle LGF$ тоже.

Рассмотрим окружность с центром в точке C и радиусом $CF=CG$. Она вторично пересекает прямую BC в точке L' и $CL'=CF=CG$. Но, поскольку $\angle L'GF$ также прямой, L и L' это одна и та же точка, тогда $CL=CF$, что и требовалось.

6. (3 балла) Последовательность задана следующими соотношениями: $x_1=5$, $x_{n+1}=x_n+\sin x_n$. Докажите, что $x_n>\pi$

Доказательство: Докажем по индукции неравенство $\pi < x_n < 2\pi$. База $n = 1$, $\pi < 5 < 2\pi$.

Переход от n к $n + 1$. Пусть $\pi < x_n < 2\pi$, тогда $\sin x_n < 0$, и следовательно, $x_{n+1} < x_n < 2\pi$. С другой стороны, $\sin x_n = -\sin(x_n - \pi) > -(x_n - \pi)$, так как для положительных углов выполняется неравенство $\sin\alpha < \alpha$. Значит, $x_{n+1} = x_n + \sin x_n > x_n - (x_n - \pi) = \pi$, что и требовалось доказать.

Замечание: на самом деле можно также доказать, что число π является пределом последовательности x_n.

7. (4 балла) Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен 1. Все три коэффициента в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию из трёх элементов с разностью q. Найдите все возможные значения q, если известно, что это рациональное число и разность корней $f(x)$ равна q.

Ответ: Решений нет.

Решение: Коэффициенты трёхчлена имеют следующий вид: a, aq, aq^2 в некотором порядке. Корни можно представить как b и $b + q$.

Первый случай: $a = 1$, два других коэффициента: q и q^2.

Подслучай 1.1: $2b + q = -q \Rightarrow b = q$. Далее, $b(b + q) = q^2 \Rightarrow q \cdot 2q = q^2$ откуда $q = 0$, что невозможно из определения геометрической прогрессии.

Подслучай 1.2: $2b+q = -q^2 \Rightarrow b = \dfrac{-q^2 - q}{2}$. Далее, $b(b+q) = q \Rightarrow q^2(q+1)(q-1) = 4q$ откуда снова $q = 0$, что невозможно из определения геометрической прогрессии. Другие рациональные корни этого уравнения могут быть только числами ± 1, $\pm\frac{1}{5}$, легко убедится, что они не подходят.

Второй случай: $aq = 1$, два других коэффициента: $\frac{1}{q}$ и q.

Подслучай 2.1: $2b + q = -\frac{1}{q} \Rightarrow b = \frac{1}{2}(-\frac{1}{q} - q) = -\frac{1+q^2}{2q}$. Далее, $b(b + q) = q \Rightarrow (1 + q^2)(1 - q^2) = 4q^3$. Рациональные корни этого уравнения могут быть только числами ± 1, легко убедится, что они не подходят.

Подслучай 2.2: $2b + q = -q \Rightarrow b = -q$. Далее, $b(b + q) = \frac{1}{q} \Rightarrow 0 = \frac{1}{q}$ — нет решений

Третий случай: $aq^2 = 1$, два других коэффициента: $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{q^2}$

Подслучай 3.1: $2b+q = -\frac{1}{q} \Rightarrow b = \frac{1}{2}(-q - \frac{1}{q}) = -\frac{1+q^2}{2q}$. Далее, $b(b+q) = \frac{1}{q^2} \Rightarrow (1+q^2)(1-q^2) = 4 \Rightarrow 5 - q^4 = 0$. Рациональных корней нет.

Подслучай 3.2: $2b + q = -\frac{1}{q^2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}(-q - \frac{1}{q^2}) = -\frac{1+q^3}{2q^2}$. Далее, $b(b + q) = \frac{1}{q} \Rightarrow (1 + q^3)(1 - q^3) = 4 * q^3$ Рациональные корни этого уравнения могут быть только числами ± 1.

Таким образом все случаи разобраны, рациональных решений нет.

8. (5 баллов) Таблица 10×10 заполнена нулями. За одну операцию в таблице находится минимальное число (если таких несколько — выбирается любое) и к нему, а также ко всем числам, стоящим в соседних с ним по стороне или углу клетках, добавляется единица. Какое наибольшее число может оказаться в одной из клеток таблицы через 80 операций?

Ответ: 20.

Решение: Назовём n-ой фазой несколько подряд идущих операций, который применяются к числам, равным n. Если таких операций не было, будем говорить, что данная фаза состоит из нуля операций. Начинается всё с нулевой фазы.

В течении одной фазы никакое число не может увеличится больше, чем на 4. Действительно, если мы увеличили само число, то ни к нему, ни к его соседям не может быть применена наша операция в течение этой фазы ни до, не после, поскольку число, увеличенное на один в некоторой фазе, не может оказаться минимальным в течении той же самой фазы. Среди соседей числа можно выбрать не больше 4 не соседних между собой, значит, действительно мы можем увеличить число не больше, чем на 4 за одну фазу.

Рассмотрим первые, четвёртые, седьмые и десятые клетки в первой, четвёртой, седьмой и десятой строках таблицы, всего 16 штук. Заметим, что никакая операция не затрагивает две из них. Значит, чтобы сменилось n фаз, надо совершить хотя бы $16n$ операций. (**Важно!** Мы не можем утверждать, что одна фаза длится хотя бы 16 операций, так как некоторые из наших чисел могли быть увеличены на предыдущих фазах)

Значит, у нас прошло не более 5 фаз и в каждой никакое число не могло увеличится более, чем на 4. Следовательно, за 80 операций никакое число не могло стать больше, чем 20.

Пример строится следующим образом: рассмотрим вторые, четвёртые, седьмые и десятые клетки во второй, четвёртой, седьмой и десятой строках таблицы, всего 16 штук. Будем применять операции только к ним. Операции, применённые к одной из этих клеток, не затрагивают остальные 15, и при этом после применения операций ко всем 16 клеткам все числа в таблице увеличиваются хотя бы на 1. При этом число в третьей клетке третьей строки будет каждую фазу увеличиваться на 4.

Разумеется, пример не единственный.

2 вариант

1. (2 балла) Что больше: $\frac{1}{25}+\frac{1}{26}+\ldots+\frac{1}{75}$ или $\frac{2}{75}+\frac{2}{76}+\ldots\frac{2}{125}$?

Ответ: Первая сумма больше.

Решение: Перепишем вторую сумму как $\frac{1}{37,5}+\frac{1}{38}+\ldots\frac{1}{62,5}$. У неё одинаковое количество слагаемых с первой суммой, причём среднее слагаемое $\frac{1}{50}$ общее.

Сравним пары слагаемых $\frac{1}{50-k}+\frac{1}{50+k}=\frac{1}{50^2-k^2}$ и $\frac{1}{50-\frac{k}{2}}+\frac{1}{50+\frac{k}{2}}=\frac{1}{50^2-\frac{k^2}{4}}$. Первая пара слагаемых очевидно больше, значит, первая сумма меньше.

2. (2 балла) На доске записали дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$, а также все остальные дроби, получающиеся из неё перестановкой чисел a, b, c, d, кроме имеющих тождественно нулевой знаменатель. Могло ли так получится, что среди выписанных дробей ровно 5 различных?

Ответ: Да.

Решение: Например, возьмём числа 2, 2, 1, 1. Всего 4 числа, из которых две пары одинаковых, можно расставить 6 способами, но среди них два совпадают.

Наши дроби это $\frac{2x+2}{x+1}$, $\frac{2x+1}{2x+1}=\frac{x+2}{x+2}$, $\frac{x+1}{2x+2}$, $\frac{1x+2}{2x+1}$, $\frac{2x+1}{x+2}$.

3. (2 балла) Один двоечник написал следующие неверные формулы синуса и косинуса разности: $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha-\sin\beta$ и $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta$. В свое оправдание он сказал, что при некоторых α и β его формулы всё же верны. Найдите все такие пары (α,β).

Ответ: $\alpha=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ и $\beta=\mp\frac{\pi}{3}+2\pi l, l\in\mathbb{Z}$.

Решение:

$$\begin{cases}\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha-\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta\end{cases}$$

Из первого равенства следует, что $2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=0\\ \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\alpha-\beta=2\pi k, k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\alpha+\beta}{2}=\pm\frac{\alpha-\beta}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

В первом случае $\cos\alpha=\cos\beta$. Таким образом, формула "косинуса суммы" превращается в $1=0$, что невозможно.

Во втором случае мы получаем либо $\beta=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ или $\alpha=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. Тогда второе равенство превращается в $\cos\alpha=\cos\alpha-1$, что невозможно, или $\cos\beta=1-\cos\beta$, откуда $\beta=\mp\frac{\pi}{3}+2\pi l, l\in\mathbb{Z}$.

4. (3 балла) На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 20 см. Эта окружность пересекает стороны AB и AC в точках X и Y соответственно. Найдите $BX\cdot AB+CY\cdot AC$.

Ответ: 1600

Решение: Пусть точка M — середина стороны BC, она же центр окружности. Тогда $AB\cdot AX=AC\cdot AY=(AM+20)(AM-20)$. Тогда $AX=\frac{AM^2-400}{AB}=\frac{2AB^2+2AC^2-1600-1600}{4AB}$. Соответственно, $BX=AB-\frac{2AB^2+2AC^2-3200}{4AB}=\frac{2AB^2-2AC^2+3200}{4AB}$.

аналогично $CY=\frac{2AC^2-2AB^2+3200}{4AC}$. Тогда $BX\cdot AB+CY\cdot AC=\frac{6400}{4}=1600$.

5. (3 балла) Вписанная окружность четырёхугольника $ABCD$ касается сторон AB, BC, CD и AD в точках E, F, G и H соответственно. Прямые EF и EH пересекают прямую CD в точках Q и P соответственно. Оказалось, что $CQ=CG$. Докажите, что $DP=DH$.

Доказательство: $Q=CG=CF$, следовательно треугольник GFQ прямоугольный с прямым углом $\angle GFQ$. Но $\angle GFQ=\angle GFE$. Значит, $\angle GFE$ прямой, но $\angle GFE+\angle GHE=180°$, следовательно, $\angle GHE$ тоже прямой, и смежный к нему $\angle GHP$ тоже.

Рассмотрим окружность с центром в точке D и радиусом $DH=DG$. Она вторично пересекает прямую CD в точке P' и $DP'=DH=DG$. Но, поскольку $\angle P'HG$ также прямой, P и P' это одна и та же точка, тогда $DP=DH$, что и требовалось.

6. (3 балла) Последовательность задана следующими соотношениями: $x_1=7$, $x_{n+1}=x_n+\sin x_n$. Докажите, что $x_n<3\pi$

Доказательство: Докажем по индукции неравенство $2\pi<x_n<3\pi$. База $n=1$, $2\pi<7<3\pi$.

Переход от n к $n+1$. Пусть $2\pi<x_n<3\pi$, тогда $\sin x_n>0$, и следовательно, $x_{n+1}>x_n>2\pi$. С другой стороны, $\sin x_n=\sin(3\pi-x_n)<(3\pi-x_n)$, так как для положительных углов выполняется неравенство $\sin\alpha<\alpha$. Значит, $x_{n+1}=x_n+\sin x_n<x_n+(3\pi-x_n)=3\pi$, что и требовалось доказать.

Замечание: на самом деле можно также доказать, что число 3π является пределом последовательности x_n.

7. (4 балла) Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен 1. Все три коэффициента в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию из трёх элементов с разностью d. Найдите все возможные значения d, если известно, что это рациональное число и корни $f(x)$ отличаются друг от друга в d раз.

Ответ: -1, $-\frac{1}{2}$.

Решение: Коэффициенты трёхчлена имеют следующий вид: a, $a+d$, $a+2d$ в каком-то порядке. Корни трёхчлена можно представить как b и bd.

Первый случай: $a=1$, два других коэффициента: $1+d$ и $1+2d$.

Подслучай 1.1: $b+bd=-1-d$, значит, $b=-1$ или $d=-1$. Если $b=-1$, пишем также равенство на свободный член: $b^2d=1+2d \Rightarrow d=1+2d \Rightarrow d=-1$.

Подслучай 1.2: $b+bd=-1-2d \Rightarrow b=-\dfrac{1+2d}{1+d}$. Далее, $b^2d=1+d \Rightarrow d(1+2d)^2=(1+d)^3 \Rightarrow 3d^3+d^2-2d-1=0$. Рациональные корни этого уравнения могут быть только числами ±1, $\pm\frac{1}{3}$, легко убедится, что они не подходят.

Второ случай: $a+d=1$, два других коэффициента: $1-d$, $1+d$

Подслучай 2.1: $b+bd=-1+d \Rightarrow b=-\dfrac{1-d}{1+d}$. Далее, $b^2d=1+d \Longrightarrow d(1-d)^2=(1+d)^3 \Rightarrow 5d^2+2d+1=0$. Рациональные корни этого уравнения могут быть только числами ±1, $\pm\frac{1}{5}$, легко убедится, что они не подходят.

Подслучай 2.2: $b+bd=-1-d$, значит, $b=-1$ или $d=-1$. Если $b=-1$, пишем также равенство на свободный член: $b^2d=1-d \Rightarrow d=\frac{1}{2}$.

Третий случай: $a+2d=1$, два других коэффициента: $1-2d$, $1-d$.

Подслучай 3.1: $b+bd=-1+2d \Rightarrow b=-\dfrac{1-2d}{1+d}$. Далее, $b^2d=1-d \Rightarrow d(1-2d)^2=(1-d)*(1+d)^2 \Rightarrow 5d^3-3*d^2-1=0$. Рациональные корни этого уравнения могут быть только числами ±1, $\pm\frac{1}{5}$, легко убедится, что они не подходят.

Подслучай 3.2: $b+bd=-1+d \Rightarrow b=\dfrac{1-d}{1+d}$. Далее, $b^2d=1-2d \Rightarrow d(1-d)^2=(1-2d)(1+d)^2 \Rightarrow 3d^3+d^2+d-1=0$ Рациональные корни этого уравнения могут быть только числами ±1, $\pm\frac{1}{5}$, легко убедится, что они не подходят.

8. (5 баллов) Таблица 7×7 заполнена нулями. За одну операцию в таблице находится минимальное число (если таких несколько — выбирается любое) и к нему, а также ко всем числам, стоящим в соседних с ним по стороне или углу клетках, добавляется единица. Какое наибольшее число может оказаться в одной из клеток таблицы через 90 операций?

Ответ: 40.

Решение: Назовём n-ой фазой несколько подряд идущих операций, который применяются к числам, равным n. Если таких операций не было, будем говорить, что данная фаза состоит из нуля операций. Начинается всё с нулевой фазы.

В течении одной фазы никакое число не может увеличится больше, чем на 4. Действительно, если мы увеличили само число, то ни к нему, ни к его соседям не может быть применена наша операция в течение этой фазы ни до, не после, поскольку число, увеличенное на один в некоторой фазе, не может оказаться минимальным в течении той же самой фазы. Среди соседей числа можно выбрать не больше 4 не соседних между собой, значит, действительно мы можем увеличить число не больше, чем на 4 за одну фазу.

Рассмотрим первые, четвёртые и седьмые клетки в первой, четвёртой и седьмой строках таблицы, всего 9 штук. Заметим, что никакая операция не затрагивает две из них. Значит, чтобы сменилось n фаз, надо совершить хотя бы $9n$ операций. (**Важно!** Мы не можем утверждать, что одна фаза длится хотя бы 9 операций, так как некоторые из наших чисел могли быть увеличены на предыдущих фазах)

Значит, у нас прошло не более 10 фаз и в каждой никакое число не могло увеличится более, чем на 4. Следовательно, за 90 операций никакое число не могло стать больше, чем 40.

Пример строится следующим образом: рассмотрим вторые, четвёртые и шестые клетки во второй, четвёртой и шестой строках таблицы, всего 9 штук. Будем применять операции только к ним. Операции, применённые к одной из этих клеток, не затрагивают остальные 8, и при этом после применения операций ко всем 9 клеткам все числа в таблице увеличиваются хотя бы на 1. При этом число в третьей клетке третьей строки будет каждую фазу увеличиваться на 4.

Разумеется, пример не единственный.

V. Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады для 10 класса

Задача 1. (2 балла)

1. Для функции $f(x)$ выполняется условие $f(f(f(x))) + 2\, f(f(x)) + 4\, f(x) + 8x = 0$. Найдите $f(f(f(f(3))))$.

Ответ: 48

3. Для функции $f(x)$ выполняется условие $f(f(f(x))) - 2\, f(f(x)) + 4\, f(x) - 8x = 0$. Найдите $f(f(f(f(5))))$.

Ответ: 80

3. Для функции $f(x)$ выполняется условие $f(f(f(x))) + 3\, f(f(x)) + 9\, f(x) + 27x = 0$. Найдите $f(f(f(f(2))))$.

Ответ: 162

Примеры записи ответов:
14
1/4
-0,25

Задача 2. (2 балла)

1. В квадратном трёхчлене поменяли местами первый и второй коэффициенты, после чего результат сложили с исходным трёхчленом. Получился третий квадратный трёхчлен, у которого оказался единственный корень. Чему он может быть равен? Если правильных ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: -1/2 || -0,5

2. В квадратном трёхчлене поменяли местами первый коэффициент и свободный член, после чего результат сложили с исходным трёхчленом. Получился третий квадратный трёхчлен, у которого оказался единственный корень. Чему он может быть равен? Если правильных ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: -1, 1 || 1, -1 || 1; -1 || -1; 1

3. В квадратном трёхчлене поменяли местами второй коэффициент и свободный член, после чего результат сложили с исходным трёхчленом. Получился третий квадратный трёхчлен, у которого оказался единственный корень. Чему он может быть равен? Если правильных ответов несколько, перечислите их через точку с запятой.

Ответ: 0; -2 || 0, -2 || -2; 0

Примеры записи ответов:
14
1/4
0,25; 0,5

Задача 3. (2 балла)

1. Найдите количество решений в натуральных числах уравнения $(x - 10)^2 - 15 = (y - 6)^2$.

Ответ: 6

2. Найдите количество решений в натуральных числах уравнения $(x - 6)^2 - 21 = (y - 3)^2$.

Ответ: 5

3. Найдите количество решений в натуральных числах уравнения $(x - 4)^2 - 35 = (y - 3)^2$.

Ответ: 3

Примеры записи ответов:
14

Задача 4. (3 балла)

1. Дан параллелограмм ABCD со стороной AD=100. Окружность S_1 касается сторон AD и BC, а также стороны AB; окружность S_2 касается сторон AD и BC, а также окружности S_1, окружность S_3 касается сторон AD и BC, а также окружности S_2, и так далее, окружность S_{100} касается сторон AD и BC, окружности S_{99}, а также стороны CD.

Какое наибольшее значение может принимать площадь параллелограмма?

Ответ: 100

2. Дан параллелограмм ABCD со стороной AD=150. Окружность S_1 касается сторон AD и BC, а также стороны AB; окружность S_2 касается сторон AD и BC, а также окружности S_1, окружность S_3 касается сторон AD и BC, а также окружности S_2, и так далее, окружность S_{50} касается сторон AD и BC, окружности S_{49}, а также стороны CD.

Какое наибольшее значение может принимать площадь параллелограмма?

Ответ: 450

3. Дан параллелограмм ABCD со стороной AD=100. Окружность S_1 касается сторон AD и BC, а также стороны AB; окружность S_2 касается сторон AD и BC, а также окружности S_1, окружность S_3 касается сторон AD и BC, а также окружности S_2, и так далее, окружность S_{200} касается сторон AD и BC, окружности S_{199}, а также стороны CD.

Какое наибольшее значение может принимать площадь параллелограмма?

Ответ: 50

Примеры записи ответов:
14
1/4
0,25

Задача 5. (3 балла)

1. Натуральные числа x_1, x_2, …, x_9 таковы, что $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_9}=2$. Какое минимальное значения может принимать сумма этих чисел?

Ответ: 41

2. Натуральные числа x_1, x_2, …, x_{11} таковы, что $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{11}}=2$. Какое минимальное значения может принимать сумма этих чисел?

Ответ: 61

3. Натуральные числа x_1, x_2, …, x_{13} таковы, что $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{13}}=2$. Какое минимальное значения может принимать сумма этих чисел?

Ответ: 85

Примеры записи ответов:
14

Задача 6. (3 балла)

1. На доске записаны числа от 1 до 1000. За один ход разрешается стереть какое-либо число *n*, а также ещё не более *n* чисел не меньших *n*. За какое наименьшее количество ходов можно стереть все числа?

Ответ: 9

1. На доске записаны числа от 1 до 500. За один ход разрешается стереть какое-либо число *n*, а также ещё не более *n* чисел не меньших *n*. За какое наименьшее количество ходов можно стереть все числа?

Ответ: 8

1. На доске записаны числа от 1 до 2000. За один ход разрешается стереть какое-либо число *n*, а также ещё не более *n* чисел не меньших *n*. За какое наименьшее количество ходов можно стереть все числа?

Ответ: 10

Примеры записи ответов:
5

Задача 7. (4 балла)

1. Последовательность a_n построена следующим образом: $a_0 = 4$, $a_{2n+1} = a_{2n} - 3$, $a_{2n} = -2a_{2n-1}$. Найдите a_{100}.

Если для записи ответа потребуется операция возведения в степень, используйте символ «^»

Ответ: 2^51+2 || 2251799813685250

2. Последовательность a_n построена следующим образом: $a_0 = 12$, $a_{2n+1} = a_{2n} - 2$, $a_{2n} = 3a_{2n-1}$. Найдите a_{50}.

Если для записи ответа потребуется операция возведения в степень, используйте символ «^»

Ответ: 3^27+3 || 7625597484990

3. Последовательность a_n построена следующим образом: $a_0 = 10$, $a_{2n+1} = a_{2n} - 4$, $a_{2n} = 2a_{2n-1}$. Найдите a_{101}.

Если для записи ответа потребуется операция возведения в степень, используйте символ «^»

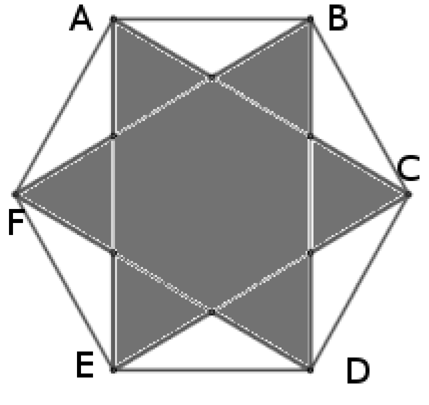
Ответ: 2^51+8 || 2251799813685256

<u>Примеры записи ответов:</u>

14000

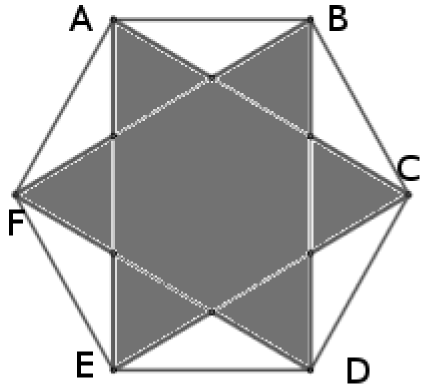
3^100 - 7

1. Дан выпуклый шестиугольник ABCDEF, такой, что AB || CF || DE, BC || AD || EF, CD || BE || FA и AB = DE = 13, BC = EF = 11, AC = 20. Найдите площадь объединения треугольников ACE и BDF.



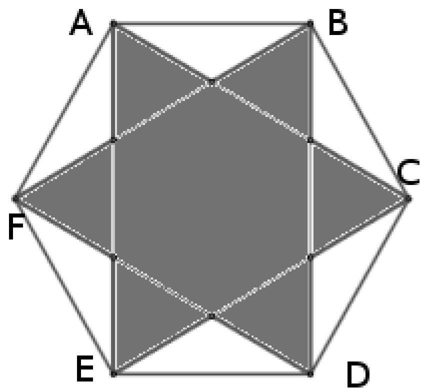
Ответ: 264

2. Дан выпуклый шестиугольник ABCDEF, такой, что AB || CF || DE, BC || AD || EF и CD || BE || FA и BC = EF = 20, CD = AF = 19, BD = 37. Найдите площадь объединения треугольников ACE и BDF.



Ответ: 456

3. Дан выпуклый шестиугольник ABCDEF, такой, что AB || CF || DE, BC || AD || EF и CD || BE || FA и AB = DE = CD = AF = 13, BD = 24. Найдите площадь объединения треугольников ACE и BDF.



Ответ: 240

<u>Примеры записи ответов:</u>
14
1/4
0,25

Задача 9. (4 балла)

1. В волшебной стране некоторые города соединены дорогами так, что из любого города можно попасть в любой другой город, возможно через какие-то ещё города. Никакие два города не соединены напрямую более чем одной дорогой.
Назовем дорогу особенной, если при ее закрытии из какого-то города нельзя будет доехать до какого-то другого. Известно, что в стране всего дорог 25, из которых 20 дорог особенные. Сколько городов может быть в стране? Если правильных ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: 24, 25 || 25, 24 || 24; 25 || 25; 24

2. В сказочной стране некоторые города соединены дорогами так, что из любого города можно попасть в любой другой город, возможно через какие-то ещё города. Никакие два города не соединены напрямую более чем одной дорогой.
Назовем дорогу удивительной, если при ее закрытии из какого-то города нельзя будет доехать до какого-то другого. Известно, что в стране всего дорог 30, из которых 25 дорог

удивительные. Сколько городов может быть в стране? Если правильных ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: 29, 30 || 30, 29 || 29; 30 || 30; 29

3. В Стране Чудес некоторые города соединены дорогами так, что из любого города можно попасть в любой другой город, возможно через какие-то ещё города. Никакие два города не соединены напрямую более чем одной дорогой.
Назовем дорогу странной, если при ее закрытии из какого-то города нельзя будет доехать до какого-то другого. Известно, что в стране всего дорог 50, из которых 45 дорог странные. Сколько городов может быть в стране? Если правильных ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: 49, 50 || 50, 49 || 49; 50 || 50; 49

Примеры записи ответов:
14
14, 15
14; 15

Задача 10. (4 балла)
1. На клетчатой доске 6x6 стоят фишки. Оказалось, что для каждого числа *n* от 0 до 7 есть фишка, в одном столбце и в одной строке с которой стоят в сумме ровно *n* фишек (не считая её самой). Какое максимальное количество фишек может стоять на доске?

Ответ: 14

2. На клетчатой доске 6x6 стоят фишки. Оказалось, что для каждого числа *n* от 1 до 9 есть фишка, в одном столбце и в одной строке с которой стоят в сумме ровно *n* фишек (не считая её самой). Какое максимальное количество фишек может стоять на доске?

Ответ: 18

3. На клетчатой доске 6x6 стоят фишки. Оказалось, что для каждого числа *n* от 2 до 10 есть фишка, в одном столбце и в одной строке с которой стоят в сумме ровно *n* фишек (не считая её самой). Какое максимальное количество фишек может стоять на доске?

Ответ: 21

Примеры записи ответов:
14

VI. Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады для 10 класса

Задача 1. (1 балл)

1. Какое наибольшее значение может принимать сумма
$\sin^2 a + \sin^2(a+45^o) + \sin^2(a+90^o) + \ldots + \sin^2(a+315^o)$?

Ответ: 4

2. Какое наибольшее значение может принимать сумма
$\sin^2 a + \sin^2(a+30^o) + \sin^2(a+60^o) + \ldots + \sin^2(a+330^o)$?

Ответ: 6

3. Какое наибольшее значение может принимать сумма
$\sin^2 a + \sin^2(a+60^o) + \sin^2(a+120^o) + \ldots + \sin^2(a+300^o)$?

Ответ: 3

<u>Примеры записи ответа:</u>
1,7
1/7
17

Задача 2. (3 балла)

1. Все семизначные числа, состоящие из различных цифр от 1 до 7, выписали в порядке возрастания. Каким по счёту идёт число 5143276?

Ответ: 2936

2. Все семизначные числа, состоящие из различных цифр от 1 до 7, выписали в порядке возрастания. Каким по счёту идёт число 2376154?

Ответ: 956

3. Все семизначные числа, состоящие из различных цифр от 1 до 7, выписали в порядке возрастания. Каким по счёту идёт число 3241765?

Ответ: 1590

<u>Примеры записи ответа:</u>
1,7

Задача 3. (3 балла)

1. Какое целое число можно записать в виде $\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\ldots}}}$ (количество корней бесконечно).

Ответ: 2

2. Какое целое число можно записать в виде $\sqrt{4+3\sqrt{4+3\sqrt{4+\ldots}}}$ (количество корней бесконечно).

Ответ: 4

3. Какое целое число можно записать в виде $\sqrt{12-\sqrt{12-\sqrt{12-\ldots}}}$ (количество корней бесконечно).

Ответ: 3

Примеры записи ответа:
1,7

Задача 4. (3 балла)

1. Функция $f(x)$ принимает каждое значение не более двух раз. Кроме того, для любого ненулевого x выполняется равенство $f(x)+f(1-x)+f(\frac{1}{x})=10$. Найдите такое x, не равное $\frac{4}{7}$, что $f(x)=f(\frac{4}{7})$. Если такого x не существует, напишите «нет».

Ответ: -4/3

2. Функция $f(x)$ принимает каждое значение не более двух раз. Кроме того, для любого ненулевого x выполняется равенство $f(x)+f(1-x)+f(\frac{1}{x})=5$. Найдите такое x, не равное $\frac{3}{8}$, что $f(x)=f(\frac{3}{8})$. Если такого x не существует, напишите «нет».

Ответ: -3/5 || -0,6

3. Функция $f(x)$ принимает каждое значение не более двух раз. Кроме того, для любого ненулевого x выполняется равенство $f(x)+f(1-x)+f(\frac{1}{x})=6$. Найдите такое x, не равное $\frac{5}{7}$, что $f(x)=f(\frac{5}{7})$. Если такого x не существует, напишите «нет».

Ответ: -2,5 || -5/2

Примеры записи ответа:
1,7
1/7
-17

Задача 5. (3 балла)

1. На единичном кубе вдоль каждого ребра и каждой диагонали каждой грани провели вектор в одну из двух возможных сторон , всего 24 штуки. Какое наибольшее значение может принимать квадрат суммы этих векторов?

Ответ: 224

2. На единичном кубе вдоль каждого ребра и каждой из четырёх диагоналей куба провели вектор в одну из двух возможных сторон, всего 16 штук. Какое наибольшее значение может принимать квадрат суммы этих векторов?

Ответ: 108

3. На единичном кубе вдоль каждого ребра провели вектор в одну из двух возможных сторон. На каждой грани выбрали одну диагональ и вдоль неё также провели вектор в одну из двух возможных сторон, причём проведённые 6 диагоналей оказались не параллельны. Всего получилось 18 векторов. Какое наибольшее значение может принимать квадрат суммы этих векторов?

Ответ: 116

Примеры записи ответа:
1,7
1/7
17

Задача 6. (3 балла)

1. В клетчатой таблице 9x9 стоят числа таким образом, что в числа в каждой строчке и в каждом столбце образуют арифметическую прогрессию в том порядке, в котором они там написаны. Таблица раскрашена в два цвета в шахматном порядке. На угловых белых клетках таблицы стоят числа 1, 3, 5 и 9. Найдите сумму чисел на чёрных клетках таблицы.

Ответ: 180

2. В клетчатой таблице 11x11 стоят числа таким образом, что в числа в каждой строчке и в каждом столбце образуют арифметическую прогрессию в том порядке, в котором они там написаны. Таблица раскрашена в два цвета в шахматном порядке. На угловых белых клетках таблицы стоят числа 1, 2, 4 и 7. Найдите сумму чисел на чёрных клетках таблицы.

Ответ: 210

1. В клетчатой таблице 13x13 стоят числа таким образом, что в числа в каждой строчке и в каждом столбце образуют арифметическую прогрессию в том порядке, в котором они там написаны. Таблица раскрашена в два цвета в шахматном порядке. На угловых белых клетках таблицы стоят числа 1, 2, 3 и 6. Найдите сумму чисел на чёрных клетках таблицы.

Ответ: 252

Примеры записи ответа:
1,7
1/7
-17

Задача 7. (3 балла)

1. Окружность радиуса 60 касается трёх сторон четырёхугольника ABCD: стороны AB в точке A, стороны CD в точке D и стороны BC в точке X. Оказалось, что BX = 30, CX = 20. Найдите площадь четырёхугольника.

Ответ: 1200

2. Окружность радиуса 60 касается трёх сторон четырёхугольника ABCD: стороны AB в точке A, стороны CD в точке D и стороны BC в точке X. Оказалось, что BX = 45, CX = 30. Найдите площадь четырёхугольника.

Ответ: 3060

3. Окружность радиуса 60 касается трёх сторон четырёхугольника ABCD: стороны AB в точке A, стороны CD в точке D и стороны BC в точке X. Оказалось, что BX = 20, CX = 45. Найдите площадь четырёхугольника.

Ответ: 2215,2

Примеры записи ответа:
1,7
1/7
17

Задача 8. (3 балла)

1. В американской деревне жили бледнолицые, чернокожие и индейцы, всего 61 человек. На Хэллоуин каждый индеец подарил тыкву каждому чернокожему, каждый чернокожий подарил тыкву каждому бледнолицему, каждый бледнолицый подарил тыкву каждому индейцу. Какое наибольшее количество тыкв могло быть подарено?

Ответ: 1240

2. В школе было три класса: математический, гуманитарный и общеобразовательный, всего 91 человек. На Новый Год каждый ученик математического класса послал открытку каждому ученику гуманитарного, каждый ученик гуманитарного класса послал открытку каждому ученику общеобразовательного, каждый ученик общеобразовательного класса послал открытку каждому ученику математического. Какое наибольшее количество открыток могло быть послано?

Ответ: 2760

3. На рок-фестивале встретились вокалисты, гитаристы и ударники, всего 121 человек. Каждый вокалист дал подзатыльник каждому гитаристу, каждый гитарист — каждому ударнику, а каждый ударник — каждому вокалисту. Какое наибольше количество подзатыльников могло быть получено участниками фестиваля?

Ответ: 4880.

Примеры записи ответа:
17

Задача 9. (3 балла)

1. 239-угольник вписан в окружность с диаметром XY = 2 и имеет ось симметрии, перпендикулярную этому диаметру. Найдите сумму квадратов расстояний от вершин 239-угольника до точки X.

Ответ: 478

2. 57-угольник вписан в окружность с диаметром XY = 4 и имеет ось симметрии, перпендикулярную этому диаметру. Найдите сумму квадратов расстояний от вершин 57-угольника до точки X.

Ответ: 456

3. 101-угольник вписан в окружность с диаметром XY = 6 и имеет ось симметрии, перпендикулярную этому диаметру. Найдите сумму квадратов расстояний от вершин 101-угольника до точки X.

Ответ: 1818

Примеры записи ответа:
1,7
1/7
17

Задача 10. (5 баллов)

1. По кругу были написаны 200 (не обязательно целых) чисел от 10 до 10000 включительно. От каждого числа взяли логарифм по основанию следующего за ним по часовой стрелке, после чего все полученные логарифмы сложили. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих логарифмов?

Ответ: 425

2. По кругу были написаны 300 (не обязательно целых) чисел от 10 до 1000 включительно. От каждого числа взяли логарифм по основанию следующего за ним по часовой стрелке, после чего все полученные логарифмы сложили. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих логарифмов?

Ответ: 500

3. По кругу были написаны 300 (не обязательно целых) чисел от 20 до 400 включительно. От каждого числа взяли логарифм по основанию следующего за ним по часовой стрелке, после чего все полученные логарифмы сложили. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих логарифмов?

Ответ: 375

Примеры записи ответа:
1,7
1/7
17

VII. Задания заключительного этапа олимпиады для 9 класса

Открытая олимпиада школьников по математике

12 марта 2017 г.

9 класс

1 вариант

1. (2 балла) Согласно нормативам Международной Федерации Рофлинга, поле для рофлинга состоит из двух площадок, одна из которых квадратная, а вторая имеет ту же ширину, а длину — от 20 до 25 метров включительно. При этом все размеры должны составлять целое число метров, а общая площадь поля должна находится в диапазоне от 200 до 240 квадратных метров (включительно). Найдите наибольший и наименьший возможные размеры квадратной площадки.

Ответ: Сторона квадрата 7 или 8. Площадь 49 или 64.

Решение:

Обозначим сторону квадрата за x. При минимальной длине прямоугольника и максимальной площади поля мы находим максимальное x и наоборот, при максимальной длине прямоугольника и минимальной площади поля мы находим минимальное x

Решаем уравнение $x^2 + 20x = 240$, получаем $x = -10 + \sqrt{340}$. Это число находится между 8 и 9.

Решаем уравнение $x^2 + 25x = 200$, получаем $x = \dfrac{-25 + \sqrt{1425}}{2}$. Это число находится между 6 и 7.

Нам нужны именно большие корни этих уравнений, так как меньшие отрицательны.

Отсюда получаем, что x может находиться среди чисел от 7 до 8 включительно.

2. (2 балла) В карьере находилась куча из 20160000 песчинок. Грузовик за один рейс увозил из карьера количество песчинок, составляющее какую-то степень числа 8 (в том числе, возможно $8^0 = 1$). Мог ли он увезти из карьера всю кучу песка ровно за 1000 рейсов?

Ответ: Нет.

Решение: Заметим, что 8 в любой степени всегда даёт остаток 1 при делении на 7. Поскольку 20160000 делится на 7, это значит, что для вывоза всей кучи нужно количество поездок, кратное 7, а 1000 на 7 не делится.

3. (3 балла) На доске написано число 2017. Петя и Вася играют в следующую игру: за один ход можно вычесть из написанного на доске числа любой его натуральный делитель, кроме него самого, и записать результат этого вычитания на доске вместо исходного числа. Начинает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: Вася

Решение: Невозможно сделать ход только если на доске написана единица. При этом из нечётного числа всегда получается чётное. Вася, получив чётное число, всегда может вычесть 1 и снова получить нечётное. Таким образом, Вася всегда может получать от Пети чётные числа, и отдавать ему нечётные, а Петя наоборот (потому что у него не будет другой возможности). В конце концов Вася получит в результате своего вычитания 1 и Петя не сможет сделать ход.

4. (3 балла) Даны три приведённых квадратных трёхчлена с неотрицательными дискриминантами. Корень из дискриминанта каждого из них является корнем двух оставшихся трёхчленов. Докажите, что какие-то два их этих трёхчленов равны.

Доказательство: Обозначим наши корни из дискриминантов за d_1, d_2, d_3 и пусть, для начала, $d_1 < d_2 < d_3$.

Поскольку разность между корнями трёхчлена — это корень из дискриминанта, разделённый на модуль старшего коэффициента, для трёхчлена с дискриминантом d_2^2 получаем $d_2 = d_3 - d_1$. Аналогично $d_3 = d_2 - d_1$. Но $d_2 < d_3$, а $d_3 - d_1 > d_2 - d_1$. Получаем противоречие, значит, какие-то два дискриминанта совпадают.

Пусть теперь у двух трёхчленов корень из дискриминанта d_1, а у третьего $d_2 \neq d_1$. Тогда каждый из трёхчленов с коэффициентом d_1 имеет корни d_1 и d_2. Значит, учитывая равенство старших коэффициентов, эти трёхчлены равны.

Если же у нас три трёхчлена с одинаковым дискриминантом d^2, то число d по условию является их общим корнем, а второй корень отличается на d. Но чисел, которые отличаются от d на d всего два, это $2d$ и 0, значит, как минимум два трёхчлена совпадают.

5. (3 балла) Докажите, что уравнение $53^x - 16^y = 91$ не имеет решения в натуральных числах.

Доказательство: 53^2 даёт остаток 79 при делении на 91, а 53^2 — остаток 1. 16^2 даёт остаток 74 при делении на 91, а 16^3 — остаток 1. После этого степени зацикливаются.

Значит, равенство возможно только когда x и y делятся на 3, то есть когда в левой части стоит разность кубов. Но разность кубов $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, а второй множитель в этой формуле будет хотя бы $53^2 + 53 \cdot 16 + 16^2 > 91$. Значит, решений действительно нет.

Замечание: задачу также можно решить рассмотрением остатков при делении на делители 91, то есть 13 и 7, однако одного делителя недостаточно, надо рассматривать оба.

6. (3 балла) Окружность пересекает стороны треугольника ABC в шести точках: AB в точках C_1 и C_2, AC в точках B_1 и B_2, BC в точках A_1 и A_2, причём $AC_1 = BC_2 = \frac{1}{4}AB$, $CA_2 = BA_1 = \frac{1}{4}BC$, $AB_2 = CB_1 = \frac{1}{4}AC$. Докажите, что треугольник равносторонний.

Доказательство: У отрезков на одной прямой C_1C_2 и AB — общая середина, значит и серединный перпендикуляр у них тоже общий. Рассуждая аналогично для других сторон треугольника, получаем, что центр окружности, о которой говорится в задаче, и центр описанной окружности треугольника совпадают.

Пусть это точка O, а точка M — середина стороны AB. Тогда по теореме Пифагора $OC_1^2 = MC1^2 + OM^2 = \dfrac{AB^2}{16} + OM^2$, а $OA^2 = AM^2 + OM^2 = \dfrac{AB^2}{4} + OM^2$. Вычитая эти равенства, получаем, что разность квадратов радиусов двух окружностей составляет $\dfrac{3AB^2}{16}$. Аналогично можно получить, что она составляет $\dfrac{3BC^2}{16}$ и $\dfrac{3A^2}{16}$, поэтому треугольник равносторонний.

7. (4 балла) Дан треугольник ABC, в котором $AB = 2$, $BC = 8$, $AC = 8$. Из точки B провели биссектрису, которая пересекла описанную окружность этого треугольника в точке D. Найдите, чем равно DI, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

Ответ: $\dfrac{16}{3}$.

Решение: Согласно лемме о трезубце, $DI = AD$, а по теореме синусов в треугольнике ADB, $AD = \dfrac{AB \sin\angle ABD}{\sin\angle ADB} = \dfrac{AB}{\sin\angle ACB}\sin\angle\frac{ABC}{2}$. Выражая $\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$ через теорему синусов в треугольнике ABC, получаем $AD = \dfrac{AC}{\sin\angle ABC}\sin\angle\frac{ABC}{2} = \dfrac{AC}{2\cos\angle\frac{ABC}{2}} = \dfrac{AC}{\sqrt{2\cos(\angle ABC) + 2}} = \dfrac{8}{\sqrt{2\cdot\frac{1}{8} + 2}} = \dfrac{8}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \dfrac{16}{3}$.

8. (4 балла) На рыцарском турнире каждый рыцарь подарил каждой своей знакомой даме столько цветов, сколько у неё знакомых рыцарей, кроме него. После этого каждый два рыцаря устроили столько поединков, сколько у них общих знакомых дам. Чего было больше: подаренных цветов или устроенных поедников и во сколько раз?

Ответ: Цветов больше в два раза.

Решение: Для каждой тройки, состоящей из дамы и двух её знакомых рыцарей, произойдёт один поединок. Что касается цветов, то первый рыцарь подарит даме один цветок за знакомство со вторым, а второй за знакомство с первым, то есть их будет два.

Открытая олимпиада школьников по математике

12 марта 2017 г.

9 класс

2 вариант

1. (2 балла) Согласно нормативам Международной Федерации Краббинга, поле для краббинга состоит из двух площадок, одна из которых квадратная, а вторая имеет ту же ширину, а длину — от 25 до 30 метров включительно. При этом все размеры должны составлять целое число метров, а общая площадь поля должна находится в диапазоне от 250 до 300 квадратных метров (включительно). Найдите наибольший и наименьший возможные размеры квадратной площадки.

Ответ: Сторона квадрата 7 или 8. Площадь 49 или 64.

Решение:

Обозначим сторону квадрата за x. При минимальной длине прямоугольника и максимальной площади поля мы находим максимальное x и наоборот, при максимальной длине прямоугольника и минимальной площади поля мы находим минимальное x

Решаем уравнение $x^2 - 30x = 250$, получаем $x = -15 + \sqrt{475}$. Это число находится между 6 и 7.

Решаем уравнение $x^2 - 25x = 300$, получаем $x = \dfrac{-25 + \sqrt{1825}}{2}$. Это число находится между 8 и 9.

Нам нужны именно большие корни этих уравнений, так как меньшие отрицательны.

Отсюда получаем, что целое x может находиться среди чисел от 7 до 8 включительно.

2. (2 балла) В карьере находилась куча из 20160000 песчинок. Грузовик за один рейс увозил из карьера количество песчинок, составляющее какую-то степень числа 9 (в том числе, возможно $9^0 = 1$). Мог ли он увести из карьера всю кучу песка ровно за 2000 рейсов?

Ответ: Да.

Решение: $20160000 = 2240000 \cdot 9 = 248888 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 = 27654 \cdot 9^3 + 2 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 = = 3072 \cdot 9^4 + 6 \cdot 9^3 + 2 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 = 341 \cdot 9^5 + 3 \cdot 9^4 + 6 \cdot 9^3 + 2 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 = = 37 \cdot 9^6 + 8 \cdot 9^5 + 3 \cdot 9^4 + 6 \cdot 9^3 + 2 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 = 4 \cdot 9^7 + 1 \cdot 9^6 + 8 \cdot 9^5 + 3 \cdot 9^4 + 6 \cdot 9^3 + 2 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 =$.

Это означает, что мы нашли способ увезти весь песок за 32 поездки. Если одну из них заменить на 9, в которые вывозятся в 9 раз меньше песка, количество поездок увелится на 8. Проделав такую операции 246 раз мы из 32 поездок получим 2000. Очевидно, что эту операцию прибавления 8 поездок всегда можно произвести, так как это нельзя сделать только в том случае, когда в каждой поездки уже вывозится ровно одна песчинка, то есть поездок $20160000 > 2000$.

3. (3 балла) На доске написано число 2016. Петя и Вася играют в следующую игру: за один ход можно вычесть из написанного на доске числа любой его натуральный делитель, кроме него самого, и записать результат этого вычитания на доске вместо исходного числа. Начинает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: Петя

Решение: Невозможно сделать ход только если на доске написана единица. При этом из нечётного числа всегда получается чётное. Петя, получив чётное число, всегда может вычесть 1 и снова получить нечётное. Таким образом, Петя всегда может получать от Васи чётные числа, и отдавать ему нечётные, а Вася наоборот (потому что у него не будет другой возможности). В конце концов Петя получит в результате своего вычитания 1 и Вася не сможет сделать ход.

4. (3 балла) Даны три квадратных трёхчлена со старшими коэффициентами -1 с неотрицательными дискриминантами. Корень из дискриминанта каждого из них является корнем двух оставшихся трёхчленов. Докажите, что какие-то два их этих трёхчленов равны.

Доказательство: Обозначим наши корни из дискриминантов за d_1, d_2, d_3 и пусть, для начала, $d_1 < d_2 < d_3$.

Поскольку разность между корнями трёхчлена — это корень из дискриминанта, разделённый на модуль старшего коэффициента, для трёхчлена с дискриминантом d_2^2 получаем $d_2 = d_3 - d_1$. Аналогично $d_3 = d_2 - d_1$. Но $d_2 < d_3$, а $d_3 - d_1 > d_2 - d_1$. Получаем противоречие, значит, какие-то два дискриминанта совпадают.

Пусть теперь у двух трёхчленов корень из дискриминанта d_1, а у третьего $d_2 \neq d_1$. Тогда каждый из трёхчленов с коэффициентом d_1 имеет корни d_1 и d_2. Значит, учитывая равенство старших коэффициентов, эти трёхчлены равны.

Если же у нас три трёхчлена с одинаковым дискриминантом d^2, то число d по условию является их общим корнем, а второй корень отличается на d. Но чисел, которые отличаются от d на d всего два, это $2d$ и 0, значит, как минимум два трёхчлена совпадают.

5. (3 балла) Докажите, что уравнение $22^x - 79^y = 91$ не имеет решения в натуральных числах.

Доказательство: 22^2 даёт остаток 29 при делении на 91, а 22^3 — остаток 1. 79^2 даёт остаток 53 при делении на 91, а 79^3 — остаток 1. После этого степени зацикливаются.

Значит, равенство возможно только когда x и y делятся на 3, то есть когда в левой части стоит разность кубов. Но разность кубов $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, а второй множитель в этой формуле будет хотя бы $22^2 + 22 \cdot 79 + 79^2 > 91$. Значит, решений действительно нет.

Замечание: задачу также можно решить рассмотрением остатков при делении на делители 91, то есть 13 и 7, однако одного делителя недостаточно, надо рассматривать оба.

6. (3 балла) Окружность пересекает стороны треугольника ABC: AB в точках C_1 и C_2, AC в точках B_1 и B_2, причём $AC_1 = BC_2 = \frac{1}{5}AB$, $CB_2 = AB_1 = \frac{1}{5}AC$. Докажите, что треугольник равнобедренный.

Доказательство: У отрезков на одной прямой C_1C_2 и AB — общая середина, значит и серединный перпендикуляр у них тоже общий. Рассуждая аналогично для других сторон треугольника, получаем, что центр окружности, о которой говорится в задаче, и центр описанной окружности треугольника совпадают.

Пусть это точка O, а точка M — середина стороны AB. $MC_1 = AM - AC_1 = \dfrac{3AB}{10}$. Тогда по теореме Пифагора $OC_1^2 = MC1^2 + OM^2 = \dfrac{9AB^2}{100} + OM^2$, а $OA^2 = AM^2 + OM^2 = \dfrac{AB^2}{4} + OM^2$. Вычитая эти равенства, получаем, что разность квадратов радиусов двух окружностей составляет $\dfrac{16AB^2}{100}$. Аналогично можно получить, что она составляет $\dfrac{16A^2}{100}$, поэтому треугольник равнобедренный.

7. (4 балла) Дан треугольник ABC, в котором $AB = 4$, $BC = 4$, $AC = 1$. Из точки A провели биссектрису, которая пересекла описанную окружность этого треугольника в точке D. Найдите, чем равно DI, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

Ответ: $\dfrac{8}{3}$.

Решение: Согласно лемме о трезубце, $DI = CD$, а по теореме синусов в треугольнике ADC, $CD = \dfrac{AC\sin\angle CAD}{\sin\angle ADC} = \dfrac{AC}{\sin\angle ABC}\sin\angle\frac{CAB}{2}$. Выражая $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$ через теорему синусов в треугольнике ABC, получаем $CD = \dfrac{BC}{\sin\angle CAB}\sin\angle\frac{CAB}{2} = \dfrac{BC}{2\cos\angle\frac{CAB}{2}} = \dfrac{BC}{\sqrt{2\cos(\angle CAB)+2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2\cdot\frac{1}{8}+2}} = \dfrac{4}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \dfrac{8}{3}$.

8. (4 балла) В школе искусства занимались художники и фотографы. Некоторые из них были знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Каждый художник нарисовал парный портрет для каждых двух своих знакомых фотографов. Каждый фотограф сфотографировал каждого из своих знакомых художников по очереди вместе с каждым из его знакомых фотографов (естественно, кроме себя). Чего оказалось больше: картин или фотографий? Во сколько раз?

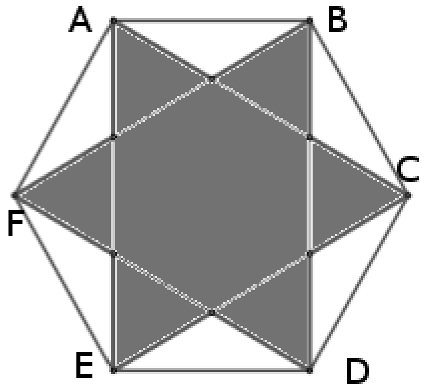
Ответ: Фотографий в два раза больше.

Решение: Для каждой тройки из художника A и двух фотографов B и C можно найти фотографию A и C, сделанную B, фотографию B и A, сделанную C и портрет B и C, написанный A. Получается, что фотографий в два раза больше.

VIII. Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады для 9 класса

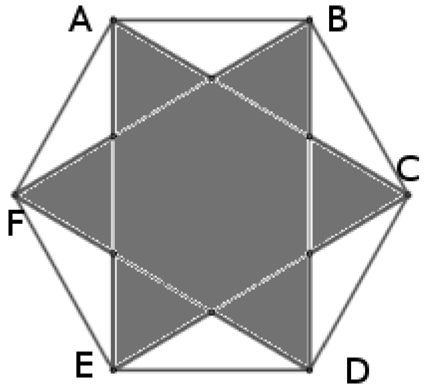
Задача 1. (2 балла)

1. Дан правильный шестиугольник ABCDEF, со стороной $2\sqrt[4]{75}$. Найдите площадь объединения треугольников ACE и BDF.



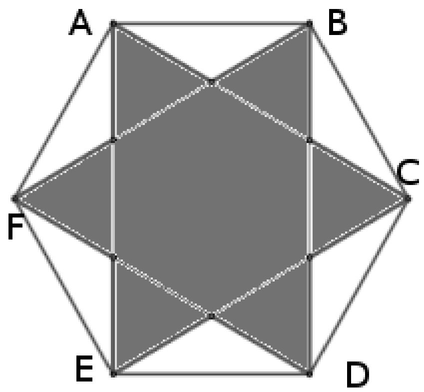
Ответ: 60

2. Дан правильный шестиугольник ABCDEF, со стороной $5\sqrt[4]{12}$. Найдите площадь объединения треугольников ACE и BDF.



Ответ: 150

3. Дан правильный шестиугольник ABCDEF, со стороной $10\sqrt[4]{27}$. Найдите площадь объединения треугольников ACE и BDF.



Ответ: 900

__Примеры записи ответов:__
14
1/4

1,4

Задача 2. (2 балла)

1. Из 100 прямоугольных треугольников с катетами 1 и 2 составили прямоугольник. Какое наибольшее значение может принимать его периметр?

Ответ: 202

2. Из 50 прямоугольных треугольников с катетами 1 и 3 составили прямоугольник. Какое наибольшее значение может принимать его периметр?

Ответ: 152

3. Из 60 прямоугольных треугольников с катетами 2 и 3 составили прямоугольник. Какое наибольшее значение может принимать его периметр?

Ответ: 184

Примеры записи ответов:
14
1/4
1,4

Задача 3. (3 балла)

1. В квадратном трёхчлене поменяли местами первый и второй коэффициенты, после чего результат сложили с исходным трёхчленом. Получился третий квадратный трёхчлен, у которого оказался единственный корень. Чему он может быть равен? Если правильных ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: -1/2 || -0,5

2. В квадратном трёхчлене поменяли местами первый коэффициент и свободный член, после чего результат сложили с исходным трёхчленом. Получился третий квадратный трёхчлен, у которого оказался единственный корень. Чему он может быть равен? Если правильных ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: -1, 1 || 1, -1 || 1; -1 || -1; 1

3. В квадратном трёхчлене поменяли местами второй коэффициент и свободный член, после чего результат сложили с исходным трёхчленом. Получился третий квадратный трёхчлен, у которого оказался единственный корень. Чему он может быть равен? Если правильных ответов несколько, перечислите их через точку с запятой.

Ответ: 0; -2 || 0, -2 || -2; 0

Примеры записи ответов:
14
1/4
0,25; 0,5

Задача 4. (3 балла)

1. Дан треугольник ABC: AK, BL – биссектрисы, M – точка их пересечения. Оказалось, что треугольник AMC – равнобедренный, один из углов которых равен 150 градусам. Найдите, чему может быть равен периметр треугольника ABC, если известно, что AL = $2\sqrt{3}-3$.

Ответ: 2

2. Дан треугольник ABC: AK, CL – биссектрисы, M – точка их пересечения. Оказалось, что треугольник AMB – равнобедренный, один из углов которых равен 135 градусам. Найдите, чему может быть равен периметр треугольника ABC, если известно, что AL = $3\sqrt{2}-3$.

Ответ: 6

3. Дан треугольник ABC: BK, CL – биссектрисы, M – точка их пересечения. Оказалось, что треугольник AMC – равнобедренный, один из углов которых равен 150 градусам. Найдите, чему может быть равен периметр треугольника ABC, если известно, что BK = $4-2\sqrt{3}$.

Ответ: 4

<u>Примеры записи ответов:</u>
14
1/4
0,25

Задача 5. (3 балла)

1. Найдите количество решений в натуральных числах уравнения $(x - 10)^2 - 15 = (y - 6)^2$.

Ответ: 6

2. Найдите количество решений в натуральных числах уравнения $(x - 6)^2 - 21 = (y - 3)^2$.

Ответ: 5

3. Найдите количество решений в натуральных числах уравнения $(x - 4)^2 - 35 = (y - 3)^2$.

Ответ: 3

<u>Примеры записи ответов:</u>
14

Задача 6. (3 балла)

1. В волшебной стране некоторые города соединены дорогами так, что из любого города можно попасть в любой другой город, возможно через какие-то ещё города. Никакие два города не соединены напрямую более чем одной дорогой.
Назовем дорогу особенной, если при ее закрытии из какого-то города нельзя будет доехать до какого-то другого. Известно, что в стране всего дорог 23, из которых 19 дорог особенные. Сколько городов может быть в стране? Если правильных ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.
Ответ: 23

2. В сказочной стране некоторые города соединены дорогами так, что из любого города можно попасть в любой другой город, возможно через какие-то ещё города. Никакие два города не соединены напрямую более чем одной дорогой.
Назовем дорогу удивительной, если при ее закрытии из какого-то города нельзя будет доехать до какого-то другого. Известно, что в стране всего дорог 32, из которых 29 дорог удивительные. Сколько городов может быть в стране? Если правильных ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: 32

3. В Стране Чудес некоторые города соединены дорогами так, что из любого города можно попасть в любой другой город, возможно через какие-то ещё города. Никакие два города не соединены напрямую более чем одной дорогой.
Назовем дорогу странной, если при ее закрытии из какого-то города нельзя будет доехать до какого-то другого. Известно, что в стране всего дорог 45, из которых 42 дороги странные. Сколько городов может быть в стране? Если правильных ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: 45.

Примеры записи ответов:
14

Задача 7. (3 балла)

1. Натуральные числа a и b таковы, что 2 НОК(a, b) + 3 НОД(a, b) = 100. Найдите наибольшее возможное значение числа a.

Ответ: 44

1. Натуральные числа a и b таковы, что 4 НОК(a, b) + 5 НОД(a, b) = 100. Найдите наибольшее возможное значение числа a.

Ответ: 20

1. Натуральные числа a и b таковы, что 5 НОК(a, b) + 2 НОД(a, b) = 120. Найдите наибольшее возможное значение числа a.

Ответ: 20

Примеры записи ответов:
14

Задача 8. (3 балла)

1. На съезде киллеров собрались 500 участников, каждый из них получил регистрационный номер от 1 до 500. К концу съезда оказалось, что все киллеры, кроме номера 1, убиты. Известно, что каждый киллер мог убивать только киллеров с большими номерами, причём количество его жертв не могло превышать его номера. Какое наименьшее количество киллеров могли участвовать в убийствах на съезде?

Ответ: 9

2. На съезде киллеров собрались 250 участников, каждый из них получил регистрационный номер от 1 до 250. К концу съезда оказалось, что все киллеры, кроме номера 1, убиты. Известно, что каждый киллер мог убивать только киллеров с большими номерами, причём количество его жертв не могло превышать его номера. Какое наименьшее количество киллеров могли участвовать в убийствах на съезде?

Ответ: 8

3. На съезде киллеров собрались 1000 участников, каждый из них получил регистрационный номер от 1 до 1000. К концу съезда оказалось, что все киллеры, кроме номера 1, убиты. Известно, что каждый киллер мог убивать только киллеров с большими номерами, причём количество его жертв не могло превышать его номера. Какое наименьшее количество киллеров могли участвовать в убийствах на съезде?

Ответ: 10

<u>Примеры записи ответов:</u>
5

Задача 9. (4 балла)

1. Натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_9$ таковы, что $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_9}=2$. Какое минимальное значения может принимать сумма этих чисел?

Ответ: 41

2. Натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ таковы, что $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{11}}=2$. Какое минимальное значения может принимать сумма этих чисел?

Ответ: 61

3. Натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{13}$ таковы, что $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{13}}=2$. Какое минимальное значения может принимать сумма этих чисел?

Ответ: 85

<u>Примеры записи ответов:</u>
14

Задача 10. (5 баллов)

1. На клетчатой доске 6х6 стоят фишки. Оказалось, что для каждого числа *n* от 0 до 7 есть фишка, в одном столбце и в одной строке с которой стоят в сумме ровно *n* фишек (не считая её самой). Какое минимальное количество фишек может стоять на доске?

Ответ: 13

2. На клетчатой доске 6х6 стоят фишки. Оказалось, что для каждого числа n от 1 до 9 есть фишка, в одном столбце и в одной строке с которой стоят в сумме ровно n фишек (не считая её самой). Какое минимальное количество фишек может стоять на доске?

Ответ: 18

3. На клетчатой доске 6х6 стоят фишки. Оказалось, что для каждого числа n от 2 до 10 есть фишка, в одном столбце и в одной строке с которой стоят в сумме ровно n фишек (не считая её самой). Какое минимальное количество фишек может стоять на доске?

Ответ: 19

<u>Примеры записи ответов:</u>
14

IX. Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады для 9 класса

Задача 1. (2 балла)

1. На плоскости даны три точки A(1,2), B(600,601), C(800,1). Найдите количество целочисленных точек на сторонах треугольника ABC.

Ответ: 800

2. На плоскости даны три точки A(1,2), B(303,304), C(404,1). Найдите количество целочисленных точек на сторонах треугольника ABC.

Ответ: 404

3. На плоскости даны три точки A(1,2), B(450,451), C(600,1). Найдите количество целочисленных точек на сторонах треугольника ABC.

Ответ: 600

Примеры записи ответа:
17

Задача 2. (2 балла)

1. Четыре различных нечётных числа a, b, c, d, больших единицы, таковы, что НОД(a, b) = НОД(c, d) и НОК(a, b) = НОК(c, d). Какое наименьшее значение может принимать $a + b + c + d$?

Ответ: 48

2. Четыре различных числа a, b, c, d, больших единицы и не делящихся на 3, таковы, что НОД(a, b) = НОД(c, d) и НОК(a, b) = НОК(c, d). Какое наименьшее значение может принимать $a + b + c + d$?

Ответ: 36

3. Четыре различных числа a, b, c, d, больших единицы и не делящихся на 5, таковы, что НОД(a, b) = НОД(c, d) и НОК(a, b) = НОК(c, d). Какое наименьшее значение может принимать $a + b + c + d$?

Ответ: 24

Примеры записи ответа:
17

Задача 3. (3 балла)

1. В компьютерной игре черепашка движется по заданной программе по клетчатому экрану компьютера, содержащему 5 столбиков и 7 строчек. Изначально она находится в левом нижнем углу экрана — на клетке, заданной координатами (0, 0). Если согласно программе черепашка должна выйти за пределы экрана, она появляется с другой стороны — например, сделав один шаг наверх с клетки (3, 6) черепашка окажется в клетке (3, 0). Где окажется черепашка после выполнения следующей программы:

1) 1 шаг вниз; 2) 2 шага вправо; 3) 3 шага вверх; 4) 4 шага влево; 5) 5 шагов вниз; 6) 6 шагов вправо; … ; 2016) 2016 шагов влево; 2017) 2017 шагов вниз?

Ответ: (2; 6) || (2, 6) || 2; 6 || 2, 6

2. В компьютерной игре черепашка движется по заданной программе по клетчатому экрану компьютера, содержащему 11 столбиков и 5 строчек. . Изначально она находится в левом нижнем углу экрана — на клетке, заданной координатами (0, 0). Если согласно программе черепашка должна выйти за пределы экрана, она появляется с другой стороны — например, сделав один шаг наверх с клетки (3, 4) черепашка окажется в клетке (3, 0). Где окажется черепашка после выполнения следующей программы:
1) 1 шаг вниз; 2) 2 шага вправо; 3) 3 шага вверх; 4) 4 шага влево; 5) 5 шагов вниз; 6) 6 шагов вправо; … ; 2016) 2016 шагов влево; 2017) 2017 шагов вниз?

Ответ: (4; 1) || (4, 1) || 4; 1 || 4, 1

3. 1. В компьютерной игре черепашка движется по заданной программе по клетчатому экрану компьютера, содержащему 5 столбиков и 9 строчек. . Изначально она находится в левом нижнем углу экрана — на клетке, заданной координатами (0, 0). Если согласно программе черепашка должна выйти за пределы экрана, она появляется с другой стороны — например, сделав один шаг наверх с клетки (3, 8) черепашка окажется в клетке (3, 0). Где окажется черепашка после выполнения следующей программы:
1) 1 шаг вверх; 2) 2 шага вправо; 3) 3 шага вниз; 4) 4 шага влево; 5) 5 шагов вверх; 6) 6 шагов вправо; … ; 2016) 2016 шагов влево; 2017) 2017 шагов вверх?

Ответ: (2; 1) || (2, 1) || 2; 1 || 2, 1
Примеры записи ответа:
(1; 7)

Задача 4. (3 балла)

1. 107-угольник вписан в окружность с диаметром XY = 2 и имеет ось симметрии, перпендикулярную этому диаметру. Найдите сумму квадратов расстояний от вершин 107-угольника до точки X.

Ответ: 214

2. 105-угольник вписан в окружность с диаметром XY = 6 и имеет ось симметрии, перпендикулярную этому диаметру. Найдите сумму квадратов расстояний от вершин 105-угольника до точки X.

Ответ: 1890

3. 103-угольник вписан в окружность с диаметром XY = 4 и имеет ось симметрии, перпендикулярную этому диаметру. Найдите сумму квадратов расстояний от вершин 103-угольника до точки X.

Ответ: 824

Примеры записи ответа:
1,7
1/7

17

Задача 5. (3 балла)

1. В клетчатой таблице 9x9 стоят числа таким образом, что в числа в каждой строчке и в каждом столбце образуют арифметическую прогрессию в том порядке, в котором они там написаны. Таблица раскрашена в два цвета в шахматном порядке. На угловых белых клетках таблицы стоят числа 1, 3, 5 и 9. Найдите сумму чисел на чёрных клетках таблицы.

Ответ: 180

2. В клетчатой таблице 11x11 стоят числа таким образом, что в числа в каждой строчке и в каждом столбце образуют арифметическую прогрессию в том порядке, в котором они там написаны. Таблица раскрашена в два цвета в шахматном порядке. На угловых белых клетках таблицы стоят числа 1, 2, 4 и 7. Найдите сумму чисел на чёрных клетках таблицы.

Ответ: 210

1. В клетчатой таблице 13x13 стоят числа таким образом, что в числа в каждой строчке и в каждом столбце образуют арифметическую прогрессию в том порядке, в котором они там написаны. Таблица раскрашена в два цвета в шахматном порядке. На угловых белых клетках таблицы стоят числа 1, 2, 3 и 6. Найдите сумму чисел на чёрных клетках таблицы.

Ответ: 252

<u>Примеры записи ответа:</u>
1,7
1/7
-17

Задача 6. (3 балла)

1. Дано 70 квадратных трёхчленов. Графики этих трёхчленов имеют вершины на оси x. Никакие три графика не пересекаются в одной точке. Какое наименьшее количество точек пересечения они могут образовывать?

Ответ: 1190

2. Дано 60 квадратных трёхчленов. Графики этих трёхчленов имеют вершины на оси x. Никакие три графика не пересекаются в одной точке. Какое наименьшее количество точек пересечения они могут образовывать?

Ответ: 870

1. Дано 50 квадратных трёхчленов. Графики этих трёхчленов имеют вершины на оси x. Никакие три графика не пересекаются в одной точке. Какое наименьшее количество точек пересечения они могут образовывать?

Ответ: 600

<u>Примеры записи ответа:</u>
17

Задача 7. (4 балла)

1. Окружность радиуса 60 касается трёх сторон четырёхугольника ABCD: стороны AB в точке A, стороны CD в точке D и стороны BC в точке X. Оказалось, что BX = 30, CX = 20. Найдите площадь четырёхугольника.

Ответ: 1200

2. Окружность радиуса 60 касается трёх сторон четырёхугольника ABCD: стороны AB в точке A, стороны CD в точке D и стороны BC в точке X. Оказалось, что BX = 45, CX = 30. Найдите площадь четырёхугольника.

Ответ: 3060

3. Окружность радиуса 60 касается трёх сторон четырёхугольника ABCD: стороны AB в точке A, стороны CD в точке D и стороны BC в точке X. Оказалось, что BX = 20, CX = 45. Найдите площадь четырёхугольника.

Ответ: 2215,2

Примеры записи ответа:
1,7
1/7
17

Задача 8. (4 балла)

1. В американской деревне жили бледнолицые, чернокожие и индейцы, всего 61 человек. На Хэллоуин каждый индеец подарил тыкву каждому чернокожему, каждый чернокожий подарил тыкву каждому бледнолицему, каждый бледнолицый подарил тыкву каждому индейцу. Какое наибольшее количество тыкв могло быть подарено?

Ответ: 1240

2. В школе было три класса: математический, гуманитарный и общеобразовательный, всего 91 человек. На Новый Год каждый ученик математического класса послал открытку каждому ученику гуманитарного, каждый ученик гуманитарного класса послал открытку каждому ученику общеобразовательного, каждый ученик общеобразовательного класса послал открытку каждому ученику математического. Какое наибольшее количество открыток могло быть послано?

Ответ: 2760

3. На рок-фестивале встретились вокалисты, гитаристы и ударники, всего 121 человек. Каждый вокалист дал подзатыльник каждому гитаристу, каждый гитарист — каждому ударнику, а каждый ударник — каждому вокалисту. Какое наибольше количество подзатыльников могло быть получено участниками фестиваля?

Ответ: 4880.

Примеры записи ответа:
17

Задача 9. (4 балла)

1. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 составили все возможные семизначные числа, у которых все цифры различные. Полученные числа записали в порядке возрастания. Найдите, какое число будет стоять на 2016 месте.

Ответ: 3657421

2. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 составили все возможные семизначные числа, у которых все цифры различные. Полученные числа записали в порядке возрастания. Найдите, какое число будет стоять на 1995 месте.

Ответ: 3651427

3. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 составили все возможные семизначные числа, у которых все цифры различные. Полученные числа записали в порядке возрастания. Найдите, какое число будет стоять на 1972 месте.

Ответ: 3641572

Примеры записи ответа:
1234567

Задача 10. (4 балла)

1. Дан куб и 11 красок. Найдите количество способов раскрасить грани этого куба с помощью этих красок (каждую грань — в один цвет) так, чтобы соседние грани были разных цветов. Раскраски, отличающиеся поворотом, считаются различными.

Ответ: 523710

2. Дан куб и 10 красок. Найдите количество способов раскрасить грани этого куба с помощью этих красок (каждую грань — в один цвет) так, чтобы соседние грани были разных цветов. Раскраски, отличающиеся поворотом, считаются различными.

Ответ: 257760

3. Дан куб и 12 красок. Найдите количество способов раскрасить грани этого куба с помощью этих красок (каждую грань — в один цвет) так, чтобы соседние грани были разных цветов. Раскраски, отличающиеся поворотом, считаются различными.

Ответ: 987360

Примеры записи ответа:
1,7
1/7
17

X. Задания заключительного этапа олимпиады для 8 класса

Открытая олимпиада школьников по математике

12 марта 2017 г.

8 класс

Решения

1 вариант

1. (2 балла) Существует ли натуральное четырёхзначное натуральное число с суммой цифр 21, которое делится на 14?

Ответ: Да, например 6384.

2. (2 балла) Мальчики собирали яблоки. Каждый собрал либо 10 яблок, либо 10% от общего количества собранных яблок, причём были и те, и другие. Какое наименьшее количество мальчиков могло быть?

Ответ: 6

Решение: Пример: один мальчик собрал 10 яблок, остальные по 2, всего 20.

Оценка: докажем, что меньшего количества мальчиков быть не могло. Мы знаем, что 10% от общего количества яблок — целое число, обозначим его за k. Пусть n человек собрали по десять яблок, m человек по 10%, тогда $10n = (10-m)k$, то есть $10n$ делится на $10-m$. При $m=1$ или $m=3$ получаем, что $10n$ делится на 9 или 7 соответственно, значит n делится на 9 или 7, то есть слишком большое. При $m=2$ или $m=4$ получаем, что $10n$ делится на 8 или 6 соответственно, значит n делится на 4 или 3, и $m+n \geqslant 6$. При $m \geqslant 5$ общее количество мальчиков хотя бы на 1 больше, то есть, опять же, хотя бы 6.

3. (3 балла) Решите систему уравнений: $\begin{cases} xy = 6(x+y) \\ xz = 4(x+z) \\ yz = 2(y+z) \end{cases}$

Ответ: $x=y=z=0$ или $x=-24$, $y=\frac{24}{5}$, $y=\frac{24}{7}$

Решение: Легко убедиться, что если одна из переменных равна 0, то остальные тоже равны 0. В противном случае, систему можно преобразовать в

$$\begin{cases} \frac{1}{6} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \\ \frac{1}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{y} \end{cases}$$

Складывая два первых уравнения и вычитая последнее, получаем $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{2}{x}$, откуда $-\frac{1}{12} = \frac{2}{x}$, то есть $x = -24$. Аналогично находим остальные неизвестные.

4. (3 балла) Даны три квадратных уравнения со старшим коэффициентом 3 и различными неотрицательными дискриминантами. Может ли дискриминант каждого из них являться корнем двух оставшихся уравнений?

Ответ: Нет.

Решение: Действительно, обозначим наши дискриминанты за d_1, d_2, d_3 и пусть $d_1 < d_2 < d_3$.

Поскольку разность между корнями уравнения — это корень из дискриминанта, разделённый на старший коэффициент, для уравнения с дискриминантов d_2 получаем $\dfrac{\sqrt{d_2}}{3} = d_3 - d_1$. Аналогично $\dfrac{\sqrt{d_3}}{3} = d_2 - d_1$. Но $\dfrac{\sqrt{d_2}}{3} < \dfrac{\sqrt{d_3}}{3}$, а $d_3 - d_1 > d_2 - d_1$. Получаем противоречие, значит, таких уравнений не существует.

5. (3 балла) Дан ребус: МИМИМИ + НЯНЯНЯ = ОЛАЛАОЙ. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Найдите МИ + НЯ.

Ответ: 119

Решение: Ребус можно переписать как ОЛАЛАОЙ =(МИ + НЯ)$\cdot$10101. Во-первых, это значит, что последняя цифра МИ + НЯ — это Й. Во-вторых, если МИ + НЯ <100, результат будет четырёхзначным. Пусть МИ + НЯ = 1ZЙ, где Z — какая-то цифра.

Тогда ОЛАЛАОЙ = 1ZЙ0000 + 1ZЙ00 + 1ZЙ. Если Й <9, то шестая и четвёртая цифры этого числа должны совпадать, но они не совпадают. Значит, Й$=9$. Следовательно, И + Я = 9. Цифра Z — это на самом деле О, то есть 1. Получается, МИ + НЯ = 119

Пример существует: $848484 + 353535 = 1202019$.

6. (3 балла) Четырёхугольник разбит на 1000 треугольников. В каком наибольшем количестве различных точек могут находиться вершины этих треугольников?

Ответ: 1002

Решение: Сумма углов четырёхугольника 360°, тысячи треугольников — 180000°. Откуда взялись лишние 1796400°? Каждая внутренняя вершина, в которой сходятся только углы треугольников, добавляет 360°. Каждая вершина на стороне исходного треугольника или на стороне одного из треугольников разбиения добавляет 180°. Для достижения максимума необходимо, чтобы были точки только второго типа и их было $179640 : 180 = 998$. Пример строится последовательным добавлением новых точек на границы исходного четырёхугольника и построенных ранее треугольников.

Добавляя три вершины исходного четырёхугольника, получаем ответ 1002.

7. (4 балла) Дан прямоугольный треугольник ABC, у которого угол A равен 60 градусам, а гипотенуза AB равна $4+4\sqrt{3}$. Через вершину B провели прямую p параллельную AC. На прямой p поставили точки D и E таким образом, что $AB = BD$, $BC = BE$. F — точка пересечения прямых AD и CE. Найдите, чему может быть равен периметр треугольника DEF.

Ответы:

$$4\sqrt{2}+2\sqrt{6}+18+10\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3}+2+2\sqrt{2}$$

$$18+10\sqrt{3}+4\sqrt{6}+6\sqrt{2}$$

$$2+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$$

Решение: Сначала вычислим стороны треугольника ABC: сторона AC лежит напротив угла $30°$, значит, равна половине гипотенузы, то есть $2+2\sqrt{3}$. Теперь по теореме Пифагора вычислим $BC=\sqrt{(4+4\sqrt{3})^2-(2+2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16+32\sqrt{3}+48-4-8\sqrt{3}-12}=\sqrt{36+24\sqrt{3}+12}=6+2\sqrt{3}$.

Треугольник CBE прямоугольный равнобедренный с прямым углом B, следовательно, прямая CE пересекает p под углом $45°$. Треугольник ABD равнобедренный с углом при вершине B равным $120°$ или $60°$ в зависимости от расположения точки D. Значит, прямая AD пересекает p под углом $60°$ или $30°$.

В зависимости от расположения точек D и E на прямой p треугольник DEF имеет углы 30, 45 и 105; 30, 135 и 15; 60, 45 и 75; 120, 45 и 15 градусов.

Рассмотрим высоту FH в треугольнике DEF. Из величины угла E следует, что $EH=FH$.

В прямоугольном треугольнике с углами $60°$ и $30°$ катеты отличаются в $\sqrt{3}$ раз, а треугольник DFH именно такой. Значит, в первых двух вариантах $DH=\sqrt{3}FH$, а в оставшихся двух $DH=\dfrac{FH}{\sqrt{3}}$. Таким образом, $DE=|DH\pm EH|$ (знак минус появляется в тупоугольном треугольнике DEF с тупым углом при вершине D или E), то есть когда точки DE лежат по одну сторону от B) и, следовательно, $DE=FH|\sqrt{3}\pm 1|$ или $DE=FH\left|1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|$. Выразим отсюда FH через DE. Сторона $EF=\sqrt{2}$ как гипотенуза в прямоугольном равнобедренном треугольнике EFH, а в прямоугольном треугольнике DFH гипотенуза вдвое больше меньшего катета.

Посчитаем теперь искомый периметр в каждом случае отдельно.

Углы 30, 45 и 105 градусов. Точки DE лежат по разные стороны от точки B и $DE=BD+BE=AB+BC=6\sqrt{3}+10$. $FH=\dfrac{DE}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{6\sqrt{3}+10}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{1}{2}(6\sqrt{3}+10)(\sqrt{3}-1)=4+2\sqrt{3}$, тогда $EF=4\sqrt{2}+2\sqrt{6}$ и $DF=2FH=8+4\sqrt{3}$. Получаем периметр, равный $4\sqrt{2}+2\sqrt{6}+18+10\sqrt{3}$.

Углы 30, 135 и 15 градусов. Точки DE лежат по одну сторону от точки B и $DE=BD-BE=AB-BC=2\sqrt{3}-2$. $FH=\dfrac{DE}{\sqrt{3}-1}=2$, тогда $EF=2\sqrt{2}$ и $DF=2FH=4$. Получаем периметр, равный $2\sqrt{3}+2+2\sqrt{2}$.

Углы 60, 45 и 75; градусов. Точки DE лежат по разные стороны от точки B и $DE=BD+BE=AB+BC=6\sqrt{3}+10$. $FH=\dfrac{DE}{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{DE}{\sqrt{3}+1}=4\sqrt{3}+6$, тогда $EF=4\sqrt{6}+6\sqrt{2}$ и $DF=\dfrac{2}{\sqrt{3}}FH=8+4\sqrt{3}$. Получаем периметр, равный $18+10\sqrt{3}+4\sqrt{6}+6\sqrt{2}$.

Углы 120, 45 и 15 градусов. Точки DE лежат по одну сторону от точки B и $DE=BD-BE=AB-BC=2\sqrt{3}-2$. $FH=\dfrac{DE}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{DE}{\sqrt{3}-1}=2\sqrt{3}$, тогда $EF=2\sqrt{6}$, и $DF=\dfrac{2}{\sqrt{3}}FH=4$. Получаем периметр, равный $2+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.

8. (5 баллов) На острове Глазном живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Кроме того, все жители острова либо синеглазые, либо кареглазые. Однажды встретились 100 жителей острова, после чего каждый сказал каждому одну из двух фраз: "Ты лжец" или "Ты синеглазый", причём фраз "Ты лжец" было больше половины. Какое количество кареглазых могло быть на острове? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: Ответ от 46 до 54.

Решение: Заметим, что на встрече не могло быть кареглазых рыцарей и синеглазых лжецов, так как первым не может сказать указанную фразу ни один рыцарь, а вторым — ни один лжец. Значит, островитяне на встрече делятся на синеглазых рыцарей и кареглазых лжецов. Но тогда фразу "Ты лжец" говорили друг другу люди с разным цветом глаз, а фразу "Ты синеглазый" — с одинаковым.

Пусть синеглазых рыцарей $50+k$, а кареглазых лжецов $50-k$. Мы можем ввести такие обозначения, так как сумма этих чисел 100. При этом k целое, но не обязательно натуральное число.

Тогда общее количество фраз "Ты лжец" составляет $2(50+k)(50-k)=2\cdot 50^2-2k^2$. Мы знаем, что количество этих фраз больше половины, то есть больше, чем $100\cdot 99/2=4950$. Итак, $5000-2k^2>4950$, откуда $2k^2<50$, то есть $|k|<5$. Значит, количество лжецов отличается от 50 не более чем на 4, то есть находится в диапазоне от 46 до 54, причём все ситуации, очевидно, возможны.

2 вариант

1. (2 балла) Существует ли натуральное четырёхзначное натуральное число с суммой цифр 14, которое делится на 14?

Ответ: Да, например 6314.

2. (2 балла) Мальчики собирали яблоки. Каждый собрал либо 20 яблок, либо 20% от общего количества собранных яблок, причём были и те, и другие. Какое наименьшее количество мальчиков могло быть?

Ответ: 2

Решение: Пример: один мальчик собрал 5 яблок, второй 20.

Оценка: по условию ребят хотя бы двое.

3. (3 балла) Решите систему уравнений: $\begin{cases} xy = 5(x+y) \\ xz = 4(x+z) \\ yz = 2(y+z) \end{cases}$

Ответ: $x = y = z = 0$ или $x = -40$, $y = \frac{40}{9}$, $y = \frac{40}{11}$

Решение: Легко убедиться, что если одна из переменных равна 0, то остальные тоже равны 0. В противном случае, систему можно преобразовать в

$\begin{cases} \frac{1}{5} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \\ \frac{1}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{y} \end{cases}$

Складывая два первых уравнения и вычитая последнее, получаем $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{2}{x}$, откуда $-\frac{1}{20} = \frac{2}{x}$, то есть $x = -40$. Аналогично находим остальные неизвестные.

4. (3 балла) Даны три квадратных уравнения со старшим коэффициентом 2 и различными неотрицательными дискриминантами. Может ли дискриминант каждого из них являться корнем двух оставшихся уравнений?

Ответ: Нет.

Решение: Действительно, обозначим наши дискриминанты за d_1, d_2, d_3 и пусть $d_1 < d_2 < d_3$.

Поскольку разность между корнями уравнения — это корень из дискриминанта, разделённый на старший коэффициент, для уравнения с дискриминантов d_2 получаем $\dfrac{\sqrt{d_2}}{2} = d_3 - d_1$. Аналогично $\dfrac{\sqrt{d_3}}{2} = d_2 - d_1$. Но $\dfrac{\sqrt{d_2}}{2} < \dfrac{\sqrt{d_3}}{2}$, а $d_3 - d_1 > d_2 - d_1$. Получаем противоречие, значит, таких уравнений не существует.

5. (3 балла) Дан ребус: ЛЯЛЯЛЯ + ФУФУФУ = ГГЫГЫЫР. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Найдите ЛЯ + ФУ.

Ответ: 109

Решение: Ребус можно переписать как ГГЫГЫЫР $=($ ЛЯ + ФУ $)\cdot 10101$. Во-первых, это значит, что последняя цифра ЛЯ + ФУ — это Р. Во-вторых, если ЛЯ + ФУ < 100, результат будет четырёхзначным. Пусть ЛЯ + ФУ = $1Z$Р, где Z — какая-то цифра.

Тогда ОЛАЛАОЙ = $1Z$Р$0000 + 1Z$Р$00 + 1Z$Р. Если Р < 9, то шестая и четвёртая цифры этого числа должны совпадать, но они не совпадают. Значит, Р $= 9$ и четвёртая цифра (Г) больше шестой (Ы) на единицу из-за образовавшегося переноса из пятого разряда в четвёртый.

Следовательно, Я + У $= 9$. Цифра Z — это на самом деле Ы, то есть Г $-1 = 0$. Получается, ЛЯ + ФУ $= 109$.

Пример существует, действительно $757575 + 343434 = 1101009$.

6. (3 балла) Четырёхугольник разбит на 1000 треугольников. В каком наименьшем количестве различных точек могут находиться вершины этих треугольников?

Ответ: 503

Решение: Сумма углов четырёхугольника 360°, тысячи треугольников — 180000°. Откуда взялись лишние 1796400°? Каждая внутренняя вершина, в которой сходятся только углы треугольников, добавляет 360°. Каждая вершина на стороне исходного треугольника или на стороне одного из треугольников разбиения добавляет 180°. Для достижения минимума необходимо, чтобы были точки только первого типа и их было $179640 : 360 = 499$. Пример строится последовательным добавлением новых точек внутрь (не на границу) уже имеющихся треугольников.

Добавляя четыре вершины исходного четырёхугольника, получаем ответ 503.

7. (4 балла) Дан прямоугольный треугольник ABC, у которого угол A равен 60 градусам, а гипотенуза AB равна $2+2\sqrt{3}$. Через вершину B провели прямую p параллельную AC. На прямой p поставили точки D и E таким образом, что $AB = BD$, $BC = BE$. F — точка пересечения прямых AD и CE. Найдите, чему может быть равен периметр треугольника DEF.

Ответы:

$$2\sqrt{2} + \sqrt{6} + 9 + 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2}$$

$$9 + 5\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$$

$$1+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

Решение: Сначала вычислим стороны треугольника ABC: сторона AC лежит напротив угла 30°, значит, равна половине гипотенузы, то есть $1+\sqrt{3}$. Теперь по теореме Пифагора вычислим $BC=\sqrt{(2+2\sqrt{3})^2-(1+1\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+8\sqrt{3}+12-1}$
$\sqrt{9+6\sqrt{3}+3}=6+2\sqrt{3}$.

Треугольник CBE прямоугольный равнобедренный с прямым углом B, следовательно, прямая CE пересекает p под углом 45°. Треугольник ABD равнобедренный с углом при вершине B равным 120° или 60° в зависимости от расположения точки D. Значит, прямая AD пересекает p под углом 60° или 30°.

В зависимости от расположения точек D и E на прямой p треугольник DEF имеет углы 30, 45 и 105; 30, 135 и 15; 60, 45 и 75; 120, 45 и 15 градусов.

Рассмотрим высоту FH в треугольнике DEF. Из величины угла E следует, что $EH=FH$.

В прямоугольном треугольнике с углами 60° и 30° катеты отличаются в $\sqrt{3}$ раз, а треугольник DFH именно такой. Значит, в первых двух вариантах $DH=\sqrt{3}FH$, а в оставшихся двух $DH=\dfrac{FH}{\sqrt{3}}$. Таким образом, $DE=|DH\pm EH|$ (знак минус появляется в тупоугольном треугольнике DEF с тупым углом при вершине D или E), то есть когда точки DE лежат по одну сторону от B) и, следовательно, $DE=FH|\sqrt{3}\pm 1|$ или $DE=FH\left|1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|$. Выразим отсюда FH через DE. Сторона $EF=\sqrt{2}$ как гипотенуза в прямоугольном равнобедренном треугольнике EFH, а в прямоугольном треугольнике DFH гипотенуза вдвое больше меньшего катета.

Посчитаем теперь искомый периметр в каждом случае отдельно.

Углы 30, 45 и 105 градусов. Точки DE лежат по разные стороны от точки B и $DE=BD+BE=AB+BC=3\sqrt{3}+5$. $FH=\dfrac{DE}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{3\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{1}{2}(3\sqrt{3}+5)(\sqrt{3}-1)=2+\sqrt{3}$, тогда $EF=2\sqrt{2}+\sqrt{6}$ и $DF=2FH=4+2\sqrt{3}$. Получаем периметр, равный $2\sqrt{2}+\sqrt{6}+9+5\sqrt{3}$.

Углы 30, 135 и 15 градусов. Точки DE лежат по одну сторону от точки B и $DE=BD-BE=AB-BC=\sqrt{3}-1$. $FH=\dfrac{DE}{\sqrt{3}-1}=1$, тогда $EF=\sqrt{2}$ и $DF=2FH=2$. Получаем периметр, равный $\sqrt{3}+1+\sqrt{2}$.

Углы 60, 45 и 75; градусов. Точки DE лежат по разные стороны от точки B и $DE=BD+BE=AB+BC=3\sqrt{3}+5$. $FH=\dfrac{DE}{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{DE}{\sqrt{3}+1}=2\sqrt{3}+3$, тогда $EF=2\sqrt{6}+3\sqrt{2}$ и $DF=\dfrac{2}{\sqrt{3}}FH=4+2\sqrt{3}$. Получаем периметр, равный $9+5\sqrt{3}+2\sqrt{6}+3\sqrt{2}$.

Углы 120, 45 и 15 градусов. Точки DE лежат по одну сторону от точки B и $DE=BD-BE=AB-BC=\sqrt{3}-1$. $FH=\dfrac{DE}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{DE}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}$, тогда $EF=\sqrt{6}$, и $DF=\dfrac{2}{\sqrt{3}}FH=2$. Получаем периметр, равный $1+\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

8. (5 баллов) На острове Волосатом живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Кроме того, все жители острова либо блондины, либо брюнеты. Однажды встретились 200 жителей острова, после чего каждый сказал каждому одну из двух фраз: “Ты лжец” или “Ты блондин”, причём фраз “Ты лжец” было больше половины. Какое количество блондинов могло быть на острове? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: Ответ от 93 до 107.

Решение: Заметим, что на встрече не могло быть кареглазых рыцарей и синеглазых лжецов, так как первым не может сказать указанную фразу ни один рыцарь, а вторым — ни один лжец. Значит, островитяне на встрече делятся на синеглазых рыцарей и кареглазых лжецов. Но тогда фразу “Ты лжец” говорили друг другу люди с разным цветом глаз, а фразу “Ты синеглазый” — с одинаковым.

Пусть синеглазых рыцарей $100+k$, а кареглазых лжецов $100-k$. Мы можем ввести такие обозначения, так как сумма этих чисел 200. При этом k целое, но не обязательно натуральное число.

Тогда общее количество фраз “Ты лжец” составляет $2(100+k)(100-k)=2\cdot 100^2-2k^2$. Мы знаем, что количество этих фраз больше половины, то есть больше, чем $200\cdot 199/2=19900$. Итак, $20000-2k^2>19900$, откуда $2k^2<100$, то есть $|k|<\sqrt{50}$. Значит, количество лжецов отличается от 100 не более чем на 7, то есть находится в диапазоне от 93 до 107 включительно, причём все ситуации, очевидно, возможны.

XI. Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады для 8 класса

Задача 1. (2 балла)

1. Между городами А и Б ходят три автобуса: обычный, останавливающийся в городах В, Г и Д (именно в таком порядке); скоростной, который останавливается только в городе Г и экспресс, который нигде по дороге не останавливается.
Все автобусы едут по разным дорогам, с постоянной скоростью, и проезжают между любыми двумя остановками за целое число часов. Участки дорог между остановками прямые.
Обычный автобус проезжает от А до Б за 22 часа (без учёта времени, потраченного на остановки). Какое наибольшее время (в часах) может занимать путь экспресса от А до Б?

Ответ: 19

2. Между городами А и Б ходят три автобуса: обычный, останавливающийся в городах В, Г и Д (именно в таком порядке); скоростной, который останавливается только в городе Г и экспресс, который нигде по дороге не останавливается.
Все автобусы едут по разным дорогам, с постоянной скоростью, и проезжают между любыми двумя остановками за целое число часов. Участки дорог между остановками прямые.
Обычный автобус проезжает от А до Б за 21 час (без учёта времени, потраченного на остановки). Какое наибольшее время (в часах) может занимать путь экспресса от А до Б?

Ответ: 18

3. Между городами А и Б ходят три автобуса: обычный, останавливающийся в городах В, Г и Д (именно в таком порядке); скоростной, который останавливается только в городе Г и экспресс, который нигде по дороге не останавливается.
Все автобусы едут по разным дорогам, с постоянной скоростью, и проезжают между любыми двумя остановками за целое число часов. Участки дорог между остановками прямые.
Обычный автобус проезжает от А до Б за 20 часов (без учёта времени, потраченного на остановки). Какое наибольшее время (в часах) может занимать путь экспресса от А до Б?

Ответ: 17

Примеры записи ответов:
14

Задача 2. (2 балла)

1. Найдите количество решений уравнения $xy+2x+13y=4$ в целых числах (т. е. количество пар целых чисел (x, y) которые удовлетворяют данному равенству).

Ответ: 16

2. Найдите количество решений уравнения $xy+3x+11y=3$ в целых числах (т. е. количество пар целых чисел (x, y) которые удовлетворяют данному равенству).

Ответ: 18

3. Найдите количество решений уравнения $xy+5x+7y=29$ в целых числах (т. е. количество пар целых чисел (x, y) которые удовлетворяют данному равенству).

Ответ: 14

Примеры записи ответов:
14

Задача 3. (2 балла)

1. Дан прямоугольник ABCD. Длина стороны BC в полтора раза больше длины стороны AB. Точка M — середина стороны AB. Точка K на стороне AD такова, что DK = BM. Точка L — пересечение прямой CK и серединного перпендикуляра к отрезку AK. Известно, что MK = 5. Найдите длину отрезка CL.

Ответ: 10

2. Дан прямоугольник ABCD. Длина стороны AD в полтора раза больше длины стороны AB. Точка M — середина стороны CD. Точка N на стороне BC такова, что BN = DM. Точка K — пересечение прямой AN и серединного перпендикуляра к отрезку CN. Известно, что MN = 6. Найдите длину отрезка AK.

Ответ: 12

3. Дан прямоугольник ABCD. Длина стороны BC в полтора раза меньше длины стороны AB. Точка K — середина стороны AD. Точка L на стороне CD такова, что CL = AK. Точка M — пересечение прямой BL и серединного перпендикуляра к отрезку DL. Известно, что KL = 4. Найдите длину отрезка BM.

Ответ: 8

Примеры записи ответов:
14
0,5

Задача 4. (3 балла)

1. В волшебной стране некоторые города соединены дорогами так, что из любого города можно попасть в любой другой город, возможно через какие-то ещё города. Никакие два города не соединены напрямую более чем одной дорогой.
Назовем дорогу особенной, если при ее закрытии из какого-то города нельзя будет доехать до какого-то другого. Известно, что в стране всего дорог 23, из которых 19 дорог особенные. Сколько городов может быть в стране? Если правильных ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: 23

2. В сказочной стране некоторые города соединены дорогами так, что из любого города можно попасть в любой другой город, возможно через какие-то ещё города. Никакие два города не соединены напрямую более чем одной дорогой.
Назовем дорогу удивительной, если при ее закрытии из какого-то города нельзя будет доехать до какого-то другого. Известно, что в стране всего дорог 32, из которых 29 дорог удивительные. Сколько городов может быть в стране? Если правильных ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: 32

3. В Стране Чудес некоторые города соединены дорогами так, что из любого города можно попасть в любой другой город, возможно через какие-то ещё города.Никакие два города не соединены напрямую более чем одной дорогой.
Назовем дорогу странной, если при ее закрытии из какого-то города нельзя будет доехать до какого-то другого. Известно, что в стране всего дорог 45, из которых 42 дороги странные. Сколько городов может быть в стране? Если правильных ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: 45.

<u>**Примеры записи ответов:**</u>
14

Задача 5. (3 балла)

1. Из 100 прямоугольных треугольников с катетами 1 и 2 составили прямоугольник. Какое наибольшее значение может принимать его периметр?

Ответ: 202

2. Из 50 прямоугольных треугольников с катетами 1 и 3 составили прямоугольник. Какое наибольшее значение может принимать его периметр?

Ответ: 152

3. Из 60 прямоугольных треугольников с катетами 2 и 3 составили прямоугольник. Какое наибольшее значение может принимать его периметр?

Ответ: 184

<u>**Примеры записи ответов:**</u>
14
0,5

Задача 6. (3 балла)

1. В часовой мастерской некоторое количество электронных часов (больше, чем одни), показывающих время в 24-часовом формате. Все они идут с одинаковой скоростью, но показывают абсолютно разное время: число часов на экране любых двух различных часов различно, число минут тоже.
Однажды мастер сложил количество часов на экранах всех имеющихся часов, затем сложил количество минут на экранах всех имеющихся часов и запомнил два получившихся числа. Спустя некоторое время он сделал то же самое ещё раз и обнаружил, что и суммарное количество часов, и суммарное количество минут уменьшились на 1. Какое наименьшее количество электронных часов могло быть в мастерской?

Ответ: 7

2. В часовой мастерской некоторое количество электронных часов (больше, чем одни), показывающих время в 24-часовом формате. Все они идут с одинаковой скоростью, но

показывают абсолютно разное время: число часов на экране любых двух различных часов различно, число минут тоже.
Однажды мастер сложил количество часов на экранах всех имеющихся часов, затем сложил количество минут на экранах всех имеющихся часов и запомнил два получившихся числа. Спустя некоторое время он сделал то же самое ещё раз и обнаружил, что и суммарное количество часов, и суммарное количество минут уменьшились на 1. Какое наибольшее количество электронных часов могло быть в мастерской?

Ответ: 23

3. В часовой мастерской некоторое количество электронных часов (больше, чем одни), показывающих время в 12-часовом формате (число часов на экране часов меняется от 1 до 12) . Все они идут с одинаковой скоростью, но показывают абсолютно разное время: число часов на экране любых двух различных часов различно, число минут тоже.
Однажды мастер сложил количество часов на экранах всех имеющихся часов, затем сложил количество минут на экранах всех имеющихся часов и запомнил два получившихся числа. Спустя некоторое время он сделал то же самое ещё раз и обнаружил, что и суммарное количество часов, и суммарное количество минут уменьшились на 1. Какое наибольшее количество электронных часов могло быть в мастерской?

Ответ: 11

Примеры записи ответов:
14

Задача 7. (3 балла)

1. Клетчатая таблица 7х7 заполнена неотрицательными числами. Известно, что в каждой (вертикальной или горизонтальной) полоске 1х3 сумма чисел равна 12. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 204

2. Клетчатая таблица 13х13 заполнена неотрицательными числами. Известно, что в каждой (вертикальной или горизонтальной) полоске 1х3 сумма чисел равна 10. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 570

3. Клетчатая таблица 10х10 заполнена неотрицательными числами. Известно, что в каждой (вертикальной или горизонтальной) полоске 1х3 сумма чисел равна 9. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 306

Примеры записи ответов:
14

Задача 8. (3 балла)

1. На горке 6 девочек катаются паровозиком. Сколькими различными способами они могут съехать, если две девочки поссорились и не хотят сидеть рядом друг с другом?

Ответ:480

2. На горке 4 девочки и 2 мальчика катаются паровозиком. Сколькими различными способами они могут съехать, если одна из девочек очень стесняется сидеть между двумя мальчиками?

Ответ: 672

3. На горке 6 детей катаются паровозиком. Сколькими различными способами они могут съехать, если один из детей со странностями и считает, что ему ехать на четных местах противопоказано.

Ответ: 360

Примеры записи ответов:
14

Задача 9. (3 балла)

1. ABCD — параллелограмм площади 120. M — точка пересечения его диагоналей, K — точка на стороне AD такая, что AD=3 AK. Найдите площадь треугольника BMK.

Ответ: 20

2. ABCD — параллелограмм площади 360. M — точка пересечения его диагоналей, K — точка на стороне AD такая, что AD=3 AK, L — точка на стороне CD такая, что CD=3 CK. Найдите площадь треугольника KLM.

Ответ: 40

3. ABCD — параллелограмм площади 120. K — середина стороны AD, L — середина CD. Найдите площадь треугольника BKL.

Ответ: 45

Примеры записи ответов:
14

Задача 10. (4 балла)

1. Натуральные числа a и b таковы, что 2 НОК(a, b) + 3 НОД(a, b) = 100. Найдите наибольшее возможное значение числа a.

Ответ: 44

1. Натуральные числа a и b таковы, что 4 НОК(a, b) + 5 НОД(a, b) = 100. Найдите наибольшее возможное значение числа a.

Ответ: 20

1. Натуральные числа a и b таковы, что 5 НОК(a, b) + 2 НОД(a, b) = 120. Найдите наибольшее возможное значение числа a.

Ответ: 20

Примеры записи ответов:
14

XII. Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады для 8 класса

Задача 1. (2 балла)

1. Два равносторонних треугольника со сторонами 10 и 8 пересекаются, образуя шестиконечную звезду, при этом острые углы при пересечении любых двух сторон этих треугольников оказались равны углам исходных треугольников. Найдите периметр шестиугольника, образованного пересечением этих двух треугольников.

Ответ: 18

2. Два равносторонних треугольника со сторонами 10 и 11 пересекаются, образуя шестиконечную звезду, при этом острые углы при пересечении любых двух сторон этих треугольников оказались равны углам исходных треугольников. Найдите периметр шестиугольника, образованного пересечением этих двух треугольников.

Ответ: 21

3. Два равносторонних треугольника со сторонами 7 и 8 пересекаются, образуя шестиконечную звезду, при этом острые углы при пересечении любых двух сторон этих треугольников оказались равны углам исходных треугольников. Найдите периметр шестиугольника, образованного пересечением этих двух треугольников.

Ответ: 15

Примеры записи ответа:
1,7
1/7
17

Задача 2. (2 балла)

1 вариант: В таблице 10x10 раскрасили 18 клеток и в каждой вершине клетки, не лежащей на границе таблицы, написали количество закрашенных клеток, вершиной которых она является. Какая минимальная сумма могла получиться?
Ответ: 32

2 вариант: В таблице 9x9 раскрасили 25 клеток и в каждой вершине клетки, не лежащей на границе таблицы, написали количество закрашенных клеток, вершиной которых она является. Какая минимальная сумма могла получиться?
Ответ: 46

3 вариант: В таблице 11x11 раскрасили 32 клетки и в каждой вершине клетки, не лежащей на границе таблицы, написали количество закрашенных клеток, вершиной которых она является. Какая минимальная сумма могла получиться?
Ответ: 60

Примеры записи ответа:
17

Задача 3. (3 балла)

1. Из города А в город В выехали Женя, Коля и Антон с одинаковой скоростью. Через 40% пути Женя поехал не туда, и ему потребовалось x минут, чтобы снова выехать на нужную дорогу, уже в другом месте. До города В ему осталось еще 70% дороги, поэтому дальше он поехал со скоростью в три раза большей начальной. Когда Коля проехал в 6 раз больше, чем ему осталось, у него отвалилось колесо, и он вынужден был остановиться на 15 минут, после чего поехал со скоростью в два раза больше начальной. Чему равно x, если известно, что с Антоном ничего не приключилось и все три мальчика приехали в город В одновременно.

Ответ: 77

2. Из города А в город В выехали Женя, Коля и Антон с одинаковой скоростью. Через 65% пути Женя поехал не туда, и ему потребовалось x минут, чтобы снова выехать на нужную дорогу, уже в другом месте. До города В ему осталось еще 70% дороги, поэтому дальше он поехал со скоростью в три раза большей начальной. Когда Коля проехал в 7 раз больше, чем ему осталось, у него отвалилось колесо, и он вынужден был остановиться на 30 минут, после чего поехал со скоростью в два раза больше начальной. Чему равно x, если известно, что с Антоном ничего не приключилось и все три мальчика приехали в город В одновременно.

Ответ: 56

3. Из города А в город В выехали Женя, Коля и Антон с одинаковой скоростью. Через 55% пути Женя поехал не туда, и ему потребовалось x минут, чтобы снова выехать на нужную дорогу, уже в другом месте. До города В ему осталось еще 75% дороги, поэтому дальше он поехал со скоростью в три раза большей начальной. Когда Коля проехал в 5 раз больше, чем ему осталось, у него отвалилось колесо, и он вынужден был остановиться на 40 минут, после чего поехал со скоростью в два раза больше начальной. Чему равно x, если известно, что с Антоном ничего не приключилось и все три мальчика приехали в город В одновременно.
Ответ: 96

Примеры записи ответа:
17

Задача 4. (3 балла)

1. Дан выпуклый четырехугольник ABCD, лучи BA и CD пересекаются в точке P, лучи AD и BC – в точке Q. Известно, что угол PAD равен 120 градусам, угол APD равен 40 градусам. Найдите градусную меру угла ABC, если оказалось, что треугольники PAD и BDQ равны. Если правильных ответов несколько, запишите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: 80, 100 || 80; 100 || 100; 80 || 100, 80

2. Дан выпуклый четырехугольник ABCD, точка P является точкой пересечения сторон AB и CD, тогда Q является пересечений сторон AD и BC. Известно, что угол PAD равен 130

градусам, угол APD равен 40 градусам. Найдите градусную меру угла ABC, если оказалось, что треугольники PAD и BDQ равны.
Если правильных ответов несколько, запишите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: 90, 120 || 90; 120 || 120; 90 || 120, 90

3 вариант: Дан выпуклый четырехугольник ABCD, точка P является точкой пересечения сторон AB и CD, тогда Q является пересечений сторон AD и BC. Известно, что угол PAD равен 110 градусам, угол APD равен 40 градусам. Найдите градусную меру угла ABC, если оказалось, что треугольники PAD и BDQ равны.
Если правильных ответов несколько, запишите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: 70, 80 || 80, 70 || 80; 70 || 80; 70

Задача 5. (3 балла)

1. На плоскости даны три точки A(1,2), B(600,601), C(800,1). Найдите количество целочисленных точек на сторонах треугольника ABC.

Ответ: 800

2. На плоскости даны три точки A(1,2), B(303,304), C(404,1). Найдите количество целочисленных точек на сторонах треугольника ABC.

Ответ: 404

3. На плоскости даны три точки A(1,2), B(450,451), C(600,1). Найдите количество целочисленных точек на сторонах треугольника ABC.

Ответ: 600

Примеры записи ответа:
17

Задача 6. (3 балла)

1. Четыре различных нечётных числа a, b, c, d, больших единицы, таковы, что НОД(a, b) = НОД(c, d) и НОК(a, b) = НОК(c, d). Какое наименьшее значение может принимать $a + b + c + d$?

Ответ: 48

2. Четыре различных числа a, b, c, d, больших единицы и не делящихся на 3, таковы, что НОД(a, b) = НОД(c, d) и НОК(a, b) = НОК(c, d). Какое наименьшее значение может принимать $a + b + c + d$?

Ответ: 36

3. Четыре различных числа a, b, c, d, больших единицы и не делящихся на 5, таковы, что НОД(a, b) = НОД(c, d) и НОК(a, b) = НОК(c, d). Какое наименьшее значение может принимать $a + b + c + d$?

Ответ: 24

Примеры записи ответа:
17

Задача 7. (3 балла)

1. К натуральному числу прибавили его удвоенную сумму цифр. Получилось 2016. Найдите наибольшее и наименьшее возможное значение исходного числа.

Ответ: 1968; 2010 || 2010; 1968 || 2010, 1968 || 1968, 2010

2. К натуральному числу прибавили его удвоенную сумму цифр. Получилось 3030. Найдите наибольшее и наименьшее возможное значение исходного числа.

Ответ: 2978; 3020 || 3020; 2978 || 3020, 2978 || 2978, 3020

3. К натуральному числу прибавили его удвоенную сумму цифр. Получилось 4023. Найдите наибольшее и наименьшее возможное значение исходного числа.

Ответ: 3969; 4011 || 4011; 3969 || 4011, 3969 || 3969, 4011

Примеры записи ответа:
1234; 5678

Задача 8. (3 балла)

1. За круглым столом сидели еноты, ежики и хомяки, всего 101 зверь. На вопрос: «Есть ли среди ваших соседей зверь того же вида, что и вы?», - все ответили «Нет.». Какое наибольшее количество ежиков могло сидеть за столом, если известно, что хомяки и ежики всегда говорят правду, еноты почти всегда лгут (кроме случая, когда енот сидит между двумя енотами — тогда он правду говорит), а хомяки услышали вопрос по-другому: «Ваши соседи — звери одного вида?».
Ответ: 33

2. За круглым столом сидели еноты, ежики и хомяки, всего 122 зверя. На вопрос: «Есть ли среди ваших соседей зверь того же вида, что и вы?», - все ответили «Нет.». Какое наибольшее количество ежиков могло сидеть за столом, если известно, что хомяки и ежики всегда говорят правду, еноты почти всегда лгут (кроме случая, когда енот сидит между двумя енотами — тогда он правду говорит), а хомяки услышали вопрос по-другому: «Ваши соседи — звери одного вида?».
Ответ: 40

3. За круглым столом сидели еноты, ежики и хомяки, всего 134 зверя. На вопрос: «Есть ли среди ваших соседей зверь того же вида, что и вы?», - все ответили «Нет.». Какое наибольшее количество ежиков могло сидеть за столом, если известно, что хомяки и ежики всегда говорят правду, еноты почти всегда лгут (кроме случая, когда енот сидит между двумя енотами — тогда он правду говорит), а хомяки услышали вопрос по-другому: «Ваши соседи — звери одного вида?».
Ответ: 44

Примеры записи ответа:
17

Задача 9. (4 балла)

1. В компьютерной игре черепашка движется по заданной программе по клетчатому экрану компьютера, содержащему 5 столбиков и 7 строчек. Изначально она находится в левом нижнем углу экрана — на клетке, заданной координатами (0, 0). Если согласно программе черепашка должна выйти за пределы экрана, она появляется с другой стороны — например, сделав один шаг наверх с клетки (3, 6) черепашка окажется в клетке (3, 0). Где окажется черепашка после выполнения следующей программы:
1) 1 шаг вниз; 2) 2 шага вправо; 3) 3 шага вверх; 4) 4 шага влево; 5) 5 шагов вниз; 6) 6 шагов вправо; … ; 2016) 2016 шагов влево; 2017) 2017 шагов вниз?

Ответ: (2; 6) || (2, 6) || 2; 6 || 2, 6

2. В компьютерной игре черепашка движется по заданной программе по клетчатому экрану компьютера, содержащему 11 столбиков и 5 строчек. . Изначально она находится в левом нижнем углу экрана — на клетке, заданной координатами (0, 0). Если согласно программе черепашка должна выйти за пределы экрана, она появляется с другой стороны — например, сделав один шаг наверх с клетки (3, 4) черепашка окажется в клетке (3, 0). Где окажется черепашка после выполнения следующей программы:
1) 1 шаг вниз; 2) 2 шага вправо; 3) 3 шага вверх; 4) 4 шага влево; 5) 5 шагов вниз; 6) 6 шагов вправо; … ; 2016) 2016 шагов влево; 2017) 2017 шагов вниз?

Ответ: (4; 1) || (4, 1) || 4; 1 || 4, 1

3. 1. В компьютерной игре черепашка движется по заданной программе по клетчатому экрану компьютера, содержащему 5 столбиков и 9 строчек. . Изначально она находится в левом нижнем углу экрана — на клетке, заданной координатами (0, 0). Если согласно программе черепашка должна выйти за пределы экрана, она появляется с другой стороны — например, сделав один шаг наверх с клетки (3, 8) черепашка окажется в клетке (3, 0). Где окажется черепашка после выполнения следующей программы:
1) 1 шаг вверх; 2) 2 шага вправо; 3) 3 шага вниз; 4) 4 шага влево; 5) 5 шагов вверх; 6) 6 шагов вправо; … ; 2016) 2016 шагов влево; 2017) 2017 шагов вверх?

Ответ: (2; 1) || (2, 1) || 2; 1 || 2, 1
Примеры записи ответа:
(1; 7)

Задача 10. (5 баллов)

1. Дан куб и 11 красок. Найдите количество способов раскрасить грани этого куба с помощью этих красок (каждую грань — в один цвет) так, чтобы соседние грани были разных цветов. Раскраски, отличающиеся поворотом, считаются различными.

Ответ: 523710

2. Дан куб и 10 красок. Найдите количество способов раскрасить грани этого куба с помощью этих красок (каждую грань — в один цвет) так, чтобы соседние грани были разных цветов. Раскраски, отличающиеся поворотом, считаются различными.

Ответ: 257760

3. Дан куб и 12 красок. Найдите количество способов раскрасить грани этого куба с помощью этих красок (каждую грань — в один цвет) так, чтобы соседние грани были разных цветов. Раскраски, отличающиеся поворотом, считаются различными.

Ответ: 987360

Примеры записи ответа:

1,7

1/7

17

XIII. Задания заключительного этапа олимпиады для 7 класса

Открытая олимпиада школьников по математике

12 марта 2017 г.

7 класс
Решения
1 вариант

1. (2 балла) Подряд без пробелов выписали все натуральные числа в порядке возрастания: $1234567891011\ldots$. Какая цифра стоит на 2017 месте в получившемся длинном числе?

Ответ: 7.

Решение: Первые 9 цифр содержатся в однозначных числах, следующие 180 — в двузначых. $2017 - 180 - 9 = 1828$. Далее, $1828 : 3 = 609\frac{1}{3}$. Это значит, что 2017-ая цифра — это первая цифра в 610-ом трёхзначном числе, т.е. в числе 709. Таким образом, это цифра 7.

2. (2 балла) В классе собрались 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, всегда сообщающий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждого из них попросили назвать сначала число рыцарей в комнате, затем число лжецов. Оказалось, что каждое число от 0 до 9 названо ровно по два раза. Сколько могло быть в классе рыцарей? Найдите все возможные варианте и докажите, что других нет.

Ответ: от 0 до 2.

Решение: Так как рыцари на все вопросы дают одинаковые ответы, их не может быть больше, чем максимальное число одинаковых ответов, т.е. чем 2. Примеры всех вариантов легко построить. Если рыцарей двое, они отвечают правду, каждый из лжецов выбирает себе одно из чисел, кроме 2 и 8, и оба раза называет выбранное число. Если рыцарь один, восемь лжецов называют каждый своё число, кроме 1 и 9, а девятый лжец называет 9 и 1 в неправильном порядке. Если рыцарей нет, на вопрос о числе рыцарей все называют чётные числа, а на вопрос о числе лжецов — нечётные.

3. (3 балла) Петя и Вася играют в игру на изначально белом клетчатом поле 101×101. Первым ходит Петя и он своим первым ходом может закрасить чёрным цветом одну клетку. Каждым следующим ходом игрок может закрасить чёрным любой вертикальный или горизонтальный белый клетчатый прямоугольник $1 \times n$ на этом поле, где n — натуральное число, при этом оно может либо совпадать с количеством клеток, только что закрашенных другим игроком, либо превосходить его на один. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

Ответ: Выигрывает первый игрок — Петя.

Решение: Выигрышная стратегия первого игрока такова: первым ходом он перекрашивает центральную клетку, а дальше ходит симметрично сопернику относительно центра поля. Таким образом, после каждого его хода позиция на поле симметрична относительно центра, а значит на любой ход соперника у него снова есть симметричный ответ. Следовательно, остаться без хода может только второй, значит, первый выигрывает.

4. (3 балла) Существует ли натуральное четырёхзначное натуральное число с суммой цифр 23, которое делится на 23?

Ответ: Да, например $7682 = 23 \cdot 334$.

Решение: Вообще говоря, решение заключено в ответе, но давайте поясним как найти такое число. Сумма цифра произведения даёт такой же остаток при делении на 9, как и сумма исходных чисел. Представим 23 в виде разности числа, кратного 5 и числа, кратного девяти: $23 = 5 \cdot 10 - 3 \cdot 9$. Значит, нам нужно подобрать трёхзначный множитель с суммой цифр 10.

Вот все возможные варианты: 1679, 1886, 3749, 3956, 4577, 4784, 4991, 5198, 5819, 6647, 6854, 7268, 7475, 7682, 8096, 8717, 8924, 9338, 9545, 9752.

5. (3 балла) Точки B и D взяты по разные стороны от прямой AC. Отрезки BH и DF — перпендикуляры, опущенные на отрезок AC из точек B и D соответственно. Оказалось, что $AH = HF = FC$ и $DH = AB$. Докажите, что $BC = AD$.

Доказательство: В треугольнике ABF отрезок BH является медианой и высотой, следовательно, $AB = BF$. Аналогично в треугольнике CDH выполняется равенство $CD = DH$. Кроме того, $DH = AB$ и $AF = CH$, значит, эти треугольники равны по третьему признаку. Отсюда $\angle BAC = \angle ACD$. Таким образом, получается что треугольники ABC и CDA равны по первому признаку, откуда следует требуемое равенство.

6. (3 балла) Дан ребус: ЖАЛО + ЛОЖА = ОСЕНЬ. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Найдите значение буквы А.

Ответ: 8

Решение: Ребус можно переписать как ОСЕНЬ $=($ ЖА + ЛО $)\cdot 101$. Во-первых, это значит, что последняя цифра ЖА + ЛО — это Ь. Во-вторых, если ЖА + ЛО < 100, результат будет четырёхзначным. Пусть ЖА + ЛО = $1X$Ь, где X — какая-то цифра.

Тогда ОСЕНЬ $= 1X$Ь$00 + 1X$Ь. Если Ь < 9, то вторая и четвёртая цифры этого числа должны совпадать, но они не совпадают. Значит, Ь$= 9$. Следовательно, А + О = 9. Но О это 1, значит А это 8.

Примеров множество, например, 7861+6178=14039.

7. (4 балла) У Алисы и Боба есть три равных отрезка. Сначала Алиса ломает один из отрезков на две неравные части. Затем Боб ломает другой из исходных отрезков на две любые части. В результате получается пять отрезков, из которых десятью способами можно выбрать три отрезка. Алиса выигрывает, если хотя бы 4 из этих десяти способов дают тройки отрезков, образующие треугольник. В противном случае выигрывает Боб. Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

Ответ: Выигрывает Боб.

Решение: Пусть исходные отрезки имеют длину 1, а Алиса сломала один из отрезков на части x и $1-x$, пусть также для определённости $x < 1-x$. Тогда Бобу надо сломать отрезок на части $1-y$ и y так чтобы y был очень маленьким, а именно, выполнялись неравенства $y < x$, , $y < (1-x) - x$ и $y < (1-y) - (1-x)$, то есть $2y < x$. Ясно, что он может выбрать такой y.

Воспользуемся неравенством треугольника: чтобы можно было составить треугольник, необходимо и достаточно, чтобы большая сторона треугольника была меньше суммы двух оставшихся. При таком выборе y оно не больше разности между любыми двумя другими отрезками, а значит, не может образовать треугольник ни с какими из них. Троек, которые включают в себя отрезок y, ровно 6. Кроме того, оставшийся отрезок длины 1, и отрезки, которые получила Алиса также не образуют треугольник. Это седьмая тройка отрезков, не образующая треугольник. Таким образом, Алисе остаётся только 3 тройки, которые могут образовать треугольник, и она проигрывает.

8. (4 балла) Треугольник разбит на 1000 треугольников. В каком наибольшем количестве различных точек могут находиться вершины этих треугольников?

Ответ: 1002

Решение: Сумма углов треугольника $180°$, тысячи треугольников — $180000°$. Откуда взялись лишние $179820°$? Каждая внутренняя вершина, в которой сходятся только углы треугольников, добавляет $360°$. Каждая вершина на стороне исходного треугольника или на стороне одного из треугольников разбиения добавляет $180°$. Для достижения максимума необходимо, чтобы были точки только второго типа и их было $179820 : 180 = 999$. Пример строится последовательным добавлением новых вершин на стороны уже имеющихся треугольников.

Добавляя три вершины исходного треугольника, получаем ответ 1002.

Открытая олимпиада школьников по математике

12 марта 2017 г.

7 класс

2 вариант

1. (2 балла) Подряд без пробелов выписали все натуральные числа от 999 до 1 в порядке убывания: 999998 ... 321. Какая цифра стоит на 2710 месте в получившемся длинном числе?

Ответ: 9.

Решение: Первые $3 \cdot 900 = 2700$ цифр содержатся в трёхзначных числах. Значит, нам нужно отсчитать ещё 10 цифр в двузначных числах. То есть, нам нужна первая цифра четвёртого по величине двузначного числа. Это число — это 96, значит, нам нужна цифра 9.

2. (2 балла) В классе собрались 12 человек, каждый из которых либо рыцарь, всегда сообщающий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждого из них попросили назвать сначала число рыцарей в комнате, затем число лжецов. Оказалось, что каждое число от 1 до 12 названо ровно по два раза. Сколько могло быть в классе рыцарей? Найдите все возможные варианте и докажите, что других нет.

Ответ: от 0 до 2.

Решение: Так как рыцари на все вопросы дают одинаковые ответы, их не может быть больше, чем максимальное число одинаковых ответов, т.е. чем 2. Примеры всех вариантов легко построить. Если рыцарей двое, они отвечают правду, каждый из лжецов выбирает себе одно из чисел, кроме 2 и 10, и оба раза называет выбранное число. Если рыцарь один, восемь лжецов называют каждый своё число, кроме 1 и 11, а девятый лжец называет 11 и 1 в неправильном порядке. Если рыцарей нет, на вопрос о числе рыцарей все называют чётные числа, а на вопрос о числе лжецов — нечётные.

3. (3 балла) Петя и Вася играют в игру на изначально белом клетчатом поле 100×100. Первым ходит Петя и он своим первым ходом может закрасить чёрным цветом одну клетку. Каждым следующим ходом игрок может закрасить чёрным любой вертикальный или горизонтальный белый клетчатый прямоугольник $1 \times n$ на этом поле, где n — натуральное число, при этом оно может либо совпадать с количеством клеток, только что закрашенных другим игроком, либо превосходить его на один. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

Ответ: Выигрывает второй игрок — Вася.

Решение: Он ходит симметрично сопернику относительно центра поля. Таким образом, после каждого его хода позиция на поле симметрична относительно центра, а значит на любой ход соперника у него снова есть симметричный ответ. Следовательно, остаться без хода может только второй, значит, первый выигрывает.

4. (3 балла) Существует ли натуральное пятизначное натуральное число с суммой цифр 31, которое делится на 31? *Ответ:* Да, например $93775 = 31 \cdot 3025$.

Решение: Вообще говоря, решение заключено в ответе, но давайте поясним как найти такое число. Сумма цифра произведения даёт такой же остаток при делении на 9, как и сумма исходных чисел. Представим 23 в виде разности числа, кратного 5 и числа, кратного девяти: $31 = 5 \cdot 8 - 9$. Значит, нам нужно подобрать трёхзначный множитель с суммой цифр 10.

Существует несколько десятков подходящих чисел.

5. (3 балла) Точки A и C взяты по разные стороны от прямой BD. Отрезки AE и CH — перпендикуляры, опущенные на отрезок AC из точек A и C соответственно. Оказалось, что $DE = HE = BH$ и $CE = AD$. Докажите, что $AB = CD$.

Доказательство: В треугольнике ADH отрезок AE является медианой и высотой, следовательно, $AD = AH$. Аналогично в треугольнике BCE выполняется равенство $DC = CE$. Кроме того, $CE = AD$ и $DH = AB$, значит, эти треугольники равны по третьему признаку. Отсюда $\angle ADB = \angle DBC$. Таким образом, получается что треугольники ADB и CBD равны по первому признаку, откуда следует требуемое равенство.

6. (3 балла) Дан ребус: РЕКА + КАРЕ = АБВАД. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Найдите значение буквы Б.

Ответ: 2

Решение: Ребус можно переписать как АБВАД =(КА + РЕ) $\cdot$ 101. Во-первых, это значит, что последняя цифра КА + РЕ — это Д. Во-вторых, если КА + РЕ < 100, результат будет четырёхзначным. Пусть КА + РЕ = $1X$Д, где X — какая-то цифра.

Тогда АБВАД = $1X$Д00+$1X$Д. Если Д < 9, то вторая и четвёртая цифры этого числа должны совпадать, но они не совпадают. Значит, Д$= 9$ и вторая цифра числа АБВАД оказывается на 1 больше четвёртой. Но А это 1, значит Б это 2.

Примеров множество, например, 5861+6158=12019

7. (4 балла) У Алисы и Боба есть три равных отрезка. Сначала Алиса ломает один из отрезков на две части. Затем Боб ломает другой из исходных отрезков на две любые части. В результате получается пять отрезков, из которых десятью способами можно выбрать три отрезка. Алиса выигрывает, если хотя бы 4 из этих десяти способов дают тройки отрезков, образующие треугольник. В противном случае выигрывает Боб. Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

Ответ: Выигрывает Алиса.

Решение: Воспользуемся неравенством треугольника: чтобы можно было составить треугольник, необходимо и достаточно, чтобы большая сторона треугольника была меньше суммы двух оставшихся.

Пусть исходные отрезки имеют длину 1. Алиса ломает один из отрезков на две равные части. Пусть Боб ломает свой отрезок на части длины x и $1-x$, пусть также для определённости $x < 1-x$. $1-x < \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, то есть эта тройка образует треугольник. Также образует треугольник тройка из отрезков Алисы и меньшего отрезка Боба. Ещё две подходящих тройки получаются, когда мы берём отрезки 1, $1-x$ и $\frac{1}{2}$.

8. (4 балла) Треугольник разбит на 1000 треугольников. В каком наименьшем количестве различных точек могут находиться вершины этих треугольников?

Ответ: 503

Решение: Сумма углов треугольника 180°, тысячи треугольников — 180000°. Откуда взялись лишние 179820°? Каждая внутренняя вершина, в которой сходятся только углы треугольников, добавляет 360°. Каждая вершина на стороне исходного треугольника или на стороне одного из треугольников разбиения добавляет 180°. Для достижения минимума необходимо, чтобы точек первого типа было как можно больше. $179820 : 360 = 499,5$. Значит, нам нужно 499 точек первого типа и одна точка второго типа. Пример строится последовательным добавлением новых точек внутрь (не на границу) уже имеющихся треугольников и одной точки на границу.

Добавляя три вершины исходного треугольника, получаем ответ 503.

XIV. Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады для 7 класса

Задача 1. (2 балла)

1. В классе «А» девочек больше, чем мальчиков, а всего детей 30. К Новому году дети вырезали снежинки из белой или синей бумаги, а так же некоторые девочки захотели украсить свои снежинки блестками. Мальчик Коля заметил, что 30% всех детей в классе вырезали из синей бумаги, 80% всех девочек решили украсить блестками, а 65% от всех людей с блестками вырезали из белой бумаги. Сколько в итоге получилось белых снежинок без блесток?

Ответ: 8.

2. В классе «В» девочек больше, чем мальчиков, а всего детей 20. К Новому году дети вырезали снежинки из белой или синей бумаги, а так же некоторые девочки захотели украсить свои снежинки блестками. Мальчик Коля заметил, что 30% всех детей в классе вырезали из синей бумаги, 75% всех девочек решили украсить блестками, а 25% от всех людей с блестками вырезали из белой бумаги. Сколько в итоге получилось белых снежинок без блесток?

Ответ: 11.

3. В классе «С» девочек больше, чем мальчиков, а всего детей 25. К Новому году дети вырезали снежинки из белой или синей бумаги, а так же некоторые девочки захотели украсить свои снежинки блестками. Мальчик Коля заметил, что 40% всех детей в классе вырезали из синей бумаги, 60% всех девочек решили украсить блестками, а 75% от всех людей с блестками вырезали из белой бумаги. Сколько в итоге получилось белых снежинок без блесток?

Ответ: 6.

Задача 2. (2 балла)

1. Между городами А и Б ходят три автобуса: обычный, останавливающийся в городах В, Г и Д (именно в таком порядке); скоростной, который останавливается только в городе Г и экспресс, который нигде по дороге не останавливается.
Все автобусы едут по разным дорогам, с постоянной скоростью, и проезжают между любыми двумя остановками за целое число часов. Участки дорог между остановками прямые. Обычный автобус проезжает от А до Б за 22 часа (без учёта времени, потраченного на остановки). Какое наибольшее время (в часах) может занимать путь экспресса от А до Б?

Ответ: 19

2. Между городами А и Б ходят три автобуса: обычный, останавливающийся в городах В, Г и Д (именно в таком порядке); скоростной, который останавливается только в городе Г и экспресс, который нигде по дороге не останавливается.
Все автобусы едут по разным дорогам, с постоянной скоростью, и проезжают между любыми двумя остановками за целое число часов. Участки дорог между остановками прямые. Обычный автобус проезжает от А до Б за 21 час (без учёта времени, потраченного на остановки). Какое наибольшее время (в часах) может занимать путь экспресса от А до Б?

Ответ: 18

3. Между городами А и Б ходят три автобуса: обычный, останавливающийся в городах В, Г и

Д (именно в таком порядке); скоростной, который останавливается только в городе Г и экспресс, который нигде по дороге не останавливается.
Все автобусы едут по разным дорогам, с постоянной скоростью, и проезжают между любыми двумя остановками за целое число часов. Участки дорог между остановками прямые.
Обычный автобус проезжает от А до Б за 20 часов (без учёта времени, потраченного на остановки). Какое наибольшее время (в часах) может занимать путь экспресса от А до Б?

Ответ: 17

Задача 3. (2 балла)

1. Найдите наибольшее четырёхзначное число без нулей, произведение цифр которого делится на их сумму.

Ответ: 9981

2. Найдите наименьшее четырёхзначное число без нулей, произведение цифр которого делится на их сумму.

Ответ: 1124

3. Найдите наибольшее четырёхзначное число, которое делится на сумму своих цифр.

Ответ: 9990

Примеры записи ответов:
1444

Задача 4. (3 балла)

1. В часовой мастерской некоторое количество электронных часов (больше, чем одни), показывающих время в 24-часовом формате. Все они идут с одинаковой скоростью, но показывают абсолютно разное время: число часов на экране любых двух различных часов различно, число минут тоже.
Однажды мастер сложил количество часов на экранах всех имеющихся часов, затем сложил количество минут на экранах всех имеющихся часов и запомнил два получившихся числа.
Спустя некоторое время он сделал то же самое ещё раз и обнаружил, что и суммарное количество часов, и суммарное количество минут уменьшились на 1. Какое наименьшее количество электронных часов могло быть в мастерской?

Ответ: 7

2. В часовой мастерской некоторое количество электронных часов (больше, чем одни), показывающих время в 24-часовом формате. Все они идут с одинаковой скоростью, но показывают абсолютно разное время: число часов на экране любых двух различных часов различно, число минут тоже.
Однажды мастер сложил количество часов на экранах всех имеющихся часов, затем сложил количество минут на экранах всех имеющихся часов и запомнил два получившихся числа.
Спустя некоторое время он сделал то же самое ещё раз и обнаружил, что и суммарное количество часов, и суммарное количество минут уменьшились на 1. Какое наибольшее количество электронных часов могло быть в мастерской?
Ответ: 23

3. В часовой мастерской некоторое количество электронных часов (больше, чем одни), показывающих время в 12-часовом формате (число часов на экране часов меняется от 1 до 12) . Все они идут с одинаковой скоростью, но показывают абсолютно разное время: число часов на экране любых двух различных часов различно, число минут тоже.
Однажды мастер сложил количество часов на экранах всех имеющихся часов, затем сложил количество минут на экранах всех имеющихся часов и запомнил два получившихся числа. Спустя некоторое время он сделал то же самое ещё раз и обнаружил, что и суммарное количество часов, и суммарное количество минут уменьшились на 1. Какое наибольшее количество электронных часов могло быть в мастерской?

Ответ: 11

Примеры записи ответов:
14

Задача 5. (3 балла)

1. Дан прямоугольник ABCD. Длина стороны BC в полтора раза больше длины стороны AB. Точка M — середина стороны AB. Точка K на стороне AD такова, что DK = BM. Точка L — пересечение прямой CK и серединного перпендикуляра к отрезку AK. Известно, что MK = 5. Найдите длину отрезка CL.
(Прямоугольник — такая фигура, что его противоположные стороны равны, а углы составляют по 90^{o}.)

Ответ: 10

2. Дан прямоугольник ABCD. Длина стороны AD в полтора раза больше длины стороны AB. Точка M — середина стороны CD. Точка N на стороне BC такова, что BN = DM. Точка K — пересечение прямой AN и серединного перпендикуляра к отрезку CN. Известно, что MN = 6. Найдите длину отрезка AK.
(Прямоугольник — такая фигура, что его противоположные стороны равны, а углы составляют по 90^{o}.)

Ответ: 12

3. Дан прямоугольник ABCD. Длина стороны BC в полтора раза меньше длины стороны AB. Точка K — середина стороны AD. Точка L на стороне CD такова, что CL = AK. Точка M — пересечение прямой BL и серединного перпендикуляра к отрезку DL. Известно, что KL = 4. Найдите длину отрезка BM.
(Прямоугольник — такая фигура, что его противоположные стороны равны, а углы составляют по 90^{o}.)

Ответ: 8

Примеры записи ответов:
14

Задача 6. (3 балла)

1. На горке 6 девочек катаются паровозиком. Сколькими различными способами они могут съехать, если две девочки поссорились и не хотят сидеть рядом друг с другом?
Ответ:480

2. На горке 4 девочки и 2 мальчика катаются паровозиком. Сколькими различными способами они могут съехать, если одна из девочек очень стесняется сидеть между двумя мальчиками?

Ответ: 672

3. На горке 6 детей катаются паровозиком. Сколькими различными способами они могут съехать, если один из детей со странностями и считает, что ему ехать на четных местах противопоказано.

Ответ: 360

Задача 7. (3 балла)

1. Найдите количество решений уравнения $xy+2x+13y=4$ в целых числах (т. е. количество пар целых чисел (x, y) которые удовлетворяют данному равенству).

Ответ: 16

2. Найдите количество решений уравнения $xy+3x+11y=3$ в целых числах (т. е. количество пар целых чисел (x, y) которые удовлетворяют данному равенству).

Ответ: 18

3. Найдите количество решений уравнения $xy+5x+7y=29$ в целых числах (т. е. количество пар целых чисел (x, y) которые удовлетворяют данному равенству).

Ответ: 14

Задача 8. (3 балла)

1. На окружности расположены 4 точки. Длины кратчайших путей между любыми двумя из них, измеренные по окружности — различные натуральные числа. Найдите наименьшую возможную длину окружности.

Ответ: 12

2. На окружности расположены 4 точки. Длины кратчайших путей между любыми двумя из них, измеренные по окружности — различные чётные числа. Найдите наименьшую возможную длину окружности.

Ответ: 24

3. На отрезке отметили обе вершины и ещё три какие-то точки. Расстояния между любыми двумя точками различны. Найдите наименьшую возможную длину отрезка.

Ответ: 11

Задача 9. (3 балла)

1. На острове живут три племени: Мумба, Юмба и Тумба. Островитяне из племени Мумба врут островитянам племени Тумба и говорят правду островитянам племени Юмба.

Островитяне из племени Тумба врут островитянам племени Юмба и говорят правду островитянам племени Мумба. Островитяне из племени Юмба врут островитянам племени Мумба и говорят правду островитянам племени Тумба. С членами своего племени островитяне не разговаривают.
Однажды за круглым столом собрались 300 островитян и каждым сказал своему соседу слева: «Я из племени Мумба». А сколько на самом деле было островитян из племени Мумба?

Ответ: 150

2. На острове живут три племени: Мумба, Юмба и Тумба. Островитяне из племени Мумба врут островитянам племени Тумба и говорят правду островитянам племени Юмба. Островитяне из племени Тумба врут островитянам племени Юмба и говорят правду островитянам племени Мумба. Островитяне из племени Юмба врут островитянам племени Мумба и говорят правду островитянам племени Тумба. С членами своего племени островитяне не разговаривают.
Однажды за круглым столом собрались 240 островитян и каждым сказал своему соседу слева: «Я из племени Юмба». А сколько на самом деле было островитян из племени Юмба?

Ответ: 120

3. На острове живут три племени: Мумба, Юмба и Тумба. Островитяне из племени Мумба врут островитянам племени Юмба и говорят правду островитянам племени Тумба. Островитяне из племени Тумба врут островитянам племени Мумба и говорят правду островитянам племени Юмба. Островитяне из племени Юмба врут островитянам племени Тумба и говорят правду островитянам племени Мумба. С членами своего племени островитяне не разговаривают.
Однажды за круглым столом собрались 150 островитян и каждым сказал своему соседу слева: «Я из племени Тумба». А сколько на самом деле было островитян из племени Тумба?

Ответ: 75

Задача 10. (4 балла)

1. Клетчатая таблица 7х7 заполнена неотрицательными числами. Известно, что в каждой (вертикальной или горизонтальной) полоске 1х3 сумма чисел равна 12. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 204

2. Клетчатая таблица 13х13 заполнена неотрицательными числами. Известно, что в каждой (вертикальной или горизонтальной) полоске 1х3 сумма чисел равна 10. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 570

3. Клетчатая таблица 10х10 заполнена неотрицательными числами. Известно, что в каждой (вертикальной или горизонтальной) полоске 1х3 сумма чисел равна 9. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 306
Примеры записи ответов:
14

XV. Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады для 7 класса

Задача 1. (2 балла)

1. В четырёхзначном числе зачеркнули первую цифру. Получилось число в 5 раз меньше исходного. Какое наибольшее значение могло принимать исходное число?

Ответ: 3750

2. В четырёхзначном числе зачеркнули первую цифру. Получилось число в 6 раз меньше исходного. Какое наибольшее значение могло принимать исходное число?

Ответ: 4800

3. В четырёхзначном числе зачеркнули первую цифру. Получилось число в 9 раз меньше исходного. Какое наибольшее значение могло принимать исходное число?

Ответ: 7875

<u>Примеры записи ответа:</u>
1234

Задача 2. (2 балла)

1. Прямоугольник разбит четырьмя прямыми на 9 прямоугольников (см. рисунок, масштаб не соблюдён). В некоторых из этих прямоугольников написана их площадь. Найдите площадь всего прямоугольника.

	4	
3		6
1	2	

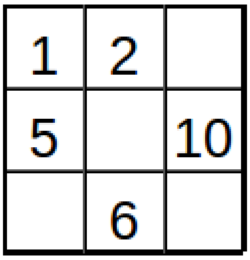
Ответ: 30

2. Прямоугольник разбит четырьмя прямыми на 9 прямоугольников (см. рисунок, масштаб не соблюдён). В некоторых из этих прямоугольников написана их площадь. Найдите площадь всего прямоугольника.

1	3	
4		20
	3	

Ответ: 54

3. Прямоугольник разбит четырьмя прямыми на 9 прямоугольников (см. рисунок, масштаб не соблюдён). В некоторых из этих прямоугольников написана их площадь. Найдите площадь всего прямоугольника.



Ответ: 45

Примеры записи ответа:
1,7
1/7
17

Задача 3. (2 балла)

1. На плоскости нарисовано некоторое количество треугольников, длины сторон которых — шестизначные натуральные числа, содержащие в своей десятичной записи только единицы и тройки. Никакой отрезок не входит в два треугольника, стороны всех треугольников различны. Какое наибольшее количество треугольников может быть нарисовано?

Ответ: 21

2. На плоскости нарисовано некоторое количество треугольников, длины сторон которых — восьмизначные натуральные числа, содержащие в своей десятичной записи только двойки и семёрки. Никакой отрезок не входит в два треугольника, стороны всех треугольников различны. Какое наибольшее количество треугольников может быть нарисовано?

Ответ: 85

3. На плоскости нарисовано некоторое количество треугольников, длины сторон которых — десятизначные натуральные числа, содержащие в своей десятичной записи только тройки и восьмёрки. Никакой отрезок не входит в два треугольника, стороны всех треугольников различны. Какое наибольшее количество треугольников может быть нарисовано?

Ответ: 341

Примеры записи ответа:
17

Задача 4. (3 балла)

1. Два равносторонних треугольника со сторонами 10 и 8 пересекаются, образуя шестиконечную звезду, при этом острые углы при пересечении любых двух сторон этих треугольников оказались равны углам исходных треугольников. Найдите периметр шестиугольника, образованного пересечением этих двух треугольников.

Ответ: 18

2. Два равносторонних треугольника со сторонами 10 и 11 пересекаются, образуя шестиконечную звезду, при этом острые углы при пересечении любых двух сторон этих треугольников оказались равны углам исходных треугольников. Найдите периметр шестиугольника, образованного пересечением этих двух треугольников.

Ответ: 21

3. Два равносторонних треугольника со сторонами 7 и 8 пересекаются, образуя шестиконечную звезду, при этом острые углы при пересечении любых двух сторон этих треугольников оказались равны углам исходных треугольников. Найдите периметр шестиугольника, образованного пересечением этих двух треугольников.

Ответ: 15

Примеры записи ответа:
1,7
1/7
17

Задача 5. (3 балла)

1. К натуральному числу прибавили его удвоенную сумму цифр. Получилось 2016. Найдите наибольшее и наименьшее возможное значение исходного числа.

Ответ: 1968; 2010 || 2010; 1968 || 2010, 1968 || 1968, 2010

2. К натуральному числу прибавили его удвоенную сумму цифр. Получилось 3030. Найдите наибольшее и наименьшее возможное значение исходного числа.

Ответ: 2978; 3020 || 3020; 2978 || 3020, 2978 || 2978, 3020

3. К натуральному числу прибавили его удвоенную сумму цифр. Получилось 4023. Найдите наибольшее и наименьшее возможное значение исходного числа.

Ответ: 3969; 4011 || 4011; 3969 || 4011, 3969 || 3969, 4011

Примеры записи ответа:
1234; 5678

Задача 6. (3 балла)

1. За круглым столом сидели еноты, ежики и хомяки, всего 101 зверь. На вопрос: «Есть ли среди ваших соседей зверь того же вида, что и вы?», - все ответили «Нет.». Какое наибольшее количество ежиков могло сидеть за столом, если известно, что хомяки и ежики всегда говорят правду, еноты почти всегда лгут (кроме случая, когда енот сидит между двумя енотами — тогда он правду говорит), а хомяки услышали вопрос по-другому: «Ваши соседи — звери одного вида?».
Ответ: 33

2. За круглым столом сидели еноты, ежики и хомяки, всего 122 зверя. На вопрос: «Есть ли среди ваших соседей зверь того же вида, что и вы?», - все ответили «Нет.». Какое наибольшее количество ежиков могло сидеть за столом, если известно, что хомяки и ежики всегда говорят правду, еноты почти всегда лгут (кроме случая, когда енот сидит между двумя енотами — тогда он правду говорит), а хомяки услышали вопрос по-другому: «Ваши соседи — звери одного вида?».
Ответ: 40

3. За круглым столом сидели еноты, ежики и хомяки, всего 134 зверя. На вопрос: «Есть ли среди ваших соседей зверь того же вида, что и вы?», - все ответили «Нет.». Какое наибольшее количество ежиков могло сидеть за столом, если известно, что хомяки и ежики всегда говорят правду, еноты почти всегда лгут (кроме случая, когда енот сидит между двумя енотами — тогда он правду говорит), а хомяки услышали вопрос по-другому: «Ваши соседи — звери одного вида?».
Ответ: 44

Примеры записи ответа:
17

Задача 7. (3 балла)

1 вариант: В таблице 10х10 раскрасили 18 клеток и в каждой вершине клетки, не лежащей на границе таблицы, написали количество закрашенных клеток, вершиной которых она является. Какая минимальная сумма могла получиться?
Ответ: 32

2 вариант: В таблице 9х9 раскрасили 25 клеток и в каждой вершине клетки, не лежащей на границе таблицы, написали количество закрашенных клеток, вершиной которых она является. Какая минимальная сумма могла получиться?
Ответ: 46

3 вариант: В таблице 11х11 раскрасили 32 клетки и в каждой вершине клетки, не лежащей на границе таблицы, написали количество закрашенных клеток, вершиной которых она является. Какая минимальная сумма могла получиться?
Ответ: 60

Примеры записи ответа:
17

Задача 8. (3 балла)

1. Решите уравнение в натуральных числах: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$. В ответе укажите все возможные значения числа *x* в порядке возрастания или убывани через запятую или точку с запятой.

Ответ: 4, 6, 12 || 4; 6; 12 || 12, 6, 4 || 12; 6; 4

2. Решите уравнение в натуральных числах: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$. В ответе укажите все возможные значения числа *x* в порядке возрастания или убывани через запятую или точку с запятой.

Ответ: 6, 10, 30 || 6; 10; 30 || 30; 10; 6 || 30, 10, 6

3. Решите уравнение в натуральных числах: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$. В ответе укажите все возможные значения числа *x* в порядке возрастания или убывани через запятую или точку с запятой.

Ответ: 5, 8, 20 || 5; 8; 20 || 20, 8, 5 || 20; 8; 5

Примеры записи ответа:
1; 2
1, 2, 3

Задача 9. (4 балла)

1. Из города А в город В выехали Женя, Коля и Антон с одинаковой скоростью. Через 40% пути Женя поехал не туда, и ему потребовалось х минут, чтобы снова выехать на нужную дорогу, уже в другом месте. До города В ему осталось еще 70% дороги, поэтому дальше он поехал со скоростью в три раза большей начальной. Когда Коля проехал в 6 раз больше, чем ему осталось, у него отвалилось колесо, и он вынужден был остановиться на 15 минут, после чего поехал со скоростью в два раза больше начальной. Чему равно х, если известно, что с Антоном ничего не приключилось и все три мальчика приехали в город В одновременно.

Ответ: 77

2. Из города А в город В выехали Женя, Коля и Антон с одинаковой скоростью. Через 65% пути Женя поехал не туда, и ему потребовалось х минут, чтобы снова выехать на нужную дорогу, уже в другом месте. До города В ему осталось еще 70% дороги, поэтому дальше он поехал со скоростью в три раза большей начальной. Когда Коля проехал в 7 раз больше, чем ему осталось, у него отвалилось колесо, и он вынужден был остановиться на 30 минут, после чего поехал со скоростью в два раза больше начальной. Чему равно х, если известно, что с Антоном ничего не приключилось и все три мальчика приехали в город В одновременно.

Ответ: 56

3. Из города А в город В выехали Женя, Коля и Антон с одинаковой скоростью. Через 55% пути Женя поехал не туда, и ему потребовалось *x* минут, чтобы снова выехать на нужную дорогу, уже в другом месте. До города В ему осталось еще 75% дороги, поэтому дальше он поехал со скоростью в три раза большей начальной. Когда Коля проехал в 5 раз больше, чем ему осталось, у него отвалилось колесо, и он вынужден был остановиться на 40 минут, после

чего поехал со скоростью в два раза больше начальной. Чему равно x, если известно, что с Антоном ничего не приключилось и все три мальчика приехали в город B одновременно.
Ответ: 96

<u>Примеры записи ответа:</u>
17

Задача 10. (4 балла)

1. В таблице 8x9 расставлены натуральные числа так, что числа в клетках, имеющих общую сторону или угол, различны. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 172

2. В таблице 7x8 расставлены натуральные числа так, что числа в клетках, имеющих общую сторону или угол, различны. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 132

3. В таблице 10x9 расставлены натуральные числа так, что числа в клетках, имеющих общую сторону или угол, различны. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 215

<u>Примеры записи ответа:</u>
17