

Задания
Открытой олимпиады школьников по математике
(№54 Перечня олимпиад школьников, 2015/2016 уч. год)

Оглавление

I.	Задания заключительного этапа олимпиады для 11 класса	2
II.	Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады для 11 класса	15
III.	Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады для 11 класса	22
IV.	Задания заключительного этапа олимпиады для 10 класса	28
V.	Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады для 10 класса	33
VI.	Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады для 10 класса	40
VII.	Задания заключительного этапа олимпиады для 9 класса	47
VIII.	Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады для 9 класса	54
IX.	Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады для 9 класса	61
X.	Задания заключительного этапа олимпиады для 8 класса	68
XI.	Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады для 8 класса	74
XII.	Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады для 8 класса	81
XIII.	Задания заключительного этапа олимпиады для 7 класса	88
XIV.	Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады для 7 класса	95
XV.	Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады для 7 класса	102

I. Задания заключительного этапа олимпиады для 11 класса

Решения

11 класс

1 вариант

1. (2 балла) Мальчик Вася выписал в тетрадку ненулевые коэффициенты многочлена $P(x)$ десятой степени. Затем у получившегося многочлена вычислил производную и выписал её ненулевые коэффициенты, и так далее, пока не получилась константа, которую он также выписал.

Какое наименьшее количество различных чисел у него могло получиться?

Коэффициенты выписываются с учётом знака, свободные члены также выписываются, если имеется одночлен вида $\pm x^n$, выписывается ± 1 .

Ответ: 10

Решение: Оценка: так как многочлен имеет степень 10, у него совершенно точно есть ненулевой коэффициент при x^{10} , назовём его a . Тогда старший коэффициент производной этого многочлена равен $10a$, старший коэффициент второй производной равен $10 \cdot 9a$ и т.д., старшие коэффициенты девятой и десятой производных равны $10!a$, причем все эти числа, кроме двух последних, различны, таким образом 10 различных чисел точно есть.

Пример: $\frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^9}{9!} + \dots + x + 1$ даёт нам ровно 10 различных чисел, так как каждый следующий одночлен — производная предыдущего.

Также подходит любой многочлен пропорциональный данному, а также отличающийся от пропорционального данному вычёркиванием некоторых одночленов, например x^{10} . Легко доказать, что других примеров нет, впрочем, в задаче это не требуется.

2. (2 балла) Решите уравнение или докажите, что оно не имеет решений: $3 \sin x + 4 \cos x = -5 - \frac{1}{|x|}$

Ответ: Решений нет.

Решение:

$3 \sin x + 4 \cos x = 5 \sin(x + \arctg \frac{4}{3}) \geq -5 > -5 - \frac{1}{|x|}$, следовательно, равенство невозможно.

3. (3 балла) В некоторой стране 100 городов. Министерство авиации требует, чтобы каждые два города были соединены двусторонним авиарейсом ровно одной авиакомпанией и чтобы рейсами каждой авиакомпании можно было бы добраться от любого города до любого (возможно, с пересадками). При каком наибольшем числе авиакомпаний это возможно?

Ответ: 50

Решение: Оценка: для того, чтобы соединить все города, авиакомпании надо иметь хотя бы 99 рейсов. Всего пар городов $100 \cdot 99/2$, значит, авиакомпаний не более 50.

Пример: обозначим города за $a_1, a_2, \dots, a_{50}, b_1, b_2, \dots, b_{50}$ каким-нибудь образом. Тогда авиакомпания с номером k будет соединять

- 1) города a_k и b_k ;
- 2) a_k и каждый город a_i , где $i < k$
- 3) a_k и каждый город b_i , где $i > k$
- 4) b_k и каждый город a_i , где $i > k$
- 5) b_k и каждый город b_i , где $i < k$.

Таким образом, города a_i и a_j оказываются соединены рейсом авиакомпании с номером $\max(a_i, a_j)$, города b_i и b_j — авиакомпаний с номером $\max(b_i, b_j)$, города a_i и b_j — авиакомпаний с номером $\min(b_i, b_j)$.

4. (3 балла) Докажите, что при $n = 6002$ сумма биномиальных коэффициентов с шагом 6, т.е. $C_n^1 + C_n^7 + \dots + C_n^{n-1}$, даёт остаток 1 при делении на 3.

C_n^k — количество способов выбрать из n предметов k , что составляет $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ если $0 \leq k \leq n$ и 0 в остальных случаях.

Решение:

Легко проверить, что $C_n^k = C_{n-3}^{k-3} + 3C_{n-3}^{k-2} + 3C_{n-3}^{k-1} + C_{n-3}^k$, следовательно, C_n^k даёт такой же остаток при делении на 3, что и $C_{n-3}^{k-3} + C_{n-3}^k$.

Таким образом, $C_n^1 + C_n^7 + \dots + C_n^{n-1}$ даёт такой же остаток при делении на 3, что и $C_{n-3}^1 + C_{n-3}^4 + \dots + C_{n-3}^{n-7} + C_{n-3}^{n-4}$ (здесь отброшены два крайних слагаемых, равные 0).

Обозначим эту сумму за S_{n-3} .

Аналогично переходим к $2C_{n-6}^1 + 2C_{n-6}^4 + \dots + 2C_{n-6}^{n-7} + 2C_{n-6}^{n-4} = 2S_{n-6}$.

Применив эту процедуру ещё 1998 раз, получаем, что формула из условия даёт такой же остаток при делении на 3, что и $2^{1999} S_2 = 4^{999} \cdot 2C_2^1 = 4^{1000}$, что даёт остаток 1 при делении на 3.

5. (3 балла) Три окружности, радиусов 1, 1 и $2\sqrt{\frac{13-6\sqrt{3}}{13}}$, расположены так, что треугольник, образованный центрами этих окружностей, является равносторонним со стороной $\sqrt{3}$. Найдите, чему равен радиус описанной вокруг треугольника, каждая из вершин которого является точкой пересечения двух из этих окружностей, дальней от центра третьей окружности.

Ответ: $4\sqrt{3} - 6$

Решение:

Пусть A, B, C — указанные точки пересечения первой и второй, второй и третьей, первой и третьей окружностей соответственно, O_1, O_2, O_3 — центры этих окружностей.

Радиусы первой и второй окружностей равны, следовательно, точка A попадёт на серединный перпендикуляр к O_1O_2 . Треугольник, образованный центрами окружностей, правильный, поэтому точка O_3 также окажется на этом серединном перпендикуляре. Следовательно, вся картинка симметрична относительно этого серединного перпендикуляра, в частности, точки B и C симметричны друг другу.

Треугольник O_1AO_2 равнобедренный с вершиной A ; кроме того, его стороны равны 1, 1 и $\sqrt{3}$ откуда легко ищутся его углы: $30^\circ, 30^\circ$ и 120° .

$\angle O_1AC$ обозначим за α , $\angle CO_1O_3$ за β . В треугольнике CO_1O_3 мы знаем все стороны, значит, мы можем найти

$$\cos \beta = \frac{1 + 3 - 4 \cdot \frac{13-6\sqrt{3}}{13}}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{12}{13}.$$

Соответственно, $\sin \beta = \frac{5}{13}$. Далее, $\angle AO_1C = \angle AO_1O_2 + \angle O_2O_1O_3 + \angle O_3O_1C = 30^\circ + 60^\circ + \beta = 90^\circ + \beta$

Треугольник CO_1A равнобедренный с углами $\alpha, 90^\circ + \beta$ и α , следовательно, $\alpha = \frac{90^\circ - \beta}{2}$, откуда

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos(90^\circ - \beta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sin \beta}{2}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Соответственно, $\sin \alpha = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Кроме того, $AC = 2O_1A \cos \alpha = 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$.

$\angle BAC = 120 - 2\alpha = 30 + \beta$, следовательно,

$$\sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{13} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{13} = \frac{12 + 5\sqrt{3}}{26}.$$

$$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{12}{13} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{13} = \frac{12\sqrt{3} - 5}{26}.$$

$$\sin \angle ABC = \cos \frac{\angle BAC}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \angle BAC}{2}} = \sqrt{\frac{21 + 12\sqrt{3}}{52}} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{13}}.$$

По теореме синусов,

$$R = \frac{AC}{2 \sin \angle ABC} = \frac{\frac{6}{\sqrt{13}}}{2 \cdot \frac{2\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{13}}} = \frac{6}{2\sqrt{3} + 3} = \frac{6(2\sqrt{3} - 3)}{3} = 4\sqrt{3} - 6$$

6. (3 балла) Найдите суммарную длину промежутков на числовой оси, на которых выполняются неравенства $x < 1$ и $\sin \log_2 x < 0$.

Ответ:

$$\frac{2^\pi}{1 + 2^\pi}$$

Решение:

Заметим, что нас интересуют только положительные x .

Если $\sin \log_2 x < 0$, значит, $2(k-1)\pi < \log_2 x < 2k\pi$ для какого-то целого k , то есть $2^{2(k-1)\pi} < x < 2^{2k\pi}$. Так как $x < 1$, нас интересуют только неположительные k . Обозначим $n = -k$. Число n принимает неотрицательные значения, тогда длина промежутка отрицательности нашей функции, имеющего номер n при нумерации с левой стороны (нумерация начинается с 0), равна $2^{-2n\pi} - 2^{-(2n+1)\pi} = 2^{-2n\pi}(1 - 2^{-\pi})$.

Следовательно, длины всех промежутков составляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $2^{-2\pi}$, а их сумма равна $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(2n+1)\pi} = \frac{1 - 2^{-\pi}}{1 - 2^{-2\pi}} = \frac{1}{1 + 2^{-\pi}} = \frac{2^\pi}{1 + 2^\pi}$.

7. (4 балла) Четыре из шести средин рёбер некоего тетраэдра образуют правильный тетраэдр с ребром 1. Найдите рёбра исходного тетраэдра.

Ответ: Пять рёбер длины 2, одно ребро длины $2\sqrt{2}$.

Решение:

Обозначим вершины тетраэдра A, B, C, D . Середину ребра AB обозначим за M_{AB} , аналогичные обозначения введём для остальных рёбер.

Пусть в правильный тетраэдр не попали середины скрещивающихся рёбер исходного тетраэдра, не умаляя общности, можно считать, что это M_{AB} и M_{CD} . Заметим, что отрезок $M_{BC}M_{BD}$ средняя линия в треугольнике BCD , значит, он равен половине ребра CD по длине и параллелен этому ребру. Но то же самое можно сказать и про ребро $M_{AC}M_{AD}$, значит, эти отрезки параллельны и равны, т.е. образуют параллелограмм. Таким образом, четыре вершины, которые должны образовывать правильный тетраэдр, оказались лежащими в одной плоскости.

Значит, в правильный тетраэдр не попали середины соседних рёбер тетраэдра, не умаляя общности, можно считать, что это M_{BD} и M_{CD} . Треугольник $M_{AB}M_{AC}M_{BC}$ — срединный треугольник треугольника ABC , а значит, подобен ему с коэффициентом $\frac{1}{2}$, откуда $AB = AC = BC = 2$. Кроме того, $BD = 2M_{AB}M_{AD} = 2$ и $CD = 2M_{AC}M_{AD} = 2$ так как $M_{AB}M_{AD}$ и $M_{AC}M_{AD}$ средние линии в треугольниках ABD и ACD соответственно.

Осталось найти длину ребра AD . Пусть X — точка пересечения медиан треугольника ABC (и, очевидно, треугольника $M_{AB}M_{AC}M_{BC}$ тоже). Тогда $M_{AD}X$ — высота правильного тетраэдра с ребром 1, то есть равна $\sqrt{\frac{2}{3}}$; в то же время AX составляет $\frac{2}{3}$ от медианы треугольника ABC , то есть $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Кроме того, они перпендикулярны, так как $M_{AD}X$ высота тетраэдра и перпендикулярна всей плоскости ABC , следовательно, по теореме Пифагора $M_{AD}A^2 = M_{AD}X^2 + AX^2 = \frac{6}{3} = 2$. Ну а $AD = 2M_{AD}A = 2\sqrt{2}$.

8. (5 баллов) Докажите, что для положительных x, y, z выполняется неравенство

$$(x + y + z)(4x + y + 2z)(2x + y + 8z) \geq \frac{375}{2}xyz.$$

Решение:

Рассмотрим первые две скобки и заметим, что

$$(x + y + z)(4x + y + 2z) = (2x + y)^2 + 3z(2x + y) + 2z^2 + xy.$$

Тогда мы можем переписать требуемое неравенство в виде

$$\left(\frac{(2x + y)^2 + 3z(2x + y) + 2z^2}{xy} + 1 \right) \cdot \frac{2x + y + 8z}{z} \geq \frac{375}{2}.$$

Теперь зафиксируем z и $2x + y$ и будем сдвигать $2x$ и y друг к другу. При этом xy увеличивается, и достигает максимума при $2x = y$, остальные части выражения остаются постоянными. Значит, требуемое равенство будет следовать из неравенства, полученного подстановкой в него $y = 2x$ т.е.

$$(3x + z)(6x + 2z)(4x + 8z) \geq 375x^2z.$$

Обозначим $t = x/z$, тогда неравенство превращается в

$$8(3t + 1)^2(t + 2) - 375t^2 \geq 0.$$

Взяв производную, можно убедиться, что минимум левой части достигается при $t = 4/3$ и равен 0, что доказывает требуемое неравенство. (таким образом, минимум исходного выражения достигается при $x : y : z = 4 : 8 : 3$.)

11 класс
2 вариант

1. (2 балла) Мальчик Вася выписал в тетрадку ненулевые коэффициенты многочлена $P(x)$ девятой степени. Затем у получившегося многочлена вычислил производную и выписал её ненулевые коэффициенты, и так далее, пока не получилась константа, которую он также выписал.

Какое наименьшее количество различных чисел у него могло получиться?

Коэффициенты выписываются с учётом знака, свободные члены также выписываются, если имеется одночлен вида $\pm x^n$, выписывается ± 1 .

Ответ: 9

Решение: Оценка: так как многочлен имеет степень 9, у него совершенно точно есть ненулевой коэффициент при x^9 , назовём его a . Тогда старший коэффициент производной этого многочлена равен $9a$, старший коэффициент второй производной равен $9 \cdot 8a$ и т.д., старшие коэффициенты восьмой и девятой производных равны $9!a$, причем все эти числа, кроме двух последних, различны, таким образом 9 различных чисел точно есть.

Пример: $\frac{x^9}{9!} + \frac{x^8}{8!} + \dots + x + 1$ даёт нам ровно 9 различных чисел, так как каждый следующий одночлен — производная предыдущего.

Также подходит любой многочлен пропорциональный данному, а также отличающийся от пропорционального данному вычёркиванием некоторых одночленов, например x^9 . Легко доказать, что других примеров нет, впрочем, в задаче это не требуется.

2. (2 балла) Решите уравнение или докажите, что оно не имеет решений: $5 \sin x - 12 \cos x = -13 - \frac{1}{|x|}$

Ответ: Решений нет.

Решение:

$5 \sin x + 12 \cos x = 13 \sin(x - \arctg \frac{12}{5}) \geq -13 > -13 - \frac{1}{|x|}$, следовательно, равенство невозможно.

3. (3 балла) В некоторой стране 50 городов. Министерство авиации требует, чтобы каждые два города были соединены двусторонним авиарейсом ровно одной авиакомпанией и чтобы рейсами каждой авиакомпании можно было бы добраться от любого города до любого (возможно, с пересадками). При каком наибольшем числе авиакомпаний это возможно?

Ответ: 25

Решение: Оценка: для того, чтобы соединить все города, авиакомпании надо иметь хотя бы 49 рейсов. Всего пар городов $50 \cdot 49/2$, значит, авиакомпаний не более 25.

Пример: обозначим города за $a_1, a_2, \dots, a_{25}, b_1, b_2, \dots, b_{25}$ каким-нибудь образом. Тогда авиакомпания с номером k будет соединять

- 1) города a_k и b_k ;
- 2) a_k и каждый город a_i , где $i < k$
- 3) a_k и каждый город b_i , где $i > k$
- 4) b_k и каждый город a_i , где $i > k$
- 5) b_k и каждый город b_i , где $i < k$.

Таким образом, города a_i и a_j оказываются соединены рейсом авиакомпании с номером $\max(a_i, a_j)$, города b_i и b_j — авиакомпанией с номером $\max(b_i, b_j)$, города a_i и b_j — авиакомпанией с номером $\min(b_i, b_j)$.

4. (3 балла) Докажите, что при $n = 3002$ сумма биномиальных коэффициентов с шагом 6, т.е. $C_n^1 + C_n^7 + \dots + C_n^{n-1}$, даёт остаток 1 при делении на 3.

C_n^k — количество способов выбрать из n предметов k , что составляет $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ если $0 \leq k \leq n$ и 0 в остальных случаях.

Решение:

Легко проверить, что $C_n^k = C_{n-3}^{k-3} + 3C_{n-3}^{k-2} + 3C_{n-3}^{k-1} + C_{n-3}^k$, следовательно, C_n^k даёт такой же остаток при делении на 3, что и $C_{n-3}^{k-3} + C_{n-3}^k$.

Таким образом, $C_n^1 + C_n^7 + \dots + C_n^{n-1}$ даёт такой же остаток при делении на 3, что и $C_{n-3}^1 + C_{n-3}^4 + \dots + C_{n-3}^{n-7} + C_{n-3}^{n-4}$ (здесь отброшены два крайних слагаемых, равные 0).

Обозначим эту сумму за S_{n-3} .

Аналогично переходим к $2C_{n-6}^1 + 2C_{n-6}^4 + \dots + 2C_{n-6}^{n-7} + 2C_{n-6}^{n-4} = 2S_{n-6}$.

Применив эту процедуру ещё 998 раз, получаем, что формула из условия даёт такой же остаток при делении на 3, что и $2^{999}S_2 = 4^{499} \cdot 2C_2^1 = 4^{500}$, что даёт остаток 1 при делении на 3.

5. (3 балла) Три окружности, радиусов $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ и $2\sqrt{\frac{39-18\sqrt{3}}{13}}$, расположены так, что треугольник, образованный центрами этих окружностей, является равносторонним со стороной 3. Найдите, чему равен радиус описанной вокруг треугольника, каждая из вершин которого является точкой пересечения двух из этих окружностей, дальней от центра третьей окружности.

Ответ: $12 - 6\sqrt{3}$

Решение:

Пусть A, B, C — указанные точки пересечения первой и второй, второй и третьей, первой и третьей окружностей соответственно, O_1, O_2, O_3 — центры этих окружностей.

Радиусы первой и второй окружностей равны, следовательно, точка A попадёт на серединный перпендикуляр к O_1O_2 . Треугольник, образованный центрами окружностей, правильный, поэтому точка O_3 также окажется на этом серединном перпендикуляре. Следовательно, вся картинка симметрична относительно этого серединного перпендикуляра, в частности, точки B и C симметричны друг другу.

Треугольник O_1AO_2 равнобедренный с вершиной A ; кроме того, его стороны равны $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ и 3 откуда легко ищутся его углы: 30° , 30° и 120° .

$\angle O_1AC$ обозначим за α , $\angle CO_1O_3$ за β . В треугольнике CO_1O_3 мы знаем все стороны, значит, мы можем найти

$$\cos \beta = \frac{3 + 9 - 4 \cdot \frac{39 - 18\sqrt{3}}{13}}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{12}{13}.$$

Соответственно, $\sin \beta = \frac{5}{13}$. Далее, $\angle AO_1C = \angle AO_1O_2 + \angle O_2O_1O_3 + \angle O_3O_1C = 30^\circ + 60^\circ + \beta = 90^\circ + \beta$

Треугольник CO_1A равнобедренный с углами α , $90^\circ + \beta$ и α , следовательно, $\alpha = \frac{90^\circ - \beta}{2}$, откуда

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos(90^\circ - \beta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sin \beta}{2}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Соответственно, $\sin \alpha = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Кроме того, $AC = 2O_1A \cos \alpha = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

$\angle BAC = 120 - 2\alpha = 30 + \beta$, следовательно,

$$\sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{13} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{13} = \frac{12 + 5\sqrt{3}}{26}.$$

$$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{12}{13} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{13} = \frac{12\sqrt{3} - 5}{26}.$$

$$\sin \angle ABC = \cos \frac{\angle BAC}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \angle BAC}{2}} = \sqrt{\frac{21 + 12\sqrt{3}}{52}} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{13}}.$$

По теореме синусов,

$$R = \frac{AC}{2 \sin \angle ABC} = \frac{\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{13}}}{2 \cdot \frac{2\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{13}}} = \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3} = \frac{6\sqrt{3}(2\sqrt{3} - 3)}{3} = 12 - 6\sqrt{3}$$

6. (3 балла) Найдите суммарную длину промежутков на числовой оси, на которых выполняются неравенства $|x| < 1$ и $\sin \log_3 |x| > 0$.

Ответ:

$$\frac{2}{1 + 3^\pi}$$

Решение:

Достаточно решить задачу для положительных x , а потом умножить результат на 2.

Если $\sin \log_3 x > 0$, значит, $2k\pi < \log_3 x < (2k+1)\pi$ для какого-то целого k , то есть $3^{2k\pi} < x < 3^{(2k+1)\pi}$. Так как $x < 1$, нас интересуют только отрицательные k . Обозначим $n = -k$. Число n принимает положительные значения, тогда длина промежутка положительности нашей функции, имеющего номер n при нумерации с левой стороны, равна $3^{-(2n-1)\pi} - 3^{-2n\pi} = 2^{-2(n-1)\pi}(3^{-\pi} - 3^{-2\pi})$.

Следовательно, длины всех промежутков составляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $3^{-2\pi}$, а их сумма равна $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-(2n-1)\pi} = \frac{3^{-\pi} - 3^{-2\pi}}{1 - 3^{-2\pi}} = \frac{3^{-\pi}}{1 + 3^{-\pi}} = \frac{1}{1 + 3^\pi}$.

Умножая это число на 2, получаем ответ.

7. (4 балла) Четыре из шести середин рёбер некоего тетраэдра образуют правильный тетраэдр с ребром $\frac{1}{2}$. Найдите рёбра исходного тетраэдра.

Ответ: Пять рёбер длины 1, одно ребро длины $\sqrt{2}$.

Решение:

Обозначим вершины тетраэдра A, B, C, D . Середину ребра AB обозначим за M_{AB} , аналогичные обозначения введём для остальных рёбер.

Пусть в правильный тетраэдр не попали середины скрещивающихся рёбер исходного тетраэдра, не умаляя общности, можно считать, что это M_{AB} и M_{CD} . Заметим, что отрезок $M_{BC}M_{BD}$ средняя линия в треугольнике

BCD , значит, он равен половине ребра CD по длине и параллелен этому ребру. Но то же самое можно сказать и про ребро $M_{AC}M_{AD}$, значит, эти отрезки параллельны и равны, т.е. образуют параллелограмм. Таким образом, четыре вершины, которые должны образовывать правильный тетраэдр, оказались лежащими в одной плоскости.

Значит, в правильный тетраэдр не попали середины соседних рёбер тетраэдра, не умаляя общности, можно считать, что это M_{BD} и M_{CD} . Треугольник $M_{AB}M_{AC}M_{BC}$ — срединный треугольник треугольника ABC , а значит, подобен ему с коэффициентом $\frac{1}{2}$, откуда $AB = AC = BC = 1$. Кроме того, $BD = 2M_{AB}M_{AD} = 1$ и $CD = 2M_{AC}M_{AD} = 1$ так как $M_{AB}M_{AD}$ и $M_{AC}M_{AD}$ средние линии в треугольниках ABD и ACD соответственно.

Осталось найти длину ребра AD . Пусть X — точка пересечения медиан треугольника ABC (и, очевидно, треугольника $M_{AB}M_{AC}M_{BC}$ тоже). Тогда $M_{AD}X$ — высота правильного тетраэдра с ребром $\frac{1}{2}$, то есть равна $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$; в то же время AX составляет $\frac{2}{3}$ от медианы треугольника ABC , то есть $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Кроме того, они перпендикулярны, так как $M_{AD}X$ высота тетраэдра и перпендикулярна всей плоскости ABC , следовательно, по теореме Пифагора $M_{AD}A^2 = M_{AD}X^2 + AX^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. Ну а $AD = 2M_{AD}A = \sqrt{2}$.

8. (5 баллов) Докажите, что для положительных x, y, z выполняется неравенство

$$(x + 9y + 3z)(x + y + z)(2x + 6y + 3z) \geq 324xyz$$

Рассмотрим первые две скобки и заметим, что

$$(x + 9y + 3z)(x + y + z) = (x + 3y)^2 + 4z(x + 3y) + 3z^2 + 4xy.$$

Тогда мы можем переписать требуемое неравенство в виде

$$\left(\frac{(x + 3y)^2 + 4z(x + 3y) + 3z^2}{xy} + 4 \right) \cdot \frac{2x + 6y + 3z}{z} \geq 324$$

Теперь зафиксируем z и $x + 3y$ и будем сдвигать x и $3y$ друг к другу. При этом xy увеличивается, и достигает максимума при $x = 3y$, остальные части выражения остаются постоянными. Значит, требуемое равенство будет следовать из неравенства, полученного подстановкой в него $x = 3y$ т.е.

$$(12y + 3z)(4y + z)(12y + 3z) \geq 972y^2z.$$

Обозначим $t = y/z$, тогда неравенство превращается в

$$9(4t + 1)^3 - 972t^2 \geq 0.$$

Взяв производную, можно убедиться, что минимум левой части достигается при $t = 1/2$ и равен 0, что доказывает требуемое неравенство. (таким образом, минимум исходного выражения достигается при $x : y : z = 3 : 1 : 2$.)

11 класс
3 вариант

1. (2 балла) Мальчик Вася выписал в тетрадку ненулевые коэффициенты многочлена $P(x)$ восьмой степени. Затем у получившегося многочлена вычислил производную и выписал её ненулевые коэффициенты, и так далее, пока не получилась константа, которую он также выписал.

Какое наименьшее количество различных чисел у него могло получиться?

Коэффициенты выписываются с учётом знака, свободные члены также выписываются, если имеется одночлен вида $\pm x^n$, выписывается ± 1 .

Ответ: 8

Решение: Оценка: так как многочлен имеет степень 8, у него совершенно точно есть ненулевой коэффициент при x^8 , назовём его a . Тогда старший коэффициент производной этого многочлена равен $8a$, старший коэффициент второй производной равен $8 \cdot 7a$ и т.д., старшие коэффициенты седьмой и восьмой производных равны $8!a$, причем все эти числа, кроме двух последних, различны, таким образом 8 различных чисел точно есть.

Пример: $\frac{x^8}{8!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + x + 1$ даёт нам ровно 8 различных чисел, так как каждый следующий одночлен — производная предыдущего.

Также подходит любой многочлен пропорциональный данному, а также отличающийся от пропорционального данному вычёркиванием некоторых одночленов, например x^8 . Легко доказать, что других примеров нет, впрочем, в задаче это не требуется.

2. (2 балла) Решите уравнение или докажите, что оно не имеет решений: $4 \sin x - 3 \cos x = 5 + \frac{1}{|x|}$

Ответ: Решений нет.

Решение:

$4 \sin x - 3 \cos x = 5 \sin(x - \arctg \frac{3}{4}) \leq 5 < 5 + \frac{1}{|x|}$, следовательно, равенство невозможно.

3. (3 балла) В некоторой стране 200 городов. Министерство авиации требует, чтобы каждые два города были соединены двусторонним авиарейсом ровно одной авиакомпанией и чтобы рейсами каждой авиакомпании можно было бы добраться от любого города до любого (возможно, с пересадками). При каком наибольшем числе авиакомпаний это возможно?

Ответ: 100

Решение: Оценка: для того, чтобы соединить все города, авиакомпании надо иметь хотя бы 199 рейсов. Всего пар городов $200 \cdot 199/2$, значит, авиакомпаний не более 100.

Пример: обозначим города за $a_1, a_2, \dots, a_{100}, b_1, b_2, \dots, b_{100}$ каким-нибудь образом. Тогда авиакомпания с номером k будет соединять

- 1) города a_k и b_k ;
- 2) a_k и каждый город a_i , где $i < k$
- 3) a_k и каждый город b_i , где $i > k$
- 4) b_k и каждый город a_i , где $i > k$
- 5) b_k и каждый город b_i , где $i < k$.

Таким образом, города a_i и a_j оказываются соединены рейсом авиакомпании с номером $\max(a_i, a_j)$, города b_i и b_j — авиакомпанией с номером $\max(b_i, b_j)$, города a_i и b_j — авиакомпанией с номером $\min(b_i, b_j)$.

4. (3 балла) Докажите, что при $n = 9002$ сумма биномиальных коэффициентов с шагом 6, т.е. $C_n^1 + C_n^7 + \dots + C_n^{n-1}$, даёт остаток 1 при делении на 3.

C_n^k — количество способов выбрать из n предметов k , что составляет $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ если $0 \leq k \leq n$ и 0 в остальных случаях.

Решение:

Легко проверить, что $C_n^k = C_{n-3}^{k-3} + 3C_{n-3}^{k-2} + 3C_{n-3}^{k-1} + C_{n-3}^k$, следовательно, C_n^k даёт такой же остаток при делении на 3, что и $C_{n-3}^{k-3} + C_{n-3}^k$.

Таким образом, $C_n^1 + C_n^7 + \dots + C_n^{n-1}$ даёт такой же остаток при делении на 3, что и $C_{n-3}^1 + C_{n-3}^4 + \dots + C_{n-3}^{n-7} + C_{n-3}^{n-4}$ (здесь отброшены два крайних слагаемых, равные 0).

Обозначим эту сумму за S_{n-3} .

Аналогично переходим к $2C_{n-6}^1 + 2C_{n-6}^4 + \dots + 2C_{n-6}^{n-7} + 2C_{n-6}^{n-4} = 2S_{n-6}$.

Применив эту процедуру ещё 2998 раз, получаем, что формула из условия даёт такой же остаток при делении на 3, что и $2^{2999} S_2 = 4^{1499} \cdot 2C_2^1 = 4^{1500}$, что даёт остаток 1 при делении на 3.

5. (3 балла) Три окружности, радиусов $\sqrt{13}$, $\sqrt{13}$ и $2\sqrt{13 - 6\sqrt{3}}$, расположены так, что треугольник, образованный центрами этих окружностей, является равносторонним со стороной $\sqrt{39}$. Найдите, чему равен радиус описанной вокруг треугольника, каждая из вершин которого является точкой пересечения двух из этих окружностей, дальней от центра третьей окружности.

Ответ: $4\sqrt{39} - 6\sqrt{13}$

Решение:

Пусть A, B, C — указанные точки пересечения первой и второй, второй и третьей, первой и третьей окружностей соответственно, O_1, O_2, O_3 — центры этих окружностей.

Радиусы первой и второй окружностей равны, следовательно, точка A попадёт на серединный перпендикуляр к O_1O_2 . Треугольник, образованный центрами окружностей, правильный, поэтому точка O_3 также окажется на этом серединном перпендикуляре. Следовательно, вся картинка симметрична относительно этого серединного перпендикуляра, в частности, точки B и C симметричны друг другу.

Треугольник O_1AO_2 равнобедренный с вершиной A ; кроме того, его стороны равны $\sqrt{13}$, $\sqrt{13}$ и $\sqrt{39}$ откуда легко ищутся его углы: 30° , 30° и 120° .

$\angle O_1AC$ обозначим за α , $\angle CO_1O_3$ за β . В треугольнике CO_1O_3 мы знаем все стороны, значит, мы можем найти

$$\cos \beta = \frac{13 + 39 - 4 \cdot 13 - 6\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{39}} = \frac{12}{13}.$$

Соответственно, $\sin \beta = \frac{5}{13}$. Далее, $\angle AO_1C = \angle AO_1O_2 + \angle O_2O_1O_3 + \angle O_3O_1C = 30^\circ + 60^\circ + \beta = 90^\circ + \beta$

Треугольник CO_1A равнобедренный с углами α , $90^\circ + \beta$ и α , следовательно, $\alpha = \frac{90^\circ - \beta}{2}$, откуда

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos(90^\circ - \beta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sin \beta}{2}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Соответственно, $\sin \alpha = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Кроме того, $AC = 2O_1A \cos \alpha = 2 \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 6$.

$\angle BAC = 120 - 2\alpha = 30 + \beta$, следовательно,

$$\sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{13} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{13} = \frac{12 + 5\sqrt{3}}{26}.$$

$$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{12}{13} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{13} = \frac{12\sqrt{3} - 5}{26}.$$

$$\sin \angle ABC = \cos \frac{\angle BAC}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \angle BAC}{2}} = \sqrt{\frac{21 + 12\sqrt{3}}{52}} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{13}}.$$

По теореме синусов,

$$R = \frac{AC}{2 \sin \angle ABC} = \frac{6}{2 \cdot \frac{2\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{13}}} = \frac{6\sqrt{13}}{2\sqrt{3} + 3} = \frac{6\sqrt{13}(2\sqrt{3} - 3)}{3} = 4\sqrt{39} - 6\sqrt{13}$$

6. (3 балла) Найдите суммарную длину промежутков на числовой оси, на которых выполняются неравенства $x < 1$ и $\lg \log_4 x > 0$.

Ответ:

$$\frac{1}{1 + 2^\pi} = \frac{1}{1 + 4^{\frac{\pi}{2}}}$$

Решение:

Заметим, что нас интересуют только положительные x .

Если $\lg \log_4 x > 0$, значит, $k\pi < \log_4 x < (k + \frac{1}{2})\pi$ для какого-то целого k , то есть $4^{k\pi} < x < 4^{(k+\frac{1}{2})\pi}$. Так как $x < 1$, нас интересуют только отрицательные k . Обозначим $n = -k$. Число n принимает положительные значения, тогда длина промежутка положительности нашей функции, имеющего номер n при нумерации с левой стороны, равна $4^{-(n-\frac{1}{2})\pi} - 4^{-n\pi} = 4^{-(n-1)\pi}(4^{-\frac{\pi}{2}} - 4^{-\pi})$.

Следовательно, длины всех промежутков составляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $4^{-\pi}$, а их сумма равна $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-(2n-1)\pi} = \frac{4^{-\frac{\pi}{2}} - 4^{-\pi}}{1 - 4^{-\pi}} = \frac{4^{-\frac{\pi}{2}}}{1 + 4^{-\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{1 + 4^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{1 + 2^\pi}$.

7. (4 балла) Четыре из шести середин рёбер некоего тетраэдра образуют правильный тетраэдр с ребром 2. Найдите рёбра исходного тетраэдра.

Ответ: Пять рёбер длины 4, одно ребро длины $4\sqrt{2}$.

Решение:

Обозначим вершины тетраэдра A, B, C, D . Середину ребра AB обозначим за M_{AB} , аналогичные обозначения введём для остальных рёбер.

Пусть в правильный тетраэдр не попали середины скрещивающихся рёбер исходного тетраэдра, не умаляя общности, можно считать, что это M_{AB} и M_{CD} . Заметим, что отрезок $M_{BC}M_{BD}$ средняя линия в треугольнике BCD , значит, он равен половине ребра CD по длине и параллелен этому ребру. Но то же самое можно сказать и про ребро $M_{AC}M_{AD}$, значит, эти отрезки параллельны и равны, т.е. образуют параллелограмм. Таким образом, четыре вершины, которые должны образовывать правильный тетраэдр, оказались лежащими в одной плоскости.

Значит, в правильный тетраэдр не попали середины соседних рёбер тетраэдра, не умаляя общности, можно считать, что это M_{BD} и M_{CD} . Треугольник $M_{AB}M_{AC}M_{BC}$ — серединный треугольник треугольника ABC , а значит, подобен ему с коэффициентом $\frac{1}{2}$, откуда $AB = AC = BC = 4$. Кроме того, $BD = 2M_{AB}M_{AD} = 4$ и $CD = 2M_{AC}M_{AD} = 4$ так как $M_{AB}M_{AD}$ и $M_{AC}M_{AD}$ средние линии в треугольниках ABD и ACD соответственно.

Осталось найти длину ребра AD . Пусть X — точка пересечения медиан треугольника ABC (и, очевидно, треугольника $M_{AB}M_{AC}M_{BC}$ тоже). Тогда $M_{AD}X$ — высота правильного тетраэдра с ребром 2, то есть равна $2\sqrt{\frac{2}{3}}$; в то же время AX составляет $\frac{2}{3}$ от медианы треугольника ABC , то есть $\frac{4}{\sqrt{3}}$. Кроме того, они перпендикулярны, так как $M_{AD}X$ высота тетраэдра и перпендикулярна всей плоскости ABC , следовательно, по теореме Пифагора $M_{AD}A^2 = M_{AD}X^2 + AX^2 = \frac{8+16}{3} = 8$. Ну а $AD = 2M_{AD}A = 4\sqrt{2}$.

8. (5 баллов) Докажите, что для положительных x, y, z выполняется неравенство

$$(x + 8y + 2z)(x + 2y + z)(x + 4y + 4z) \geq 256xyz$$

Решение:

Рассмотрим первые две скобки и заметим, что

$$(x + 8y + 2z)(x + 2y + z) = (x + 4y)^2 + 3z(x + 4y) + 2z^2 + 2xy.$$

Тогда мы можем переписать требуемое неравенство в виде

$$\left(\frac{(x + 4y)^2 + 3z(x + 4y) + 2z^2}{xy} + 2 \right) \cdot \frac{x + 4y + 4z}{z} \geq 256.$$

Теперь зафиксируем z и $x + 4y$ и будем сдвигать x и $4y$ друг к другу. При этом xy увеличивается, и достигает максимума при $x = 4y$, остальные части выражения остаются постоянными. Значит, требуемое равенство будет следовать из неравенства, полученного подстановкой в него $x = 4y$ т.е.

$$(12y + 2z)(6y + z)(8y + 4z) \geq 1024y^2z.$$

Обозначим $t = y/z$, тогда неравенство превращается в

$$8(6t + 1)^2(2t + 1) - 1024t^2 \geq 0.$$

Взяв производную, можно убедиться, что минимум левой части достигается при $t = 1/2$ и равен 0, что доказывает требуемое неравенство. (таким образом, минимум исходного выражения достигается при $x : y : z = 4 : 1 : 2$.)

11 класс
4 вариант

1. (2 балла) Мальчик Вася выписал в тетрадку ненулевые коэффициенты многочлена $P(x)$ седьмой степени. Затем у получившегося многочлена вычислил производную и выписал её ненулевые коэффициенты, и так далее, пока не получилась константа, которую он также выписал.

Какое наименьшее количество различных чисел у него могло получиться?

Коэффициенты выписываются с учётом знака, свободные члены также выписываются, если имеется одночлен вида $\pm x^n$, выписывается ± 1 .

Ответ: 7

Решение: Оценка: так как многочлен имеет степень 7, у него совершенно точно есть ненулевой коэффициент при x^7 , назовём его a . Тогда старший коэффициент производной этого многочлена равен $7a$, старший коэффициент второй производной равен $7 \cdot 6a$ и т.д., старшие коэффициенты шестой и седьмой производных равны $7!a$, причем все эти числа, кроме двух последних, различны, таким образом 7 различных чисел точно есть.

Пример: $\frac{x^7}{7!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + x + 1$ даёт нам ровно 7 различных чисел, так как каждый следующий одночлен — производная предыдущего.

Также подходит любой многочлен пропорциональный данному, а также отличающийся от пропорционального данному вычёркиванием некоторых одночленов, например x^7 . Легко доказать, что других примеров нет, впрочем, в задаче это не требуется.

2. (2 балла) Решите уравнение или докажите, что оно не имеет решений: $12 \sin x + 5 \cos x = 13 + \frac{1}{|x|}$

Ответ: Решений нет.

Решение:

$12 \sin x + 5 \cos x = 13 \sin(x + \arctg \frac{5}{12}) \leq 13 < 13 + \frac{1}{|x|}$, следовательно, равенство невозможно.

3. (3 балла) В некоторой стране 120 городов. Министерство авиации требует, чтобы каждые два города были соединены двусторонним авиарейсом ровно одной авиакомпанией и чтобы рейсами каждой авиакомпании можно было бы добраться от любого города до любого (возможно, с пересадками). При каком наибольшем числе авиакомпаний это возможно?

Ответ: 60

Решение: Оценка: для того, чтобы соединить все города, авиакомпании надо иметь хотя бы 119 рейсов. Всего пар городов $120 \cdot 119/2$, значит, авиакомпаний не более 60.

Пример: обозначим города за $a_1, a_2, \dots, a_{60}, b_1, b_2, \dots, b_{60}$ каким-нибудь образом. Тогда авиакомпания с номером k будет соединять

- 1) города a_k и b_k ;
- 2) a_k и каждый город a_i , где $i < k$
- 3) a_k и каждый город b_i , где $i > k$
- 4) b_k и каждый город a_i , где $i > k$
- 5) b_k и каждый город b_i , где $i < k$.

Таким образом, города a_i и a_j оказываются соединены рейсом авиакомпании с номером $\max(a_i, a_j)$, города b_i и b_j — авиакомпании с номером $\max(b_i, b_j)$, города a_i и b_j — авиакомпании с номером $\min(b_i, b_j)$.

4. (3 балла) Докажите, что при $n = 12002$ сумма биномиальных коэффициентов с шагом 6, т.е. $C_n^1 + C_n^7 + \dots + C_n^{n-1}$, даёт остаток 1 при делении на 3.

C_n^k — количество способов выбрать из n предметов k , что составляет $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ если $0 \leq k \leq n$ и 0 в остальных случаях.

Решение:

Легко проверить, что $C_n^k = C_{n-3}^{k-3} + 3C_{n-3}^{k-2} + 3C_{n-3}^{k-1} + C_{n-3}^k$, следовательно, C_n^k даёт такой же остаток при делении на 3, что и $C_{n-3}^{k-3} + C_{n-3}^k$.

Таким образом, $C_n^1 + C_n^7 + \dots + C_n^{n-1}$ даёт такой же остаток при делении на 3, что и $C_{n-3}^1 + C_{n-3}^4 + \dots + C_{n-3}^{n-7} + C_{n-3}^{n-4}$ (здесь отброшены два крайних слагаемых, равные 0).

Обозначим эту сумму за S_{n-3} .

Аналогично переходим к $2C_{n-6}^1 + 2C_{n-3}^4 + \dots + 2C_{n-3}^{n-7} + 2C_{n-3}^{n-4} = 2S_{n-6}$.

Применив эту процедуру ещё 3998 раз, получаем, что формула из условия даёт такой же остаток при делении на 3, что и $2^{3999} S_2 = 4^{1999} \cdot 2C_2^1 = 4^{2000}$, что даёт остаток 1 при делении на 3.

5. (3 балла) Три окружности, радиусов $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ и $\sqrt{\frac{13-6\sqrt{3}}{13}}$, расположены так, что треугольник, образованный центрами этих окружностей, является равносторонним со стороной $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите, чему равен радиус описанной вокруг треугольника, каждая из вершин которого является точкой пересечения двух из этих окружностей, дальней от центра третьей окружности.

Ответ: $2\sqrt{3} - 3$

Решение:

Пусть A, B, C — указанные точки пересечения первой и второй, второй и третьей, первой и третьей окружностей соответственно, O_1, O_2, O_3 — центры этих окружностей.

Радиусы первой и второй окружностей равны, следовательно, точка A попадёт на серединный перпендикуляр к O_1O_2 . Треугольник, образованный центрами окружностей, правильный, поэтому точка O_3 также окажется на этом серединном перпендикуляре. Следовательно, вся картинка симметрична относительно этого серединного перпендикуляра, в частности, точки B и C симметричны друг другу.

Треугольник O_1AO_2 равнобедренный с вершиной A ; кроме того, его стороны равны $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда легко ищутся его углы: 30° , 30° и 120° .

$\angle O_1AC$ обозначим за α , $\angle CO_1O_3$ за β . В треугольнике CO_1O_3 мы знаем все стороны, значит, мы можем найти

$$\cos \beta = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{13-6\sqrt{3}}{13}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{13}.$$

Соответственно, $\sin \beta = \frac{5}{13}$. Далее, $\angle AO_1C = \angle AO_1O_2 + \angle O_2O_1O_3 + \angle O_3O_1C = 30^\circ + 60^\circ + \beta = 90^\circ + \beta$

Треугольник CO_1A равнобедренный с углами α , $90^\circ + \beta$ и α , следовательно, $\alpha = \frac{90^\circ - \beta}{2}$, откуда

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos(90^\circ - \beta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sin \beta}{2}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Соответственно, $\sin \alpha = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Кроме того, $AC = 2O_1A \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$.
 $\angle BAC = 120 - 2\alpha = 30 + \beta$, следовательно,

$$\sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{13} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{13} = \frac{12 + 5\sqrt{3}}{26}.$$

$$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{12}{13} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{13} = \frac{12\sqrt{3} - 5}{26}.$$

$$\sin \angle ABC = \cos \frac{\angle BAC}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \angle BAC}{2}} = \sqrt{\frac{21 + 12\sqrt{3}}{52}} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{13}}.$$

По теореме синусов,

$$R = \frac{AC}{2 \sin \angle ABC} = \frac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{2 \cdot \frac{2\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{13}}} = \frac{3}{2\sqrt{3} + 3} = \frac{3(2\sqrt{3} - 3)}{3} = 2\sqrt{3} - 3$$

6. (3 балла) Найдите суммарную длину промежутков на числовой оси, на которых выполняются неравенства $|x| < 1$ и $\operatorname{tg} \log_5 |x| < 0$.

Ответ:

$$\frac{2 \cdot 5^{\frac{\pi}{2}}}{1 + 5^{\frac{\pi}{2}}}$$

Решение:

Достаточно решить задачу для положительных x , а потому умножить результат на 2.

Если $\operatorname{tg} \log_5 x < 0$, значит, $\pi(k - \frac{1}{2}) < \log_5 x < \pi k$ для какого-то целого k , то есть $5^{\pi(k - \frac{1}{2})} < x < 5^{\pi k}$. Так как $x < 1$, нас интересуют только неположительные k . Обозначим $n = -k$. Число n принимает неотрицательные значения, тогда длина промежутка отрицательности нашей функции, имеющего номер n при нумерации с левой стороны (нумерация начинается с 0), равна $5^{-\pi n} - 5^{-\pi(n + \frac{1}{2})} = 5^{-\pi n}(1 - 5^{-\frac{\pi}{2}})$.

Следовательно, длины всех промежутков составляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $5^{-\pi}$, а их сумма равна $\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-\pi n}(1 - 5^{-\frac{\pi}{2}}) = \frac{1 - 5^{-\frac{\pi}{2}}}{1 - 5^{-\pi}} = \frac{1}{1 + 5^{-\frac{\pi}{2}}} = \frac{5^{\frac{\pi}{2}}}{1 + 5^{\frac{\pi}{2}}}.$

Умножая это число на 2, получаем ответ.

7. (4 балла) Четыре из шести середин рёбер некоего тетраэдра образуют правильный тетраэдр с ребром 3. Найдите рёбра исходного тетраэдра.

Ответ: Пять рёбер длины 6, одно ребро длины $6\sqrt{2}$.

Решение:

Обозначим вершины тетраэдра A, B, C, D . Середину ребра AB обозначим за M_{AB} , аналогичные обозначения введём для остальных рёбер.

Пусть в правильный тетраэдр не попали середины скрещивающихся рёбер исходного тетраэдра, не умаляя общности, можно считать, что это M_{AB} и M_{CD} . Заметим, что отрезок $M_{BC}M_{BD}$ средняя линия в треугольнике BCD , значит, он равен половине ребра CD по длине и параллелен этому ребру. Но то же самое можно сказать и

про ребро $M_{AC}M_{AD}$, значит, эти отрезки параллельны и равны, т.е. образуют параллелограмм. Таким образом, четыре вершины, которые должны образовывать правильный тетраэдр, оказались лежащими в одной плоскости.

Значит, в правильный тетраэдр не попали середины соседних рёбер тетраэдра, не умаляя общности, можно считать, что это M_{BD} и M_{CD} . Треугольник $M_{AB}M_{AC}M_{BC}$ — срединный треугольник треугольника ABC , а значит, подобен ему с коэффициентом $\frac{1}{2}$, откуда $AB = AC = BC = 6$. Кроме того, $BD = 2M_{AB}M_{AD} = 6$ и $CD = 2M_{AC}M_{AD} = 6$ так как $M_{AB}M_{AD}$ и $M_{AC}M_{AD}$ средние линии в треугольниках ABD и ACD соответственно.

Осталось найти длину ребра AD . Пусть X — точка пересечения медиан треугольника ABC (и, очевидно, треугольника $M_{AB}M_{AC}M_{BC}$ тоже). Тогда $M_{AD}X$ — высота правильного тетраэдра с ребром 3, то есть равна $3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6}$; в то же время AX составляет $\frac{2}{3}$ от медианы треугольника ABC , то есть $2\sqrt{3}$. Кроме того, они перпендикулярны, так как $M_{AD}X$ высота тетраэдра и перпендикулярна всей плоскости ABC , следовательно, по теореме Пифагора $M_{AD}A^2 = M_{AD}X^2 + AX^2 = 6 + 12 = 18$. Ну а $AD = 2M_{AD}A = 6\sqrt{2}$.

8. (5 баллов) Докажите, что для положительных x, y, z выполняется неравенство

$$(x + 9y + 3z)(x + 4y + 2z)(2x + 12y + 9z) \geq 1029xyz$$

Решение:

Рассмотрим первые две скобки и заметим, что

$$(x + 9y + 3z)(x + 4y + 2z) = (x + 6y)^2 + 5z(x + 6y) + 6z^2 + xy.$$

Тогда мы можем переписать требуемое неравенство в виде

$$\left(\frac{(x + 6y)^2 + 5z(x + 6y) + 6z^2}{xy} + 1 \right) \cdot \frac{2x + 12y + 9z}{z} \geq 1029.$$

Теперь зафиксируем z и $x + 6y$ и будем сдвигать x и $6y$ друг к другу. При этом xy увеличивается, и достигает максимума при $x = 6y$, остальные части выражения остаются постоянными. Значит, требуемое равенство будет следовать из неравенства, полученного подстановкой в него $x = 6y$ т.е.

$$(15y + 3z)(10y + 2z)(24y + 9z) \geq 1029 \cdot 6y^2z.$$

Обозначим $t = y/z$, тогда неравенство превращается в

$$18(5t + 1)^2(8t + 3) - 1029 \cdot 6t^2 \geq 0.$$

Взяв производную, можно убедиться, что минимум левой части достигается при $t = 1/2$ и равен 0, что доказывает требуемое неравенство. (таким образом, минимум исходного выражения достигается при $x : y : z = 6 : 1 : 2$.)

II. Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады для 11 класса

Задача 1. (1 балл)

1. Дана функция $f(x) = \frac{x + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}x}$. Найдите $\underbrace{f(f(\dots(-\sqrt{3}-2)\dots))}_{2015 \text{ раз}}$.

Ответ: 1

2. Дана функция $f(x) = \frac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{3}x + 1}$. Найдите $\underbrace{f(f(\dots(\sqrt{3})\dots))}_{2017 \text{ раз}}$.

Ответ: 0

3. Дана функция $f(x) = \frac{\sqrt{3}x - 1}{x + \sqrt{3}}$. Найдите $\underbrace{f(f(\dots(1)\dots))}_{2013 \text{ раз}}$.

Ответ: -1

Примеры записи ответов:

1/4

0,25

10

Задача 2. (2 балла)

1. На доске было написано число от 0 до 2 включительно. Каждый из тридцати учеников класса подходил к доске, стирал написанное там на данный момент число x и писал вместо него $\cos \frac{\pi}{2}x$. При каком начальном значении числа итоговый результат будет максимальным? Если ответов несколько, укажите их в произвольном порядке через точку с запятой.

Ответ: 1

2. На доске было написано число от нуля до двух включительно. Каждый из тридцати учеников класса подходил к доске, стирал написанное там на данный момент число x и писал вместо него $\cos \frac{\pi}{2}x$. При каком начальном значении числа итоговый результат будет минимальным? Если ответов несколько, укажите их в произвольном порядке через точку с запятой.

Ответ: 0; 2 | 2; 0

3. На доске было написано число от 0 до 1 включительно. Каждый из двадцати пяти учеников класса подходил к доске, стирал написанное там на данный момент число x и писал вместо него $\frac{1}{2} \cos \pi x$. При каком начальном значении числа итоговый результат будет максимальным?

Если ответов несколько, укажите их в произвольном порядке через точку с запятой.

Ответ: 0; 1 || 1; 0

Примеры записи ответов:

1/4

0,25; 0,5

Задача 3. (2 балла)

1. Многочлен $P(x)$ третьей степени, а также его первая, вторая и третья производные принимают при $x = 6$ значение 1. Найдите $P(0)$.

Ответ: -23

2. Многочлен $P(x)$ третьей степени, а также его первая, вторая и третья производные принимают при $x = 3$ значение 1. Найдите $P(0)$.

Ответ: -2

3. Многочлен $P(x)$ третьей степени, а также его первая, вторая и третья производные принимают при $x = -3$ значение 1. Найдите $P(0)$.

Ответ: 13

Примеры записи ответов:

1/4

0,25

-10

Задача 4. (3 балла)

1. В пространстве даны 34 различных вектора с натуральными координатами, начинающиеся в точке $(0; 0; 0)$. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех их координат?

Ответ: 203

2. В пространстве даны 36 различных векторов с натуральными координатами, начинающиеся в точке $(0; 0; 0)$. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех их координат?

Ответ: 218

3. В пространстве даны 37 различных векторов с целыми неотрицательными координатами, начинающиеся в точке $(0; 0; 0)$. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех их координат?

Ответ: 115

Примеры записи ответов:

239

Ответ: [-1;7]

Задача 5. (3 балла)

1. Даны равенства $\log_a b + \log_b c + \log_c a = \log_b a + \log_c b + \log_a c = 3,5$. Найдите $\log_a b$.
Если ответов несколько, укажите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 1/2; 1; 2 | 0,5; 1; 2

2. Даны равенства $\log_a b + \log_b c + \log_c a = \log_b a + \log_c b + \log_a c = -1,5$. Найдите $\log_a b$.
Если ответов несколько, укажите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: -2; -1/2; 1 | -2; -0,5; 1

3. Даны равенства $\log_a b + \log_b c + \log_c a = \log_b a + \log_c b + \log_a c = -1$. Найдите $\log_a b$.
Если ответов несколько, укажите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: -1; 1

Примеры записи ответов:

1/4

0,25; 0,5

Задача 6. (3 балла)

1. Даны четыре сферы радиуса $\frac{\sqrt{6}}{2} - 1$, попарно касающиеся друг друга внешним образом. Найдите радиус сферы, которой они все касаются внутренним образом.

Ответ: 0,5 | 1/2

2. Даны четыре сферы радиуса $\sqrt{6} + 2$, попарно касающиеся друг друга внешним образом. Найдите радиус сферы, которой они все также касаются внешним образом.

Ответ: 1

3. Четыре сферы радиуса r попарно касаются друг друга внешним образом. Сфера радиуса $\sqrt{6} + 2$ касается их всех внутренним образом. Найдите r .

Ответ: 2

Примеры записи ответов:

1/4

0,25

10

Задача 7. (3 балла)

1. При каких значениях параметров a и b (a не равно b) множество значений функции $a\sqrt{(a-x)(x-b)} - b$ совпадает с областью её определения? В ответе укажите все возможные значения числа a в произвольном порядке через точку с запятой.

Ответ: -2; 2 | 2; -2

2. При каких значениях параметров a и b (a не равно b) множество значений функции $a\sqrt{(b-x)(x-a)}+b$ совпадает с областью её определения? В ответе укажите все возможные значения числа a в произвольном порядке через точку с запятой.

Ответ: -2; 2 | 2; -2

3. При каких значениях параметров a и b (a не равно b) множество значений функции $a(\sqrt{(a-x)(x-b)}-b)$ совпадает с областью её определения? В ответе укажите все возможные значения числа b в произвольном порядке через точку с запятой.

Ответ: 0; -1 | -1; 0

Примеры записи ответов:

1/4

0,25; 0,5

Задача 8. (4 балла)

1. При каких значениях параметра a неравенство $(a^2-8a+12)|x|+(-a+8)\sqrt{x^2-1}>0$ не имеет решений? Ответ записать в виде промежутка. Если множество ответов состоит из нескольких промежутков, перечислить их через точку с запятой.

Ответ: [4;5]

2. При каких значениях параметра a неравенство $(a^2-a-6)|x|+(-a-9)\sqrt{x^2-4}>0$ не имеет решений? Ответ записать в виде промежутка. Если множество ответов состоит из нескольких промежутков, перечислить их через точку с запятой.

Ответ: [-2;3]

3. При каких значениях параметра a неравенство $(a^2-6a-7)|x|+(-a-19)\sqrt{x^2-9}>0$ не имеет решений? Ответ записать в виде промежутка. Если множество ответов состоит из нескольких промежутков, перечислить их через точку с запятой.

Ответ: [-1;7]

Примеры записи ответов:

[1; 2)

[0; 1]; (2; 3)

Задача 9. (4 балла)

1. В городе Джентльвилле живут 15 джентльменов, любые двое из которых либо дружат, либо враждуют. В какой-то момент каждый джентльмен попросил каждого из своих друзей послать открытку ненависти каждому из своих врагов (джентльмен А просит джентльмена В послать открытку всем врагам джентльмена В). Каждый из джентльменов выполнил все просьбы, при этом он посылал каждому из своих врагов такое количество открыток, сколько раз его об этом просили. Какое наибольшее количество открыток могло быть послано?

Ответ: 734.

2. В городе Джентльтауне живут 11 джентльменов, любые двое из которых либо дружат, либо враждуют. В какой-то момент каждый джентльмен попросил каждого из своих друзей послать открытку ненависти каждому из своих врагов (джентльмен А просит джентльмена В послать открытку всем врагам джентльмена В). Каждый из джентльменов выполнил все просьбы, при этом он посылал каждому из своих врагов такое количество открыток, сколько раз его об этом просили. Какое наибольшее количество открыток могло быть послано?

Ответ: 274.

3. В городе Джентль-сити живут 19 джентльменов, любые двое из которых либо дружат, либо враждуют. В какой-то момент каждый джентльмен попросил каждого из своих друзей послать открытку ненависти каждому из своих врагов (джентльмен А просит джентльмена В послать открытку всем врагам джентльмена В). Каждый из джентльменов выполнил все просьбы, при этом он посылал каждому из своих врагов такое количество открыток, сколько раз его об этом просили. Какое наибольшее количество открыток могло быть послано?

Ответ: 1538.

Примеры записи ответов:

100

Задача 10. (5 баллов)

1. ABCD — трапеция с основаниями $AD = 16$ и $BC = 8$. O — одна из точек пересечения окружностей, построенных на боковых сторонах трапеции как на диаметрах и эта точка лежит внутри трапеции. Треугольник BCM построен на стороне BC во внешнюю относительно трапеции сторону и подобен треугольнику ADO (вершины треугольников перечислены в том порядке, в котором они соответствуют друг другу). Прямая OM пересекает основания BC и AD в точках K и L соответственно. Известно, что $OK = 5$, $OL = 6$. Найдите наибольшее из возможных значений длины отрезка BK .

Ответ: 5

2. ABCD — трапеция с основаниями $AD = 14$ и $BC = 9$. O — одна из точек пересечения окружностей, построенных на боковых сторонах трапеции как на диаметрах и эта точка лежит внутри трапеции. Треугольник BCM построен на стороне BC во внешнюю относительно трапеции сторону и подобен треугольнику ADO (вершины треугольников перечислены в том порядке, в котором они соответствуют друг другу). Прямая OM пересекает основания BC и AD в точках K и L соответственно. Известно, что $OK = 4$, $OL = 7$. Найдите наибольшее из возможных значений длины отрезка BK .

Ответ: 6

3. ABCD — трапеция с основаниями $AD = 15$ и $BC = 10$. O — одна из точек пересечения окружностей, построенных на боковых сторонах трапеции как на диаметрах и эта точка лежит внутри трапеции. Треугольник BCM построен на стороне BC во внешнюю относительно трапеции сторону и подобен треугольнику ADO (вершины треугольников перечислены в том порядке, в котором они соответствуют друг другу). Прямая OM пересекает основания BC и AD в точках K и L соответственно. Известно, что $OK = 4$, $OL = 9$.

Найдите наименьшее из возможных значений длины отрезка BK .

Ответ: 4

Примеры записи ответов:

$\frac{1}{4}$

0,25

10

III. Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады для 11 класса

Задача 1. (2 балла)

1. На доске записано шесть натуральных чисел, таких, что для любых двух a и b из них (где $b > a$), $\log_a b$ – целое число. Какое наименьшее значение может принимать максимальное из этих чисел?

Ответ можно записать в виде степени числа: m^n обозначается как m^n .

Ответ: 4294967296 || 2^{32} || 4^{16} || 16^8 || 256^4

2. На доске записано шесть натуральных чисел, таких, что для любых двух a и b из них, $\log_a b$ или $\log_b a$ – целое число (второй логарифм при этом не обязан существовать). Какое наименьшее значение может принимать максимальное из этих чисел?

Ответ можно записать в виде степени числа: m^n обозначается как m^n .

Ответ: 65536 || 2^{16} || 4^8 || 16^4 || 256^2

3. На доске записано пять нечётных чисел, таких, что для любых двух a и b из них (где $b > a$), $\log_a b$ – целое число. Какое наименьшее значение может принимать максимальное из этих чисел?

Ответ можно записать в виде степени числа: m^n обозначается как m^n .

Ответ: 43046721 || 3^{16} || 9^8 || 81^4

Примеры записи ответов:

12345678

7^{14}

Задача 2. (2 балла)

1. Пусть $f(x)$ – монотонно возрастающая непрерывная функция на промежутке $[0; 20,5]$, такая что $f(0) = 1$. Площадь её подграфика равна 100. Какое наибольшее количество точек, обе координаты которых натуральны, может содержать этот подграфик?

Ответ: 178

2. Пусть $f(x)$ – монотонно возрастающая непрерывная функция на промежутке $[0; 10,5]$, такая что $f(0) = 2$. Площадь её подграфика равна 200. Какое наибольшее количество точек, обе координаты которых натуральны, может содержать этот подграфик?

Ответ: 377

3. Пусть $f(x)$ – монотонно возрастающая непрерывная функция на промежутке $[0; 5,5]$, такая что $f(0) = 3$. Площадь её подграфика равна 50. Какое наибольшее количество точек, обе координаты которых натуральны, может содержать этот подграфик?

Ответ: 81

Задача 3. (2 балла)

1. Последовательность задана следующими условиями: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \cos(\operatorname{arccotg}(x_n))$. Найдите $x_{4\,000\,000}$.

Ответ: 0,0005 || 0.0005 || 1/2000

2. Последовательность задана следующими условиями: $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \sin(\arctg(x_n))$. Найдите x_{999999} .

Ответ: 0,0001 || 0.0001 || 1/10000

3. Последовательность задана следующими условиями: $x_1 = 0,5$, $x_{n+1} = \cos(\operatorname{arccctg}(x_n))$. Найдите x_{999997} .

Ответ: 0,001 || 0.001 || 1/1000

Задача 4. (3 балла)

1. Кубический многочлен имеет три корня, которые образуют геометрическую прогрессию со вторым членом 7. Пусть a и b – корни производной этого многочлена. Найдите .

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Ответ: 2/7

2. Кубический многочлен имеет три корня, которые образуют геометрическую прогрессию со вторым членом 8. Пусть a и b – корни производной этого многочлена. Найдите .

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Ответ: 1/4 || 0,25 || 0.25

3. Кубический многочлен имеет три корня, которые образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Пусть a и b – корни производной этого многочлена. Известно, что . Найдите средний из корней многочлена.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 4$$

Ответ: 1/2 || 0,5 || 0.5 || 2/4

Примеры записи ответов:

7,4

7/14

714

Задача 5. (3 балла)

1. $ABCA_1B_1C_1$ – прямая треугольная описанная призма. Периметр основания ABC составляет 26 единиц, а произведение сторон – 312 кубических единиц. Площадь поверхности призмы 78 квадратных единиц. Найдите квадрат радиуса её описанной сферы.

Ответ: 37

2. $ABCA_1B_1C_1$ – прямая треугольная описанная призма. Периметр основания ABC составляет 22 единицы, а произведение сторон – 220 кубических единиц. Площадь поверхности призмы 66 квадратных единиц. Найдите квадрат радиуса её описанной сферы.

Ответ: 26

3. $ABCA_1B_1C_1$ – прямая треугольная описанная призма. Периметр основания ABC составляет

32 единицы, а произведение сторон – 896 кубических единицы. Площадь поверхности призмы 192 квадратных единицы. Найдите квадрат радиуса её описанной сферы.

Ответ: 53

Примеры записи ответов:

7,4

7/14

714

Задача 6. (3 балла)

1. В клетках таблицы 6х6 расставлены числа от 0 до 15 (включительно). В какой-то момент каждое число заменили на среднее арифметическое его и всех его соседних по стороне чисел. На какое наибольшее число могла увеличиться сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 16

2. В клетках таблицы 7х7 расставлены числа от 0 до 15 (включительно). В какой-то момент каждое число заменили на среднее арифметическое его и всех его соседних по стороне чисел. На какое наибольшее число могла уменьшиться сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 19

3. В клетках таблицы 5х5 расставлены числа от 0 до 30 (включительно). В какой-то момент каждое число заменили на среднее арифметическое его и всех его соседних по стороне чисел. На какое наибольшее число могла увеличиться сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 26

Задача 7. (3 балла)

1. Какое наибольшее количество векторов длины 4 на плоскости можно взять так, чтобы все их скалярные произведения были целыми?

Ответ: 10

2. Какое наибольшее количество векторов длины 5 на плоскости можно взять так, чтобы все их скалярные произведения были целыми?

Ответ: 12

3. Какое наибольшее количество векторов длины $\sqrt{5}$ на плоскости можно взять так, чтобы все их скалярные произведения были целыми?

Ответ: 8

Задача 8. (3 балла)

1. При каком значении параметра a область определения функции $f(x) = \ln^2(a^2 - x) + a + 2$ и множество её значений не пересекаются и дают в объединении всю числовую ось? Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -1; 2 || 2; -1 || 2, -1

2. При каком значении параметра a область определения функции $f(x) = a^2 + a - 3 - \ln^2(x + a)$ и множество её значений не пересекаются и дают в объединении всю числовую ось?
Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 1; -3 || -3; 1 || 1, -3

3. При каком значении параметра a область определения функции $f(x) = a^2 + 4a + 2 - \ln^2(x - a)$ и множество её значений не пересекаются и дают в объединении всю числовую ось?
Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -1; -2 || -2; -1 || -1, -2 || -2; -1

Задача 9. (3 балла)

1. Числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} xy = (7 - \sqrt{50})z \\ xz + yz - (6 + \sqrt{50})z = -1 \\ xyz + x + y + z = 0 \end{cases}$$

Найдите значение выражения $\frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{z}$.

Ответ: 13

2. Числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} xz = (6 - \sqrt{47})y \\ xy + yz - (5 + \sqrt{47})y = -1 \\ xyz + x + y + z = 0 \end{cases}$$

Найдите значение выражения $\frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{y}$.

Ответ: 11

3. Числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} yz = (8 - \sqrt{111})x \\ xz + xy - (7 + \sqrt{111})x = -1 \\ xyz + x + y + z = 0 \end{cases}$$

Найдите значение выражения $\frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{x}$.

Ответ: 15

Задача 10. (4 балла)

1. Окружности O_1 и O_2 , имеющие радиусы 2 и 3 касаются друг друга внешним образом, а окружности O_3 радиуса 6 – внутренним образом. Найдите квадрат длины заключённого внутри O_3 участка общей касательной к O_1 и O_2 , проведённой в точке их касания.

Ответ: 143,84 || 143.84 || 3596/25

2. Окружности O_1 и O_2 , имеющие радиусы 39 и 130 касаются друг друга внешним образом, а окружности O_3 радиуса 195 – внутренним образом. Найдите квадрат длины заключённого внутри O_3 участка общей касательной к O_1 и O_2 , проведённой в точке их касания.

Ответ: 151316

3. Окружности O_1 и O_2 , имеющие радиусы 4 и 21 касаются друг друга внешним образом, а окружности O_3 радиуса 28 – внутренним образом. Найдите квадрат длины заключённого внутри O_3 участка общей касательной к O_1 и O_2 , проведённой в точке их касания.

Ответ: 3119,3536 || 1949596/625

Примеры записи ответов:

7,4

7/14

714

IV. Задания заключительного этапа олимпиады для 10 класса

10 класс
1 вариант

1. (1 балла)

У Коли в тетради был записан многочлен сотой степени. Коля может взять один из записанных в тетради многочленов, прибавить a к коэффициенту при k -ой степени и вычесть $2a$ из коэффициента при $(k+1)$ -й степени, после чего записать полученный многочлен в тетрадь к уже имеющимся. Могут ли у него в тетради после некоторого количества таких действий оказаться два многочлена, один из которых строго больше другого?

Если коэффициент при какой-то степени равен нулю, с ним тоже можно производить эту операцию.

Ответ: Нет.

Решение: Заметим, что при этих операциях не меняется значение многочлена в точке $\frac{1}{2}$, значит, все многочлены, оказавшиеся у Коли в тетрадке, будут совпадать в этой точке, и поэтому ни один из них не будет строго больше другого.

2. (2 балла) Решите уравнение $f^{-1}(g(x)) = h(x)$, где $f^{-1}(x)$ – обратная функция к $f(x)$, если известно, что $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + 8x + 8$, $h(x) = x + 1$.

Ответ: $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Решение: Можно переписать исходное уравнение как $g(x) = f(h(x))$, то есть как $(x+1)^3 + 2(x+1)^2 + 3(x+1) + 1 = x^4 - x^3 + 4x^2 + 8x + 8$.

Раскроем скобки и перенесём всё в правую часть: $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$. Заметим, что многочлен в левой части делится на $x^2 + x + 1$. Этот трёхчлен не имеет корней, а вот частное имеет: это трёхчлен $x^2 - 3x + 1$, и его корни $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

3. (3 балла) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность S . Окружности S_1 и S_2 равного радиуса касаются окружности S изнутри в точках A и C соответственно. Окружность S_1 пересекается со сторонами AB и AD в точках K и N соответственно, окружность S_2 пересекается со сторонами BC и CD в точках L и M соответственно. Докажите, что $KLMN$ – параллелограмм.

Решение:

Заметим, что треугольник AKN подобен треугольнику ABD с коэффициентом подобия $\frac{r}{R}$, где R – радиус окружности S , а r – радиус окружностей S_1 и S_2 . Аналогично треугольник CML подобен треугольнику CBD с той же коэффициентом.

Отсюда отрезки KN и ML параллельны отрезку BD и относятся к нему как $\frac{r}{R}$, то есть они параллельны и равны. Значит, $KLMN$ – параллелограмм, что и требовалось доказать.

4. (3 балла) Докажите, что сумма бесконечной арифметической прогрессии и бесконечной непостоянной геометрической прогрессии никогда не будет арифметической прогрессией.

Решение:

Утверждение задачи эквивалентно тому, что разность двух арифметических прогрессий не бывает геометрической прогрессией. Но разность двух арифметических прогрессий – это арифметическая прогрессия, а арифметическая прогрессия больше чем из двух членов не может совпадать с геометрической, потому что у арифметической прогрессии разность между соседними членами постоянна, а у геометрической с увеличением номера на 1 разность увеличивается в q раз, где q – знаменатель прогрессии.

5. (3 балла) Сколькими способами фигуру, изображённую на рисунке, можно раскрасить по клеткам в синий, красный и белый цвета так, чтобы соседние (т.е. имеющие общие стороны) клетки были раскрашены в разные цвета?

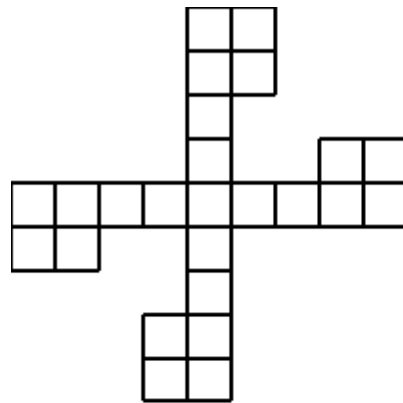
Ответ: $3 \cdot 48^4$

Решение: Центральную клетку можно раскрасить тремя способами. После этого нам осталось раскрасить четыре одинаковых фигурки из шести клеток с одним и тем же ограничением на цвет клетки, соседней с центральной (назовём её клеткой А).

Рассмотрим квадрат 2×2 . В таком квадрате должны быть две клетки одного цвета и расположены они должны быть по диагонали. Двумя способами выбираем диагональ, тремя способами её цвет и ещё по два способа на выбор цвета для остальных клеток, итого 24 способа. Однако при этом квадраты, покрашенные в два цвета мы посчитали дважды, поэтому остаётся 18 способом.

При этом, очевидно, для каждого из трёх цветов есть по 6 способов таких, что клетка, соседняя не только с клетками квадрата, имеет именно этот цвет. Эту клетку назовём клеткой Б.

Клетка А может быть покрашена двумя способами. Для каждого из этих способов есть 6 способов раскраски квадрата таких, что клетка Б покрашена в тот же цвет. Тогда клетку между ними можно покрасить двумя способами, итого $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$ варианта.



Кроме того, для каждого из способов покрасить клетку А есть 12 способов раскраски квадрата таких, что клетка В имеет другой цвет. В этом случае клетка между ними красится однозначно, поэтому опять получаем 24 способа. Итого 48 способов раскраски каждой такой фигуры.

Следовательно, ответ в задаче $3 \cdot 48^4$.

6. (3 балла) В пространстве расположен куб $1000 \times 1000 \times 1000$ с вершиной в начале координат и гранями, параллельными координатным плоскостям. Из начала координат проведены векторы во все целочисленные точки внутри и на границе этого куба. Найдите остаток от деления суммы квадратов длин этих векторов на 13.

Ответ: 0

Решение:

Сумма квадратов длин этих векторов — это сумма квадратов всех их координат, то есть $3 \cdot 1001^2 \cdot (0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + 1000^2)$, что делится на 13, так как 1001 делится на 13.

7. (4 балла) Дан треугольник ABC , точка I — центр его вписанной окружности. На лучах BI и CI соответственно отмечены такие (отличные от I) точки E и F , что $AI = AE = AF$. Докажите, что площади треугольников BIF и CIE равны.

Решение:

Рассмотрим точку D — середину дуги BC описанной окружности треугольника ABC . По лемме о трезубце $DB = DC = DI$. Треугольники DBI и AEI подобны, так как это равнобедренные треугольники с равными углами при основании (углы в точке I равны как вертикальные, потому что точки A , I и D лежат на одной прямой — биссектрисе угла A). Аналогично подобны треугольники DCI и AFI .

Отсюда получаем $\frac{BI}{EI} = \frac{DI}{AI} = \frac{CI}{FI}$ (первое равенство из первого подобия, второе — из второго). Раскрывая пропорцию, имеем $BI \cdot FI = CI \cdot EI$. Из этого равенства следует требуемое равенство площадей треугольников BIF и CIE поскольку углы при вершине I в треугольниках BIF и CIE равны как вертикальные,

8. (5 баллов) В некоторой стране 100 городов и 146 авиакompаний. Любые два города соединены двусторонними рейсами одной или нескольких авиакompаний. Стоимость перелёта между городами, соединёнными рейсами k авиакompаний, для всех компаний одинакова и составляет $\frac{1}{k}$. Оказалось, что не существует городов, между которыми с пересадкой можно добраться дешевле, чем прямым рейсом. Докажите, что можно найти маршрут с одной пересадкой, обе части которого стоят одинаково.

Решение:

На самом деле нам надо доказать, что существует два рейса одинаковой цены из одного города. Предположим противное. Тогда все перелёты из любого города имеют разную цену.

Рассмотрим самый дорогой рейс. Он самый дорогой в каждом из своих городов, а значит существует хотя бы 98 более дешёвых перелётов. Тогда этот самый дорогой рейс имеет цену $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{48}$, т.е. $k \leq 48$.

Возможных стоимостей, меньших $\frac{1}{k}$, но не меньших $\frac{1}{2k}$ всего k . Значит, в каждом из городов, которые соединяет самый дорогой рейс, есть ещё не более k рейсов не дешевле $\frac{1}{2k}$, то есть всего их в этих двух городах не более $2k \leq 96$ (не считая самого дорогого). Но это значит, что в какой-то из оставшихся 98 городов из обоих концов самого дорогого рейса ведут рейсы ценой ниже $\frac{1}{2k}$. Следовательно, если мы воспользуемся этими двумя рейсами, мы сможем пролететь между концами самого дорогого рейса дешевле, чем этим рейсом, что противоречит условию.

Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

1. (2 балла)

У Коли в тетради был записан многочлен двухсотой степени. Коля может взять один из записанных в тетради многочленов, прибавить $2a$ к коэффициенту при k -ой степени и вычесть a из коэффициента при $(k+1)$ -й степени, после чего записать полученный многочлен в тетрадь к уже имеющимся. Могут ли у него в тетради после некоторого количества таких действий оказаться два многочлена, один из которых строго больше другого?

Если коэффициент при какой-то степени равен нулю, с ним тоже можно производить эту операцию.

Ответ: Нет.

Решение: Заметим, что при этих операциях не меняется значение многочлена в точке 2, значит, все многочлены, оказавшиеся у Коли в тетрадке, будут совпадать в этой точке, и поэтому ни один из них не будет строго больше другого.

2. (2 балла) Решите уравнение $f^{-1}(g(x)) = h(x)$, где $f^{-1}(x)$ – обратная функция к $f(x)$, если известно, что $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, $g(x) = x^4 + 2x^3 + 1x^2 + 11x + 11$, $h(x) = x + 1$.

Ответ: $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ и 1.

Решение: Можно переписать исходное уравнение как $f(h(x)) = g(x)$, то есть как $(x+1)^3 + 2(x+1)^2 + 3(x+1) + 4 = x^4 + 2x^3 + x^2 + 11x + 11$.

Раскроем скобки и перенесём всё в правую часть: $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$. Заметим, что многочлен в левой части делится на $x-1$, и, более того на $(x-1)^2$. Значит, мы получаем корень 1 кратности 2. Кроме того, частное от деления нашего многочлена четвёртой степени на $(x-1)^2$ это трёхчлен $x^2 + 3x + 1$, и его корни $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

3. (3 балла) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность S . Окружности S_1 и S_2 касаются окружности S изнутри в точках A и C соответственно. Окружность S_1 пересекается со сторонами AB и AD в точках K и N соответственно, окружность S_2 пересекается со сторонами BC и CD в точках L и M соответственно. Оказалось, что прямые KL и MN параллельны. Докажите, что радиусы окружностей S_1 и S_2 равны.

Решение:

Заметим, что треугольник AKN подобен треугольнику ABD с коэффициентом подобия $\frac{r_1}{R}$, где R – радиус окружности S , а r_1 – радиус окружности S_1 . Аналогично треугольник CML подобен треугольнику CBD с коэффициентом подобия $\frac{r_2}{R}$ где r_2 – радиус окружности S_2 .

Отсюда отрезки KN и ML параллельны отрезку BD . Кроме того, прямые KL и MN параллельны, следовательно, $KLMN$ – параллелограмм, откуда $KN = ML$. Но эти отрезки относятся к отрезку BD как $\frac{r_1}{R}$ и $\frac{r_2}{R}$ соответственно, а значит, эти отношения равны, откуда следует требуемое равенство окружностей.

4. (3 балла) Найдите все пары геометрических прогрессий таких, что их сумма также геометрическая прогрессия.

Ответ: знаменатель у этих прогрессий должен быть одинаковый и сумма первых членов не равна 0.

Кроме того, подходят любые прогрессии из двух элементов с ненулевыми суммами первых и вторых членов.

Решение:

Назовём наши прогрессии a_n и b_n , а их знаменатели p и q . Рассмотрим первые три члена каждой прогрессии. Чтобы сумма также была геометрической прогрессией, необходимо $(a_1 + b_1)(a_1p^2 + b_1q^2) = (a_1p + b_1q)^2$.

Раскрывая скобки и сокращая одинаковые слагаемые, получаем $a_1b_1p^2 + a_1b_1p^2 = 2a_1b_1pq$. Сокращая на a_1b_1 и перенося всё в левую часть, получаем $(p - q)^2 = 0$. Это возможно только когда $p = q$. Кроме того, требуется ещё и чтобы $a_n + b_n$ не было равно нулю как первый член геометрической прогрессии.

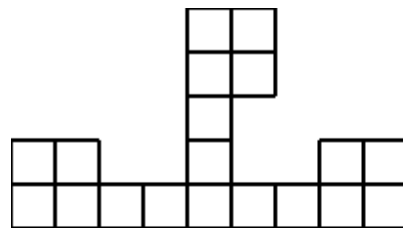
5. (3 балла) Сколькими способами фигуру, изображённую на рисунке, можно раскрасить по клеткам в синий, красный и белый цвета так, чтобы соседние (т.е. имеющие общие стороны) клетки были раскрашены в разные цвета?

Ответ: $3 \cdot 48^3$.

Решение: Центральную клетку можно раскрасить тремя способами. После этого нам осталось раскрасить четыре одинаковых фигурки из шести клеток с одним и тем же ограничением на цвет клетки, соседней с центральной (назовём её клеткой А).

Рассмотрим квадрат 2×2 . В таком квадрате должны быть две клетки одного цвета и расположены они должны быть по диагонали. Двумя способами выбираем диагональ, тремя способами её цвет и ещё по два способа на выбор цвета для остальных клеток, итого 24 способа. Однако при этом квадраты, покрашенные в два цвета мы посчитали дважды, поэтому остаётся 18 способом.

При этом, очевидно, для каждого из трёх цветов есть по 6 способов таких, что клетка, соседняя не только с клетками квадрата, имеет именно этот цвет. Эту клетку назовём клеткой Б.



Клетка А может быть покрашена двумя способами. Для каждого из этих способов есть 6 способов раскраски квадрата таких, что клетка В покрашена в тот же цвет. Тогда клетку между ними можно покрасить двумя способами, итого $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$ варианта.

Кроме того, для каждого из способов покрасить клетку А есть 12 способов раскраски квадрата таких, что клетка В имеет другой цвет. В этом случае клетка между ними красится однозначно, поэтому опять получаем 24 способа. Итого 48 способов раскраски каждой такой фигуры.

Следовательно, ответ в задаче $3 \cdot 48^3$.

6. (3 балла) В пространстве расположен куб $1000 \times 1000 \times 1000$ с вершиной в начале координат и гранями, параллельными координатным плоскостям. Из начала координат проведены векторы во все целочисленные точки внутри и на границе этого куба. Найдите остаток от деления суммы квадратов длин этих векторов на 11.

Ответ: 0

Решение:

Сумма квадратов длин этих векторов — это сумма квадратов всех их координат, то есть $3 \cdot 1001^2 \cdot (0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + 1000^2)$, что делится на 11, так как 1001 делится на 11.

7. (4 балла) Дан треугольник ABC , точка I — центр его вписанной окружности. На лучах BI и CI соответственно отмечены такие (отличные от I) точки E и F , что $AI = AE = AF$. Докажите, что $EF \parallel BC$

Решение:

Рассмотрим точку D — середину дуги BC описанной окружности треугольника ABC . По лемме о теснубце $DB = DC = DI$. Треугольники DBI и AEI подобны, так как это равнобедренные треугольники с равными углами при основании (углы в точке I равны как вертикальные, потому что точки A , I и D лежат на одной прямой — биссектрисе угла A). Аналогично подобны треугольники DCI и AFI .

Отсюда получаем $\frac{BI}{EI} = \frac{DI}{AI} = \frac{CI}{FI}$ (первое равенство из первого подобия, второе — из второго). Следовательно, треугольники FIE и CIB также подобны, поскольку углы в точке I в этих треугольниках равны как вертикальные.

Значит $\angle FEI = \angle CBI$, а это накрест лежащие углы при прямых EF и BC , поэтому прямые параллельны.

8. (5 баллов) В некоторой стране 50 городов и 71 авиакомпания. Любые два города соединены двусторонними рейсами одной или нескольких авиакомпаний. Стоимость перелёта между городами, соединёнными рейсами k авиакомпаний, для всех компаний одинакова и составляет $\frac{1}{k}$. Оказалось, что не существует городов, между которыми с пересадкой можно добраться дешевле, чем прямым рейсом. Докажите, что можно найти маршрут с одной пересадкой, обе части которого стоят одинаково.

Решение:

На самом деле нам надо доказать, что существует два рейса одинаковой цены из одного города. Предположим противное. Тогда все перелёты из любого города имеют разную цену.

Рассмотрим самый дорогой рейс. Он самый дорогой в каждом из своих городов, а значит существует хотя бы 48 более дешёвых перелётов. Тогда этот самый дорогой рейс имеет цену $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{23}$, т.е. $k \leq 23$.

Возможных стоимостей, меньших $\frac{1}{k}$, но не меньших $\frac{1}{2k}$ всего k . Значит, в каждом из городов, которые соединяет самый дорогой рейс, есть ещё не более k рейсов не дешевле $\frac{1}{2k}$, то есть всего их в этих двух городах не более $2k \leq 46$ (не считая самого дорогого). Но это значит, что в какой-то из оставшихся 48 городов из обоих концов самого дорогого рейса ведут рейсы ценой ниже $\frac{1}{2k}$. Следовательно, если мы воспользуемся этими двумя рейсами, мы сможем пролететь между концами самого дорогого рейса дешевле, чем этим рейсом, что противоречит условию.

Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

V. Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады для 10 класса

Задача 1. (1 балл)

1. Дана функция $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Найдите $\underbrace{f(f(\dots(3)\dots))}_{2015 \text{ раз}}$.

Ответ: -2

2. Дана функция $f(x) = \frac{x+1}{1-x}$. Найдите $\underbrace{f(f(\dots(7)\dots))}_{2011 \text{ раз}}$.

Ответ: 3/4 | 0,75

3. Дана функция $f(x) = -\frac{x+1}{x-1}$. Найдите $\underbrace{f(f(\dots(2)\dots))}_{2017 \text{ раз}}$.

Ответ: -3

Примеры записи ответов:

1/4

0,25

-10

Задача 2. (2 балла)

1. На планете Острые Зубы животные размножаются по-особенному, а именно: каждый хомячок каждый год рождает четырёх хомячков; каждый суслик каждые 3 месяца рождает двух маленьких сусликов; а кролики — загадочные существа — чем больше времени проходит, тем быстрее они размножаются, а именно, если человек не отдаёт своих кроликов и не покупает новых, то по прошествии $2k$ месяцев количество его кроликов увеличивается в $k!$ раз. ($k!$ - произведение чисел от 1 до k).

Никита купил на рынке грызунов. Известно, что через год у него стало 765 домашних питомцев. Сколько грызунов Никита купил на рынке?

Если возможных ответов несколько, выпишите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 10; 77; 153 | 11, 77, 153

2. На планете Острые Зубы животные размножаются по-особенному, а именно: каждый хомячок каждые 3 месяца рождает двух хомячков; каждый суслик каждые 4 месяца рождает одного маленького суслика; а кролики — загадочные существа — чем больше времени проходит, тем быстрее они размножаются, а именно, если человек не отдаёт своих кроликов и не покупает новых, то по прошествии $2k$ месяцев количество его кроликов увеличивается в $k!$ раз. ($k!$ - произведение чисел от 1 до k).

Антон купил в зоомагазине грызунов. Известно, что через год у Антона стало 720 домашних питомцев. Сколько грызунов Антон купил в зоомагазине?

Если возможных ответов несколько, выпишите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 1; 17; 90 | 1, 17, 90

3. На планете Острые Зубы животные размножаются по-особенному, а именно: каждый хомячок каждые 4 месяца рождает четверых хомячков; каждый суслик каждые 4 месяца

рождает одного маленького суслика; а кролики — загадочные существа — чем больше времени проходит, тем быстрее они размножаются, а именно, если человек не отдаёт своих кроликов и не покупает новых, то по прошествии $2k$ месяцев количество его кроликов увеличивается в $k!$ раз. ($k!$ - произведение чисел от 1 до k).

Мальчик Илья купил в зоомагазине грызунов. Известно, что через год у Ильи было 1040 домашних зверей. А сколько грызунов Илья купил в зоомагазине?

Если возможных ответов несколько, выпишите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 13, 41, 130 | 13; 41; 130

Примеры записи ответов:

9

9; 23

Задача 3. (2 балла)

1. Три подряд идущих члена геометрической прогрессии со знаменателем q использовали в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена. Оказалось, что этот трёхчлен имеет ровно один корень. Найдите q^3 .

Если возможных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 1/4; 4 | 0,25; 4 | 4; 0,25 | 4; 1/4 | 1/4, 4 | 4; 0,25 | 4, 1/4 |

2. Три подряд идущих члена геометрической прогрессии со знаменателем q использовали в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена. Оказалось, что этот трёхчлен имеет два различных корня. При каком наименьшем натуральном q это возможно?

Ответ: 2

3. Три подряд идущих члена геометрической прогрессии со знаменателем q использовали в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, причём средний член оказался первым коэффициентом. При каком наибольшем целом q получившийся трёхчлен будет иметь два различных корня вне зависимости от того, как расставлены остальные два коэффициента?

Ответ: -1

Примеры записи ответов:

2

5; 9

Задача 4. (3 балла)

1. Дана функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $f(x)+f(y)=f(\sqrt{x^2+y^2})$. Известно, что $f(1)=2$. Найдите $f(15)$.

Ответ: 450.

2. Дана функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $f(x)+f(y)=f(\sqrt{x^2+y^2})$. Известно, что

$f(1)=4$. Найдите $f(10)$.

Ответ: 400.

3. Дана функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $f(x)+f(y)=f(\sqrt{x^2+y^2})$. Известно, что $f(1)=5$. Найдите $f(12)$.

Ответ: 720.

Примеры записи ответов:

1/4

-0,25; 10

Задача 5. (3 балла)

1. Последовательность c_n — сумма геометрической прогрессии b_n с первым членом 5 и некоторой арифметической прогрессии. Известно, что $c_1 + c_3 = 121$, $c_2 = 38$. Найдите знаменатель прогрессии b_n . Если возможных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -2; 4 | 4; -2 | 4, -2

2. Последовательность c_n — сумма геометрической прогрессии b_n с первым членом 4 и некоторой арифметической прогрессии. Известно, что $c_1 + c_3 = 128$, $c_2 = 32$. Найдите знаменатель прогрессии b_n . Если возможных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -3; 5 | 5; -3 | 5, -3

3. Последовательность c_n — сумма геометрической прогрессии b_n с первым членом 3 и некоторой арифметической прогрессии. Известно, что $c_1 + c_3 = 141$, $c_2 = 33$. Найдите знаменатель прогрессии b_n . Если возможных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -4; 6 | 6; -4 | 6, -4

Примеры записи ответов:

1/4

0,25; -10

Задача 6. (3 балла)

1. Дана точка на плоскости, не совпадающая с началом координат. Сколько различных точек можно получить из неё, последовательно применяя симметрии относительно оси Ox и прямой $y=\sqrt{3}x$ (в любом порядке и любое количество раз)? Если саму точку тоже можно получить, её надо учитывать. Если для разных точек возможны разные ответы, укажите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 3; 6 | 3, 6 | 6; 3 | 6, 3

2. Дана точка на плоскости, не совпадающая с началом координат. Сколько различных точек можно получить из неё, последовательно применяя симметрии относительно оси Ox и

прямой $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ (в любом порядке и любое количество раз)? Если саму точку тоже можно получить, её надо учитывать. Если для разных точек возможны разные ответы, укажите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 12; 6 | 12, 6 | 6; 12 | 6, 12

3. Дана точка на плоскости, не совпадающая с началом координат. Сколько различных точек можно получить из неё, последовательно применяя симметрии относительно оси Oy и

прямой $y = -x$ (в любом порядке и любое количество раз)? Если саму точку тоже можно получить, её надо учитывать. Если для разных точек возможны разные ответы, укажите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 4; 8 | 8, 4 | 8; 4 | 4, 8.

Примеры записи ответов:

9

9; 23

Задача 7. (3 балла)

1. Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Вершины и точка пересечения их графиков образуют равносторонний треугольник. Найдите длину его стороны.

Если возможных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 12

2. Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Вершины и точка пересечения их графиков образуют равносторонний треугольник. Найдите длину его стороны.

Если возможных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 8

3. Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом $\frac{\sqrt{3}}{8}$. Вершины и точка пересечения их графиков образуют равносторонний треугольник. Найдите длину его стороны.

Если возможных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 16

Примеры записи ответов:

1/4

-0,25; 10

Задача 8. (3 балла)

1. $ABCDE$ — пятиугольник, вписанный в окружность радиуса 12. Прямые AE и BC параллельны, $CD = DE$, $BE = AE = 16$. Найдите косинус угла DEC .

Ответ: $2/3$.

2. $ABCDE$ — пятиугольник, вписанный в окружность радиуса 15. Прямые AB и CD параллельны, $AE = DE$, $AC = AB = 18$. Найдите косинус угла EDA .

Ответ: $9/15$ | $3/5$ | $0,6$

2. $ABCDE$ — вписанный в окружность S пятиугольник. Прямые DE и AB параллельны, $BC = CD$, $AD = DE = 20$, $\cos CBD = 5/8$. Найдите радиус окружности S .

Ответ: 16.

Примеры записи ответов:

$1/4$

0,25

1

Задача 9. (4 балла)

1. $ABDE$, $BCEF$, $CDF A$ — вписанные четырёхугольники с точками пересечения диагоналей K , L и M соответственно. Известно, что точка K лежит на отрезках BL и AM , точка M — на отрезке CL . Кроме того, $BK = LE = CM = MD = 5$, $KL = 4$, $LM = 6$. Найдите длину отрезка MK . Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 6

2. $ABDE$, $BCEF$, $CDF A$ — вписанные четырёхугольники с точками пересечения диагоналей K , L и M соответственно. Известно, что точка K лежит на отрезках BL и AM , точка M — на отрезке CL . Кроме того, $BK = MK = ML = 5$, $MC = 7$, $AK = FL = 6$. Найдите длину отрезка EL . Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 5

3. $ABDE$, $BCEF$, $CDF A$ — вписанные четырёхугольники с точками пересечения диагоналей K , L и M соответственно. Известно, что точка K лежит на отрезках BL и AM , точка M — на отрезке CL . Кроме того, $EL = FL = KL = 5$, $DM = 4$, $AK = MK = 6$. Найдите длину отрезка MC . Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 4

Примеры записи ответов:

$1/4$

0,25

4; 10

Задача 10. (4 балла)

1. На доске была написана формула дробно-линейной функции вида $f(x) = \frac{ax+b}{7x+3}$, где a и b — какие-то действительные числа (не обязательно различные). Вася поменял местами числа a и b , и оказалось, что теперь на доске написана формула обратной к $f(x)$ функции. Найдите число a . Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -3.

2. На доске была написана формула дробно-линейной функции вида $f(x) = \frac{ax+4}{bx-5}$, где a и b — какие-то действительные числа (не обязательно различные). Вася поменял местами числа a и b , и оказалось, что теперь на доске написана формула обратной к $f(x)$ функции. Найдите число a . Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 5.

3. На доске была написана формула дробно-линейной функции вида $f(x) = \frac{ax+b}{cx+2}$, где a , b и c — какие-то действительные числа (не обязательно различные). Вася поменял местами числа b и c , и оказалось, что теперь на доске написана формула обратной к $f(x)$ функции. Найдите число a . Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 2; -2 | 2, -2 | -2; 2

Примеры записи ответов:

1/4

-0,25; 10

VI. Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады для 10 класса

Задача 1. (2 балла)

1. Точка O — центр некоторой окружности, A — точка вне окружности, B — точка на окружности такая, что AB — касательная. $AO = 10$. Найдите наибольшее возможное значение площади треугольника AOB .

Ответ: 25.

2. Точка O — центр некоторой окружности, A — точка вне окружности, B — точка на окружности такая, что AB — касательная. $AO = 20$. Найдите наибольшее возможное значение площади треугольника AOB .

Ответ: 100.

3. Точка O — центр некоторой окружности, A — точка вне окружности, B — точка на окружности такая, что AB — касательная. $AO = 6$. Найдите наибольшее возможное значение площади треугольника AOB .

Ответ: 9.

Примеры записи ответов:

17

1/7

1,7

Задача 2. (2 балла)

1. Известно, что для функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ верно соотношение для любого x кроме $-1/2$: $g(h(x)) - f(g(x)) = f(h(x))$, где $g(x) = (5x+3)/(2x+1)$ и $h(x) = x^2 + 2x + 3$. Найдите $f(2)$.

Ответ: 1,3

2. Известно, что для функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ верно соотношение для любого x кроме -2 : $g(h(x)) - f(g(x)) = f(h(x))$, где $g(x) = (4x+5)/(x+2)$ и $h(x) = x^2 + x + 1$. Найдите $f(3)$.

Ответ: 1,7

3. Известно, что для функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ верно соотношение для любого x из области определения: $g(h(x)) - f(g(x)) = f(h(x))$, где $g(x) = (5x+3)/(x+1)$ и $h(x) = x^2 + x + 2$. Найдите $f(4)$.

Ответ: 2,3

Примеры записи ответов:

17

1/7

1,7

Задача 3. (3 балла)

1. В стране Альфа 96 городов. Известно, что из каждого города выходит хотя бы 2 дороги. Также известно, что если есть дорога из города А в город В и из города В в город С, то тогда есть дорога и из города А в город С. Какое минимальное количество дорог может быть в стране?

Ответ: 195

2. В стране Бета 106 городов. Известно, что из каждого города выходит хотя бы 2 дороги. Также известно, что если есть дорога из города А в город В и из города В в город С, то тогда есть дорога и из города А в город С. Какое минимальное количество дорог может быть в стране?

Ответ: 215

3. В стране Гамма 101 город. Известно, что из каждого города выходит хотя бы 2 дороги. Также известно, что если есть дорога из города А в город В и из города В в город С, то тогда есть дорога и из города А в город С. Какое минимальное количество дорог может быть в стране?

Ответ: 205

Примеры записи ответов:

17

Задача 4. (3 балла)

1. Решите в простых числах уравнение $p^3 - q^3 = 1946$. В ответе укажите пару $(p; q)$. Если таких пар несколько, укажите ту, для которой $p-q$ максимально.

Ответ: 19; 17 | (19; 17)

2. Решите в простых числах уравнение $p^3 - q^3 = 5528$. В ответе укажите пару $(p; q)$. Если таких пар несколько, укажите ту, для которой $p-q$ максимально.

Ответ: 19; 11 | (19; 11)

3. Решите в простых числах уравнение $p^3 - q^3 = 2716$. В ответе укажите пару $(p; q)$. Если таких пар несколько, укажите ту, для которой $p-q$ максимально.

Ответ: 17; 13 | (17; 13)

Примеры записи ответов:

(37; 11)

Задача 5. (3 балла)

1. Дан прямоугольный параллелепипед со сторонами 6, 6 и x . При каких значениях числа x произведение площади поверхности и периметра (суммы длин всех рёбер) этого параллелепипеда не превосходят $224/3$ его объёма?

Ответ записать в виде промежутка.

Ответ: $[4; 9] \parallel [4, 9]$

2. Дан прямоугольный параллелепипед со сторонами 4, 6 и x . При каких значениях числа x произведение площади поверхности и периметра (суммы длин всех рёбер) этого параллелепипеда не превосходят 78 его объёмов?

Ответ записать в виде промежутка.

Ответ: $[3; 8] \parallel [3, 8]$

3. Дан прямоугольный параллелепипед со сторонами 2, 6 и x . При каких значениях числа x произведение площади поверхности и периметра (суммы длин всех рёбер) этого параллелепипеда не превосходят 88 его объёмов?

Ответ записать в виде промежутка.

Ответ: $[3; 4] \parallel [3, 4]$

Примеры записи ответов:

$[1; 5]$

Задача 6. (3 балла)

1. Окружность радиуса 12 с центром в точке O и окружность радиуса 3 касаются внутренним образом в точке H . Прямая XH — их общая касательная, прямая OX — касательная к маленькой окружности. Найдите квадрат длины отрезка OX .

Ответ: 162

2.. Окружность радиуса 12 с центром в точке O и окружность радиуса 4 касаются внутренним образом в точке H . Прямая XH — их общая касательная, прямая OX — касательная к маленькой окружности. Найдите квадрат длины отрезка OX .

Ответ: 192

3. Окружность радиуса 20 с центром в точке O и окружность радиуса 8 касаются внутренним образом в точке H . Прямая XH — их общая касательная, прямая OX — касательная к маленькой окружности. Найдите квадрат длины отрезка OX .

Ответ: 720

Примеры записи ответов:

17

$1/7$

1,7

Задача 7. (3 балла)

1. Известно, что число $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ является корнем многочлена четвертой степени с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. А чему равна сумма коэффициентов у этого многочлена?

Ответ: -11

2 . Известно, что число $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ является корнем многочлена четвертой степени с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. А чему равна сумма коэффициентов у этого многочлена?

Ответ: -3

3 . Известно, что число $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ является корнем многочлена четвертой степени с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. А чему равна сумма коэффициентов у этого многочлена?

Ответ: -19

Примеры записи ответов:

17
1/7
1,7

Задача 9. (4 балла)

1 . Известно, что функция $f(x)$ удовлетворяет равенству при любом x :
 $\sin x + f(x) = f(x+2)$

Найдите значение $f(2013) \sin 1$, если известно, что $f(1) = \frac{\cos^2 1006}{\sin 1}$.

Ответ: 1

2 . Известно, что функция $f(x)$ удовлетворяет равенству при любом x :
 $2 \sin x + f(x) = f(x+2)$

Найдите, значение $f(2015) \sin 1$, если известно, что $f(1) = \frac{2 \cos^2 1007}{\sin 1}$.
Ответ: 2

3 . Известно, что функция $f(x)$ удовлетворяет равенству при любом x :
 $3 \sin x + f(x) = f(x+2)$

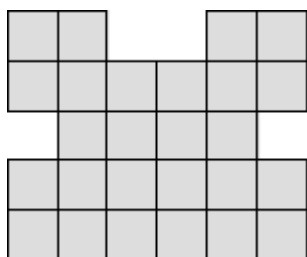
Найдите, значение $f(2017) \sin 1$, если известно, что $f(1) = \frac{3 \cos^2 1008}{\sin 1}$.
Ответ: 3

Примеры записи ответов:

17
1/7
1,7

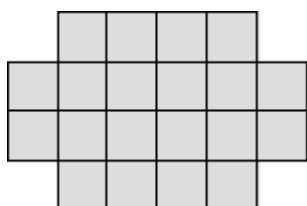
Задача 10. (4 балла)

1. Сколько существует способов разбить данную фигуру на прямоугольники 1×2 ?



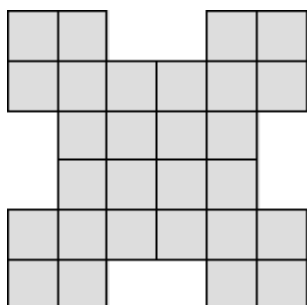
Ответ: 88

2. Сколько существует способов разбить данную фигуру на прямоугольники 1×2 ?



Ответ: 50

3. Сколько существует способов разбить данную фигуру на прямоугольники 1×2 ?



Ответ: 128

Примеры записи ответов:

17

Задача 8

1. Даны две геометрические прогрессии a_n и b_n . Известно, что $a_0 = 2$ и сумма знаменателей этих двух прогрессий равна 5. Найдите, чему может быть равно b_0 , если известно, что a_0, b_0, a_1, b_1 — последовательные члены некоторой арифметической прогрессии (именно в таком порядке).

Ответ: -1; 4 || 4; -1 || 4, -1

2. Даны две геометрические прогрессии a_n и b_n . Известно, что $a_0 = 3$ и сумма знаменателей этих двух прогрессий равна 2. Найдите, чему может быть равно b_0 , если известно, что a_0, b_0, a_1, b_1 — последовательные члены некоторой арифметической прогрессии (именно в таком порядке).

Если правильных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -3; 3 || 3; -3 || 3, -3

3. Даны две геометрические прогрессии a_n и b_n . Известно, что $a_0 = 4$ и сумма знаменателей этих двух прогрессий равна 5. Найдите, чему может быть равно b_0 , если известно, что a_0, b_0, a_1, b_1 — последовательные члены некоторой арифметической прогрессии (именно в таком порядке)

Ответ: $-2; 8 \parallel 8; -2$

Примеры записи ответов:

17

1/7

1,7

1; 7

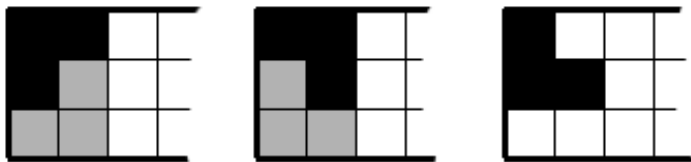
1,7; 17

VII. Задания заключительного этапа олимпиады для 9 класса

9 класс
1 вариант1. (2 балла) Сколькими способами можно разбить прямоугольник 3×8 на уголки из трёх клеток?

Ответ: 16

Решение:

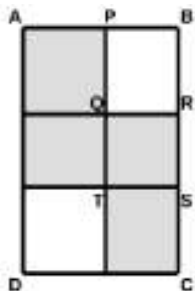


Чёрным цветом на рисунке изображены все три возможных расположения уголка из трёх клеток, содержащего левую верхнюю клетку прямоугольника. В первых двух случаях при этом уголок, содержащий левую нижнюю клетку, расположен единственным возможным образом (на рисунке изображено серым), в третьем случае такой уголок разместить не получается.

Таким образом, в любом из возможных случаев эти два уголка образуют прямоугольник 2×3 . Аналогично оставшиеся шесть уголков также образуют три таких же прямоугольника. Каждый из прямоугольников разбивается на уголки двумя способами, $2^4 = 16$.

2. (2 балла) На плоскости по клеточкам нарисовали три прямоугольника (не являющихся квадратами) и один квадрат $QRSC$, так, что в итоге получилась фигура, схематически изображённая на рисунке.

Известно, что площадь прямоугольника $ABCD$ равна 35 клеткам. Найдите, чему равна площадь закрашенной фигуры, если известно, что $AP < QR$.



Ответ: 24 или 26.

Решение:

Заметим, что каждый из изображенных отрезков имеет длину не меньше 1.

$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 35$, откуда либо $AB = 5$, $BC = 7$, либо наоборот $AB = 7$, $BC = 5$. (варианты 35×1 и 1×35 не подходят, так как AB хотя бы две клетки, а BC хотя бы три).

Вариант $AB = 7$, $BC = 5$ также невозможен, потому что $BP = QR > AP$, значит, в этом случае $QR = BP > \frac{AB}{2} = \frac{7}{2}$. С другой стороны $QR = RS = BC - BR - SC = 5 - BR - SC \geq 3$.

Значит, $AB = 5$ и $BC = 7$. $BP > AP$, следовательно опять получаем 2 случая: либо $BP = 4$, $AP = 1$, либо $BP = 3$, $AP = 2$.

Рассмотрим первый из этих случаев. $BR \neq AP = 1$, иначе левый верхний прямоугольник является квадратом; с другой стороны, $BR + SC = 3$, значит, $BR = 2$, $SC = 1$. Тогда площадь закрашенной фигуры равна $S_{ABCD} - BP \cdot BR - AP \cdot SC = 35 - 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 26$.

Второй случай: $BP = 3$, $AP = 2$. Опять-таки, $BR \neq AP$; с другой стороны, $BR + SC = 4$, значит, длина BR составляет 1 или 3 клетки, а SC соответственно наоборот, 3 или 1. В первом из вариантов нижний правый прямоугольник оказывается квадратом, во втором $S_{ABCD} - BP \cdot BR - AP \cdot SC = 35 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 24$.

3. (3 балла) Из карточек с буквами можно составить слово КАРАКАТИЦА. А сколько из этих карточек можно составить слов (не обязательно осмысленных), в которых буквы Р и Ц соседние?

Ответ: $\frac{9!}{4!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$

Решение:

Заменим соседние буквы Р и Ц на одну букву, например, на букву Щ, это можно сделать, так как они стоят рядом. Тогда у нас остаётся 9 букв, и из них 4 буквы А и 2 буквы К.

Значит, количество способов переставить буквы в этом слове $\frac{9!}{4! \cdot 2!}$. Кроме того, буквы Щ может быть расшифрована двумя способами: как РЦ и как ЦР, что даёт нам увеличение количества способов ещё два раза. Таким образом, получаем $\frac{9!}{4!}$.

4. (3 балла) Дан треугольник ABC с углом $C = 120^\circ$. Точка D — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на сторону AB ; точки E и F — основания перпендикуляров, опущенных из точки D на стороны AC и BC соответственно. Найдите, чему равен периметр треугольника ABC , если известно, что треугольник EFC равнобедренный и его площадь равна $\sqrt{3}$.

Ответ: $16 + 8\sqrt{3}$

Решение:

Треугольник EFC равнобедренный. Так как $\angle C$ в нём тупой, точка C является его вершиной, значит $EC = FC$. Но тогда прямоугольные треугольники ECD и FCD равны по катету и гипотенузе, следовательно, $ED = FD$, то есть точка D лежит на биссектрисе угла C , откуда треугольник ABC также равнобедренный.

Значит, треугольники ABC и EFC подобны. Найдём коэффициент подобия. Во-первых, $CE : CD = \cos \angle ACD = \frac{1}{2}$. Во-вторых, $CD : AC = \cos \angle ACD = \frac{1}{2}$. Значит, $CE : AC = \frac{1}{4}$.

Далее, $\sqrt{3} = S_{EFC} = \frac{EC \cdot FC \cdot \sin \angle ACD}{2} = \frac{EC^2 \sqrt{3}}{4}$, откуда $EC = 2$. Отсюда $EF = 2EC \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$. Значит, $P_{EFC} = 4 + 2\sqrt{3}$, $P_{ABC} = 4P_{EFC} = 16 + 8\sqrt{3}$.

5. (3 балла) Даны сто квадратных трёхчленов, все старшие коэффициенты которых различны. Оказалось, что графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку. Докажите что графики всех трёхчленов имеют общую точку.

Решение:

Если графики двух квадратных трёхчленов имеют ровно одну общую точку, значит, разность этих трёхчленов имеет ровно один корень, то есть она либо линейная функция, чего не может быть по условию, так как старшие коэффициенты трёхчленов различны, либо полный квадрат.

Рассмотрим 3 квадратных трёхчлена f , g и h . Пусть $f - g = a(x - x_1)^2$, $g - h = b(x - x_2)^2$. Тогда $f - h = a(x - x_1)^2 + b(x - x_2)^2$. Этот трёхчлен тоже должен иметь единственный корень.

Если числа a и b одного знака, то $a(x - x_1)^2 + b(x - x_2)^2 > 0$ во всех точках, за исключением случая, когда $x_1 = x_2$. Если числа a и b одного знака, то $a(x - x_1)^2 + b(x - x_2)^2 > 0$ в точках x_1 и x_2 принимает значения разных знаков, то есть точно имеет 2 корня (если только x_1 и x_2 опять же не равны).

Значит, $x_1 = x_2$ и $f - h = (a + b)(x - x_1)^2$, т.е. $f - h$ имеет корень в той же точке, что и $f - g$ и $g - h$, т.е. графики трёхчленов f , g и h имеют одну общую точку. Подставляя вместо h любой другой трёхчлен из данного набора, получаем, что его график проходит через общую точку графиков f и g , значит, графики всех трёхчленов имеют общую точку.

6. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается выполнять одну из следующих операций:

1) Заменить исходное число на разность числа, полученного из него отбрасыванием трёх последних цифр и числа, составленного из его трёх последних цифр (возможно, записанного в неправильной форме — с нулями в начале; разность берётся положительная — из большего числа вычитается меньшее).

2) Если в исходном числе есть цифра, не равная 9, имеющая две соседние цифры, большие 0, можно увеличить эту цифру на 1, а соседние уменьшить на 1. Если в результате в числе на первом месте оказываются нули, они отбрасываются.

Изначально на доске было записано число из 98 восьмёрок. В конце осталось двузначное число. Какое именно?

Ответ: 88 или 94

Решение:

Пусть с числом $1000a + b$, где $b < 1000$ выполнили первую операцию. Тогда оно превратилось в $a - b$ или в $b - a$. В первом случае сложим эти числа, во втором вычтем — получится $1001a$, что делится на 91. Это значит, что если до выполнения операции остаток от деления нашего числа на 91 был равен x , то после выполнения операции остаток от деления нового числа либо $91 - x$, либо по-прежнему x .

Теперь рассмотрим вторую операцию. При её выполнении к числу прибавляется 10^n а затем из него вычитаются 10^{n+1} и 10^{n-1} . В сумме из числа вычитается $91 \cdot 10^{n-1}$, то есть остаток от деления на 91 сохраняется.

У исходного числа остаток от деления на 91 был равен 88 (так как $888888 = 888 \cdot 1001$ делится на 91, а значит, число из 96 восьмёрок и двух нулей на конце делится на 91). Следовательно, итоговое число может давать при делении на 91 остатки 88 или 3, а среди двузначных чисел это только 88 и 94.

Докажем теперь, что оба числа получить можно.

Применяя к числу, состоящему из восьмёрок, первую операцию дважды, мы просто уменьшаем количество восьмёрок на 6. После многократного применения этой операции у нас появится как раз число 88.

Для того, чтобы получить 94, нам надо остановиться на четыре шага раньше, т.е. на числе 88888888. Из него получаем 88887978, затем 88878878, затем 88878787, затем 88878696, затем 88192 и, наконец, 94.

7. (4 балла) Известно, что x , y , z , t неотрицательные числа, такие что $xyz = 1$, $y + z + t = 2$. Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq 3$.

Решение:

$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x^2 + 2yz + y^2 - 2yz + z^2 + t^2 = x^2 + \frac{2}{x} + (y - z)^2 + t^2 \geq x^2 + \frac{2}{x}$ что хотя бы 3 по неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трёх чисел.

8. (5 баллов) Дан треугольник ABC , точка I — центр вписанной окружности, точка A_1 взята таким образом, что точка A является серединой отрезка AI . Докажите, что точка A_1 и центры внеписанных окружностей треугольника ABC лежат на одной окружности.

Решение:

Пусть точка O — центр описанной окружности треугольника ABC ; O_1 — такая точка, что O середина O_1I ; точки D, E и F — середины дуг AB, BC и AC описанной окружности треугольника ABC , а точки D_1, E_1, F_1 — центры внеписанных окружностей треугольника ABC , касающихся сторон AB, BC и AC соответственно.

Тогда по лемме о трезубце точки D, E и F — середины D_1I, E_1I и F_1I соответственно.

В треугольнике A_1O_1I отрезок AO является средней линией, значит $A_1O_1 = 2AO$. Аналогичные равенства получаем и для остальных пар отрезков. Так как $OA = OD = OE = OF$, следовательно $O_1A_1 = O_1D_1 = O_1E_1 = O_1F_1$, то есть точки A_1, D_1, E_1 и F_1 лежат на одной окружности с центром в O_1 , что и требовалось доказать.

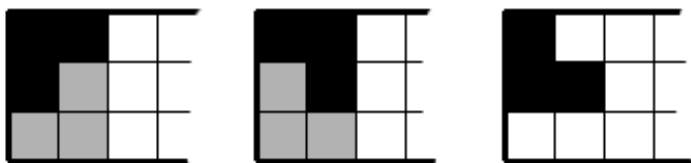
Заметим, что вместо последнего абзаца можно было применить преобразование подобия (гомотетию) с центром в точке I и коэффициентом 2.

9 класс
2 вариант

1. (2 балла) Сколькими способами можно разбить прямоугольник 3×6 на уголки из трёх клеток?

Ответ: 8

Решение:

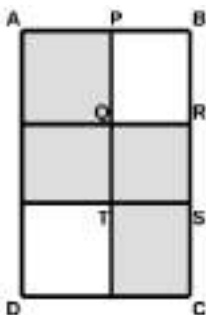


Чёрным цветом на рисунке изображены все три возможных расположения уголка из трёх клеток, содержащего левую верхнюю клетку прямоугольника. В первых двух случаях при этом уголок, содержащий левую нижнюю клетку, расположен единственным возможным образом (на рисунке изображено серым), в третьем случае такой уголок разместить не получается.

Таким образом, в любом из возможных случаев эти два уголка образуют прямоугольник 2×3 . Аналогично оставшиеся четыре уголка также образуют два таких же прямоугольника. Каждый из прямоугольников разбивается на уголки двумя способами, $2^3 = 8$.

2. (2 балла) На плоскости по клеточкам нарисовали три прямоугольника (не являющихся квадратами) и один квадрат $QRST$, так, что в итоге получилась фигура, схематически изображённая на рисунке. Стороны всех четырёх прямоугольников меньше 7.

Известно, что площадь прямоугольника $ABCD$ равна 33 клеткам. Найдите, чему равна площадь закрашенной фигуры, если известно, что $PQ < SC$.



Ответ: 17, 20 или 21.

Решение:

Заметим, что каждый из изображенных отрезков имеет длину не меньше 1.

$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 33$, откуда либо $AB = 3$, $BC = 11$, либо наоборот $AB = 11$, $BC = 3$. (варианты 33×1 и 1×33 не подходят, так как AB хотя бы две клетки, а BC хотя бы три).

Вариант $AB = 11$, $BC = 3$ также невозможен, потому что получается, что $BR = RS = SC = 1$, откуда $PQ = SC$, что противоречит условию.

Значит, $AB = 3$ и $BC = 11$. Опять получаем 2 случая: либо $BP = 2$, $AP = 1$, либо $BP = 1$, $AP = 2$.

Рассмотрим первый из этих случаев. $BR = PQ \neq AP = 1$, иначе левый верхний прямоугольник является квадратом. $BP = QR = 2$, следовательно, $BR + SC = 9$. Кроме того, $BR = PQ < SC$. Значит, либо $BR = 3$, $SC = 6$, либо $BR = 4$, $SC = 5$. Тогда площадь закрашенной фигуры равна либо $S_{ABCD} - BP \cdot BR - AP \cdot SC = 33 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 = 21$, либо $S_{ABCD} - BP \cdot BR - AP \cdot SC = 33 - 2 \cdot 4 - 1 \cdot 5 = 20$.

Второй случай. $BR = PQ \neq AP = 2$, иначе левый верхний прямоугольник является квадратом. $BP = QR = 1$, следовательно, $BR + SC = 10$. Кроме того, $BR = PQ < SC < 7$. значит, $BR = 4$, $SC = 6$. Тогда площадь закрашенной фигуры равна либо $S_{ABCD} - BP \cdot BR - AP \cdot SC = 33 - 1 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 17$.

3. (3 балла) Из карточек с буквами можно составить слово ВОДОПРОВОД. А сколько из этих карточек можно составить слов (не обязательно осмысленных), в которых буквы Р и П соседние?

Ответ: $\frac{9!}{4! \cdot 2} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 7560$

Решение:

Заменим соседние буквы П и Р на одну букву, например, на букву Щ, это можно сделать, так как они стоят рядом. Тогда у нас остаётся 9 букв, и из них 4 буквы О, 2 буквы В и 2 буквы Д.

Значит, количество способов переставить буквы в этом слове $\frac{9!}{4! \cdot 2! \cdot 2!}$. Кроме того, буквы Щ может быть расшифрована двумя способами: как ПР и как РП, что даёт нам увеличение количества способов ещё два раза. Таким образом, получаем $\frac{9!}{4! \cdot 2}$.

4. (3 балла) Дан треугольник ABC площадью $12\sqrt{3}$ и с углом $C = 120^\circ$ градусов. Точка D — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на сторону AB ; точки E и F — основания перпендикуляров, опущенных из точки D на стороны AC и BC соответственно. Найдите, чему равен периметр треугольника EFC , если оказалось, что он равнобедренный.

Ответ: $2\sqrt{3} + 3$

Решение:

Треугольник EFC равнобедренный. Так как $\angle C$ в нём тупой, точка C является его вершиной, значит $EC = FC$. Но тогда прямоугольные треугольники ECD и FCD равны по катету и гипотенузе, следовательно, $ED = FD$, то есть точка D лежит на биссектрисе угла C , откуда треугольник ABC также равнобедренный.

Значит, треугольники ABC и EFC подобны. Найдём коэффициент подобия. Во-первых, $CE : CD = \cos \angle ACD = \frac{1}{2}$. Во-вторых, $CD : AC = \cos \angle ACD = \frac{1}{2}$. Значит, $CE : AC = \frac{1}{4}$.

Далее, $12\sqrt{3} = S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin \angle ACD}{2} = \frac{AC^2 \sqrt{3}}{4}$, откуда $AC = 4\sqrt{3}$. Отсюда $AB = 2AC \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$. Значит, $P_{ABC} = 8\sqrt{3} + 12\sqrt{3}$, $P_{EFC} = \frac{1}{4}P_{ABC} = 2\sqrt{3} + 3$.

5. (3 балла) Даны сто квадратных трёхчленов. Оказалось, что графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку, однако графики никаких трёх из них общей точки не имеют. Докажите что как минимум у пятидесяти из этих трёхчленов совпадают старшие коэффициенты.

Решение:

Если графики двух квадратных трёхчленов имеют ровно одну общую точку, значит, разность этих трёхчленов имеет ровно один корень, то есть она либо линейная функция, либо полный квадрат.

Рассмотрим 3 квадратных трёхчлена f , g и h с различными старшими коэффициентами. Их разности не могут быть линейными функциями. Пусть $f - g = a(x - x_1)^2$, $g - h = b(x - x_2)^2$. Тогда $f - h = a(x - x_1)^2 + b(x - x_2)^2$. Этот трёхчлен тоже должен иметь единственный корень.

Если числа a и b одного знака, то $a(x - x_1)^2 + b(x - x_2)^2 > 0$ во всех точках, за исключением случая, когда $x_1 = x_2$. Если числа a и b одного знака, то $a(x - x_1)^2 + b(x - x_2)^2 > 0$ в точках x_1 и x_2 принимает значения разных знаков, то есть точно имеет 2 корня (если только x_1 и x_2 опять же не равны).

Значит, $x_1 = x_2$ и $f - h = (a + b)(x - x_1)^2$, т.е. $f - h$ имеет корень в той же точке, что и $f - g$ и $g - h$, т.е. графики трёхчленов f , g и h имеют одну общую точку. Противоречие.

Значит, таких трёх трёхчленов не существует, то есть возможных значений старшего коэффициента только два. Следовательно, хотя бы у половины трёхчленов старший коэффициент одинаковый.

6. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается выполнять одну из следующих операций:

1) Заменить исходное число на разность числа, полученного из него отбрасыванием четырёх последних цифр и числа, составленного из его четырёх последних цифр (возможно, записанного в неправильной форме — с нулями в начале; разность берётся положительная — из большего числа вычитается меньшее).

2) Если в исходном числе три подряд идущих цифры $a > 0$, $b < 7$ и $c > 2$ (именно в таком порядке), разрешается заменить их на цифры $a - 1$, $b + 3$ и $c - 3$ соответственно. Если в результате в числе на первом месте оказываются нули, они отбрасываются.

Изначально на доске было записано число из ста пятёрок. В конце осталось двузначное число. Какое именно?

Ответ: 80 или 66.

Решение:

Пусть с числом $10000a + b$, где $b < 10000$ выполнили первую операцию. Тогда оно превратилось в $a - b$ или в $b - a$. В первом случае сложим эти числа, во втором вычтем — получится $10001a$, что делится на 73. Это значит, что если до выполнения операции остаток от деления нашего числа на 73 был равен x , то после выполнения операции остаток от деления нового числа либо $73 - x$, либо по-прежнему x .

Теперь рассмотрим вторую операцию. При её выполнении к числу прибавляется $3 \cdot 10^n$ а также из него вычитаются 10^{n+1} и $3 \cdot 10^{n-1}$. В сумме из числа вычитается $73 \cdot 10^{n-1}$, то есть остаток от деления на 73 сохраняется.

У изначального числа остаток от деления на 73 был равен 7 (так как $55\,555\,555 = 5555 \cdot 10001$ делится на 73, а значит, число из ста пятёрок и четырёх нулей на конце делится на 73 и на остаток влияют только 4 последние цифры. Остаток от деления числа 5555 на 73 составляет 7. Следовательно, итоговое число может давать при делении на 73 остатки 7 или 66, а среди двузначных чисел это только 66 и 80.

Докажем теперь, что оба числа получить можно.

Применяя к числу, состоящему из пятёрок, первую операцию дважды, мы просто уменьшаем количество пятёрок на 8. После многократного применения этой операции у нас появится как раз число из двенадцати пятёрок. Из него ещё двумя операциями можно получить число 554 825 554 825, далее число 554 825 547 525. Сделав ещё 2 операции в разных местах, получим 554 824 817 452, откуда получаем 554 824 816 722.

Теперь применяем первую операцию и получаем 55 475 759. Из него второй операцией получаем 55 475 686, откуда первой операцией получатся число 139. Из него второй операцией получается 66.

Для того, чтобы получить 80, мы опять-таки получаем число из двенадцати пятёрок. Из него получаем 555 555 554 825, откуда 555 555 554 752, затем 555 555 547 452. Из этого числа мы получаем 555 555 546 722, откуда двумя операциями в разных местах числа получаем 555 548 239 422. Применяя первую операцию, получим 55 545 401, а затем 153. Применив к нему ещё раз вторую операцию, получим число 80.

7. (4 балла)

Известно, что x, y, z, t неотрицательные числа, такие что $xyz = 2$, $y + z + t = 2\sqrt{2}$. Докажите, что $2x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq 6$.

Решение:

$2x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2x^2 + 2yz + y^2 - 2yz + z^2 + t^2 = 2x^2 + \frac{4}{x} + (y - z)^2 + t^2 \geq 2\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = 2\left(x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right)$, а $\left(x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) \geq 3$ по неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трёх чисел.

8. (5 баллов) Дан треугольник ABC , точка I — центр вписанной окружности, точки A_1, B_1, C_1 взяты таким образом, что точки A, B, C являются серединами отрезков AI, BI и CI соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и центр вневписанной окружности треугольника ABC , касающейся стороны AB , лежат на одной окружности.

Решение:

Пусть точка O — центр описанной окружности треугольника ABC ; O_1 — такая точка, что O середина O_1I ; точка D — середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC , а точка D_1 — центры вневписанной окружности треугольника ABC , касающихся сторон AB, BC и AC соответственно.

Тогда по лемме о трезубце точка D — середина D_1I соответственно.

В треугольнике A_1O_1I отрезок AO является средней линией, значит $A_1O_1 = 2AO$. Аналогичные равенства получаем и для остальных пар отрезков. Так как $OA = OB = OC = OD$, следовательно $O_1A_1 = O_1B_1 = O_1C_1 = O_1D_1$, то есть точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности с центром в O_1 , что и требовалось доказать.

Заметим, что вместо последнего абзаца можно было применить преобразование подобия (гомотетию) с центром в точке I и коэффициентом 2.

VIII. Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады для 9 класса

Задача 1. (1 балл)

1. На столе лежат палочки длиной 1, 2, 3, ..., n сантиметров. Известно, что из них можно сложить 40 треугольников, используя каждую палочку не более, чем по разу, а вот 41 уже нельзя. Найдите n (длину самой большой палочки). Если возможных ответов несколько, перечислите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 121; 122; 123 | 121, 122, 123

2. На столе лежат палочки длиной 1, 2, 3, ..., n сантиметров. Известно, что из них можно сложить 50 треугольников, используя каждую палочку не более, чем по разу, а вот 51 уже нельзя. Найдите n (длину самой большой палочки). Если возможных ответов несколько, перечислите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 151, 152, 153 | 151; 152; 153

3. На столе лежат палочки длиной 1, 2, 3, ..., n сантиметров. Известно, что из них можно сложить 100 треугольников, используя каждую палочку не более, чем по разу, а вот 101 уже нельзя. Найдите n (длину самой большой палочки). Если возможных ответов несколько, перечислите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 301, 302, 303 | 301; 302; 303

Задача 2. (2 балла)

1. Таблица 6х6 заполнена числами. Числа, стоящие в соседних по стороне клетках, отличаются ровно в два раза. В одной из клеток стоит число 1. Какое максимальное число может находиться в этой таблице?

Ответ: 1024 | 2^{10}

2. Таблица 20х20 заполнена числами. Числа, стоящие в соседних по стороне клетках, отличаются ровно на 5. В одной из клеток стоит число 1. Какое максимальное число может находиться в этой таблице?

Ответ: 191

3. Таблица 10х10 заполнена числами. Числа, стоящие в соседних по стороне клетках, отличаются ровно на 7. В одной из клеток стоит число 1. Какое максимальное число может находиться в этой таблице?

Ответ: 127

Задача 3. (2 балла)

1. Каждый из учеников класса получили открытку от каждого из оставшихся. После этого из полученных открыток каждый ученик 6 штук передал классной руководительнице. Оказалось, что у учеников осталось не более 230 открыток. Какое наибольшее количество учеников могла быть в классе?

Ответ: 19

2. Каждый из учеников класса получили открытку от каждого из оставшихся. После этого из полученных открыток каждый ученик 7 штук передал классной руководительнице. Оказалось, что у учеников осталось не более 170 открыток. Какое наибольшее количество учеников могла быть в классе?

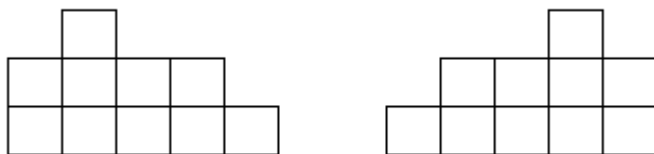
Ответ: 17

3. Каждый из учеников класса получили открытку от каждого из оставшихся. После этого из полученных открыток каждый ученик 8 штук передал классной руководительнице. Оказалось, что у учеников осталось не более 180 открыток. Какое наибольшее количество учеников могла быть в классе?

Ответ: 18

Задача 4. (2 балла)

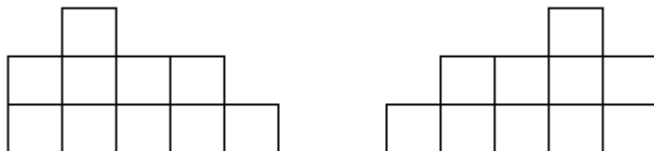
1. Лисица строит «пирамидки» из 6 кубиков следующим образом: каждая «пирамидка» состоит из одного или нескольких уровней; на каждом уровне количество кубиков строго меньше, чем на предыдущем; каждый новый уровень состоит из одного или нескольких подряд идущих кубиков. Примеры «пирамидок» из десяти кубиков вы можете увидеть на картинке:



Какое количество различных «пирамидок» может получиться у Лисицы? (Важно где у «пирамидки» правый край, а где левый — «пирамидки» на картинке разными).

Ответ: 13

2. Лисица строит «пирамидки» из 7 кубиков следующим образом: каждая «пирамидка» состоит из одного или нескольких уровней; на каждом уровне количество кубиков строго меньше чем на предыдущем; каждый новый уровень состоит из одного или нескольких подряд идущих кубиков. Пример «пирамидки» из десяти кубиков вы можете увидеть на картинке:

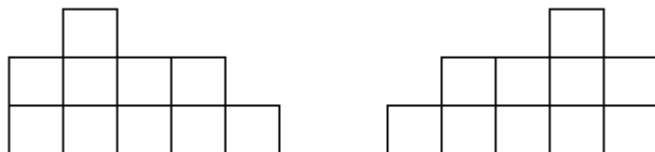


Какое количество различных «пирамидок» может получиться у Лисицы? (Важно где у «пирамидки» правый край, а где левый — «пирамидки» на картинке разными).

Ответ: 19

3. Лисица строит «пирамидки» из 5 кубиков следующим образом: каждая «пирамидка» состоит из одного или нескольких уровней;

на каждом уровне количество кубиков строго меньше, чем на предыдущем;
каждый новый уровень состоит из одного или нескольких подряд идущих кубиков.
Пример «пирамидки» из десяти кубиков вы можете увидеть на картинке:



Какое количество различных «пирамидок» может получиться у Лисицы?
(Важно где у «пирамидки» правый край, а где левый — «пирамидки» на картинке разными).

Ответ: 7

Примеры записи ответов:

12

Задача 5. (2 балла)

1. Через точку $(3, 5)$ на прямой $p: y = x + 2$ провели прямую q , перпендикулярную прямой p .
Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, ограниченного прямыми p , q и осями координат.

Ответ: 23

2. Через точку $(1, 5)$ на прямой $p: y = 2x + 3$ провели прямую q , перпендикулярную прямой p .
Найдите площадь выпуклого четырёхугольника ограниченного, прямыми p , q и осями координат.

Ответ: 29

3. Через точку $(2, 3)$ на прямой $p: y = 2x - 1$ провели прямую q , перпендикулярную прямой p .
Найдите площадь выпуклого четырёхугольника ограниченного, прямыми p , q и осями координат.

Ответ: 4,75 | 19/4

Примеры записи ответов:

8

8,5

17/2

Задача 6. (3 балла)

1. $ABCDE$ — пятиугольник, вписанный в окружность радиуса 12. Прямые AE и BC параллельны, $CD = DE$, $BE = AE = 16$. Найдите отношение CD/AB .

Ответ: 4/3 | 16/12 | 8/6

2. $ABCDE$ — пятиугольник, вписанный в окружность радиуса 15. Прямые AB и CD параллельны, $AE = DE$, $AC = AB = 18$. Найдите отношение AD/AE .

Ответ: 18/15 | 6/5 | 1,2

2. $ABCDE$ — вписанный в окружность S пятиугольник. Прямые DE и AB параллельны, $BC = CD$, $AD = DE = 20$, $BC:BD = 4:5$. Найдите радиус окружности S .

Ответ: 16

Примеры записи ответов:

1/4

0,25

1

Задача 7. (3 балла)

1. На планете Острые Зубы животные размножаются по-особенному, а именно: каждый хомячок каждый год рождает четырёх хомячков; каждый суслик каждые 3 месяца рождает двух маленьких сусликов; а кролики — загадочные существа — чем больше времени проходит, тем быстрее они размножаются, а именно, если человек не отдаёт своих кроликов и не покупает новых, то по прошествии $2k$ месяцев количество его кроликов увеличивается в $k!$ раз. ($k!$ - произведение чисел от 1 до k).

Никита купил на рынке грызунов. Известно, что через год у него стало 765 домашних питомцев. Сколько грызунов Никита купил на рынке?

Если возможных ответов несколько, выпишите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 10; 77; 153 | 11, 77, 153

2 вариант.

На планете Острые Зубы животные размножаются по-особенному, а именно: каждый хомячок каждые 3 месяца рождает двух хомячков; каждый суслик каждые 4 месяца рождает одного маленького суслика; а кролики — загадочные существа — чем больше времени проходит, тем быстрее они размножаются, а именно, если человек не отдаёт своих кроликов и не покупает новых, то по прошествии $2k$ месяцев количество его кроликов увеличивается в $k!$ раз. ($k!$ - произведение чисел от 1 до k).

Антон купил в зоомагазине грызунов. Известно, что через год у Антона стало 720 домашних питомцев. Сколько грызунов Антон купил в зоомагазине?

Если возможных ответов несколько, выпишите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 1; 17; 90 | 1, 17, 90

3 вариант.

На планете Острые Зубы животные размножаются по-особенному, а именно: каждый хомячок каждые 4 месяца рождает четверых хомячков; каждый суслик каждые 4 месяца рождает одного маленького суслика; а кролики — загадочные существа — чем больше времени проходит, тем быстрее они размножаются, а именно, если человек не отдаёт своих кроликов и не покупает новых, то по прошествии $2k$ месяцев количество его кроликов увеличивается в $k!$ раз. ($k!$ - произведение чисел от 1 до k).

Мальчик Илья купил в зоомагазине грызунов. Известно, что через год у Ильи было 1040 домашних зверей. А сколько грызунов Илья купил в зоомагазине?

Если возможных ответов несколько, выпишите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 13, 41, 130 | 13; 41; 130

Примеры записи ответов:

9

9; 23

Задача 8. (4 балла)

1. $ABDE$, $BCEF$, $CDFA$ — вписанные четырёхугольники с точками пересечения диагоналей K , L и M соответственно. Известно, что точка K лежит на отрезках BL и AM , точка M — на отрезке CL . Кроме того, $BK = LE = CM = MD = 5$, $KL = 4$, $LM = 6$. Найдите длину отрезка MK . Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 6

2. $ABDE$, $BCEF$, $CDFA$ — вписанные четырёхугольники с точками пересечения диагоналей K , L и M соответственно. Известно, что точка K лежит на отрезках BL и AM , точка M — на отрезке CL . Кроме того, $BK = MK = ML = 5$, $MC = 7$, $AK = FL = 6$. Найдите длину отрезка EL . Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 5

3. $ABDE$, $BCEF$, $CDFA$ — вписанные четырёхугольники с точками пересечения диагоналей K , L и M соответственно. Известно, что точка K лежит на отрезках BL и AM , точка M — на отрезке CL . Кроме того, $EL = FL = KL = 5$, $DM = 4$, $AK = MK = 6$. Найдите длину отрезка MC . Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 4

Примеры записи ответов:

1/4

0,25

4; 10

Задача 9. (4 балла)

1. В трёхзначном числе каждую цифру умножили или разделили на три. Получились три новые цифры, из которых составили число, расположив каждую из цифр в разряде той, из которой она была получена. Оказалось, что новое число ровно в два раза больше старого. Найдите исходное число. Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 160

2. В трёхзначном числе каждую цифру умножили или разделили на три. Получились три новые цифры, из которых составили число, расположив каждую из цифр в разряде той, из которой она была получена. Оказалось, что новое число ровно в два раза меньше старого. Найдите исходное число. Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 320

3. В трёхзначном числе первую цифру умножили или разделили на два, вторую умножили или разделили на три, а третью умножили или разделили на четыре. Получились три новые цифры, из которых составили число, расположив каждую из цифр в разряде той, из которой она была получена. Оказалось, что новое число ровно в полтора раза больше старого. Найдите исходное число. Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 292

Задача 10. (5 баллов)

1. Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Вершины и точка пересечения их графиков образуют равносторонний треугольник. Найдите длину его стороны.
Если возможных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 12

2. Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Вершины и точка пересечения их графиков образуют равносторонний треугольник. Найдите длину его стороны.
Если возможных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 8

3. Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом $\frac{\sqrt{3}}{8}$. Вершины и точка пересечения их графиков образуют равносторонний треугольник. Найдите длину его стороны.
Если возможных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 16

Примеры записи ответов:

1/4

-0,25; 10

IX. Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады для 9 класса

Задача 1. (2 балла)

1. Точка O — центр некоторой окружности, A — точка вне окружности, B — точка на окружности такая, что AB — касательная. $AO = 10$. Найдите наибольшее возможное значение площади треугольника AOB .

Ответ: 25.

2. Точка O — центр некоторой окружности, A — точка вне окружности, B — точка на окружности такая, что AB — касательная. $AO = 20$. Найдите наибольшее возможное значение площади треугольника AOB .

Ответ: 100.

3. Точка O — центр некоторой окружности, A — точка вне окружности, B — точка на окружности такая, что AB — касательная. $AO = 6$. Найдите наибольшее возможное значение площади треугольника AOB .

Ответ: 9.

Примеры записи ответов:

17

1/7

1,7

Задача 2. (2 балла)

1. На плоскости даны точки $A(-4,2)$, $B(-1,3)$, $C(2,1)$, $D(0,-3)$, $E(-4,-2)$. Чему равна площадь фигуры $ABCDE$?

Ответ: 25,5 || 51/2

2. На плоскости даны точки $A(-3,2)$, $B(0,4)$, $C(3,2)$, $D(2,-2)$, $E(-2,-1)$. Чему равна площадь фигуры $ABCDE$?

Ответ: 23,5 || 47/2

3. На плоскости даны точки $A(-4,0)$, $B(-1,3)$, $C(2,2)$, $D(1,0)$, $E(-3,-3)$. Чему равна площадь фигуры $ABCDE$?

Ответ: 18,5 || 37/2

Примеры записи ответов:

17

1/7

1,7

Задача 3. (2 балла)

1. Пятизначное число $AB\bar{B}ГД$, состоящее из различных цифр, делится как на трёхзначное число $ВГД$, так и на двузначное число $АБ$. Найдите наибольшее возможное значение $AB\bar{B}ГД$.

Ответ: 97485

2. Чётное пятизначное число АБВГД, состоящее из различных цифр, делится как на трёхзначное число ВГД, так и на двузначное число АБ. Найдите наибольшее возможное значение АБВГД.

Ответ: 96480

3. Пятизначное число АБВГД, состоящее из различных цифр, делится как на трёхзначное число ВГД, так и на двузначное число АБ. Найдите наименьшее возможное значение АБВГД.

Ответ: 12480

Примеры записи ответов:

12345

Задача 4. (3 балла)

1. На Загадочном Острове прошёл турнир по настольному теннису в один круг (т. е. каждый сыграл с каждым один раз). После каждой игры оба участника по отдельности подходили к Главному Судье и сообщали ему результат. При этом среди участников были люди только трёх видов: рыцари, всегда говорящие правду, лжецы, которые всегда лгут, и политики, которые всегда говорят то, что им выгодно — каждый политик после каждой игры утверждал, что он выиграл.

После турнира оказалось, что Главный Судья инкогнито посетил несколько игр, в результате чего ему повезло, и он не только смог вычислить результаты всех матчей, но и узнать, что политиков было ровно четверо. Какое наименьшее количество игр он мог посетить?

(Ничьих в настольном теннисе не бывает. Главный Судья заранее не знал, кто из игроков к какому типу принадлежит, и не получал информацию никакими другими способами, кроме описанных в условии)

Ответ: 7

2. На Сказочном Острове прошёл турнир по настольному теннису в один круг (т. е. каждый сыграл с каждым один раз). После каждой игры оба участника по отдельности подходили к Главному Судье и сообщали ему результат. При этом среди участников были люди только трёх видов: рыцари, всегда говорящие правду, лжецы, которые всегда лгут, и политики, которые всегда говорят то, что им выгодно — каждый политик после каждой игры утверждал, что он выиграл.

После турнира оказалось, что Главный Судья инкогнито посетил несколько игр, в результате чего ему повезло, и он не только смог вычислить результаты всех матчей, но и узнать, что политиков было ровно пятеро. Какое наименьшее количество игр он мог посетить?

(Ничьих в настольном теннисе не бывает. Главный Судья заранее не знал, кто из игроков к какому типу принадлежит, и не получал информацию никакими другими способами, кроме описанных в условии)

Ответ: 11

1. Острове Невезения прошёл турнир по настольному теннису в один круг (т. е. каждый сыграл с каждым один раз). После каждой игры оба участника по отдельности подходили к Главному Судье и сообщали ему результат. При этом среди участников были люди только

трёх видов: рыцари, всегда говорящие правду, лжецы, которые всегда лгут, и политики, которые всегда говорят то, что им выгодно — каждый политик после каждой игры утверждал, что он выиграл.

После турнира оказалось, что Главный Судья инкогнито посетил несколько игр, в результате чего ему повезло, и он не только смог вычислить результаты всех матчей, но и узнать, что политиков было ровно шестеро. Какое наименьшее количество игр он мог посетить?

(Ничьих в настольном теннисе не бывает. Главный Судья заранее не знал, кто из игроков к какому типу принадлежит, и не получал информацию никакими другими способами, кроме описанных в условии)

Ответ: 16

Примеры записи ответов:

17

Задача 5. (3 балла)

1. В стране Альфа 95 городов. Известно, что число дорог, выходящих из каждого города, составное. Также известно, что если есть дорога из города А в город В и из города В в город С, то тогда есть дорога и из города А в город С. Какое минимальное количество дорог может быть в стране?

Ответ: 99

2. В стране Бета 98 городов. Известно, что число дорог, выходящих из каждого города, составное. Также известно, что если есть дорога из города А в город В и из города В в город С, то тогда есть дорога и из города А в город С. Какое минимальное количество дорог может быть в стране?

Ответ: 102

3. В стране Гамма 92 города. Известно, что число дорог, выходящих из каждого города, составное. Также известно, что если есть дорога из города А в город В и из города В в город С, то тогда есть дорога и из города А в город С. Какое минимальное количество дорог может быть в стране?

Ответ: 96

Примеры записи ответов:

17

Задача 6. (3 балла)

1. Решите в простых числах уравнение $p^3 - q^3 = 1946$. В ответе укажите пару $(p; q)$. Если таких пар несколько, укажите ту, для которой $p-q$ максимально.

Ответ: 19; 17 | (19; 17)

2. Решите в простых числах уравнение $p^3 - q^3 = 5528$. В ответе укажите пару $(p; q)$. Если таких пар несколько, укажите ту, для которой $p-q$ максимально.

Ответ: 19; 11 | (19; 11)

3. Решите в простых числах уравнение $p^3 - q^3 = 2716$. В ответе укажите пару $(p; q)$. Если таких пар несколько, укажите ту, для которой $p-q$ максимально.

Ответ: 17; 13 | (17; 13)

Примеры записи ответов:

(37; 11)

Задача 7. (3 балла)

1. Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом 1. Разность между корнями первого равна 1, разность между корнями второго равна 7. Какое наибольшее значение может принимать разность между корнями суммы этих трёхчленов?

Ответ: 5

2. Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом 1. Разность между корнями первого равна 7, разность между корнями второго равна 17. Какое наибольшее значение может принимать разность между корнями суммы этих трёхчленов?

Ответ: 13

3. Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом 1. Разность между корнями первого равна 17, разность между корнями второго равна 31. Какое наибольшее значение может принимать разность между корнями суммы этих трёхчленов?

Ответ: 25

Примеры записи ответов:

17

1/7

1,7

Задача 8. (3 балла)

1. Дан прямоугольный параллелепипед со сторонами 6, 6 и x . При каких значениях числа x произведение площади поверхности и периметра (суммы длин всех рёбер) этого параллелепипеда не превосходят $224/3$ его объёма?

Ответ записать в виде промежутка.

Ответ: $[4; 9] \parallel [4, 9]$

2. Дан прямоугольный параллелепипед со сторонами 4, 6 и x . При каких значениях числа x произведение площади поверхности и периметра (суммы длин всех рёбер) этого параллелепипеда не превосходят 78 его объёмов?

Ответ записать в виде промежутка.

Ответ: $[3; 8] \parallel [3, 8]$

3. Дан прямоугольный параллелепипед со сторонами 2, 6 и x . При каких значениях числа x

произведение площади поверхности и периметра (суммы длин всех рёбер) этого параллелепипеда не превосходят 88 его объёмов?

Ответ записать в виде промежутка.

Ответ: $[3; 4] \parallel [3, 4]$

Примеры записи ответов:

$[1; 5]$

Задача 9. (4 балла)

1. Окружность радиуса 12 с центром в точке O и окружность радиуса 3 касаются внутренним образом в точке H . Прямая XH — их общая касательная, прямая OX — касательная к маленькой окружности. Найдите квадрат длины отрезка OX .

Ответ: 162

2.. Окружность радиуса 12 с центром в точке O и окружность радиуса 4 касаются внутренним образом в точке H . Прямая XH — их общая касательная, прямая OX — касательная к маленькой окружности. Найдите квадрат длины отрезка OX .

Ответ: 192

3. Окружность радиуса 20 с центром в точке O и окружность радиуса 8 касаются внутренним образом в точке H . Прямая XH — их общая касательная, прямая OX — касательная к маленькой окружности. Найдите квадрат длины отрезка OX .

Ответ: 720

Примеры записи ответов:

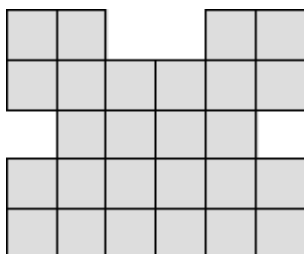
17

$1/7$

1,7

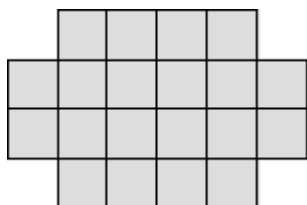
Задача 10. (5 баллов)

1. Сколько существует способов разбить данную фигуру на прямоугольники 1×2 ?



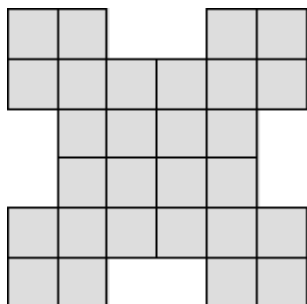
Ответ: 88

2. Сколько существует способов разбить данную фигуру на прямоугольники 1×2 ?



Ответ: 50

3. Сколько существует способов разбить данную фигуру на прямоугольники 1x2?



Ответ: 128

X. Задания заключительного этапа олимпиады для 8 класса

Решения

8 класс

1 вариант

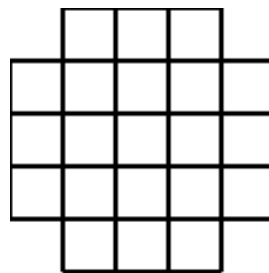
1. (2 балла) Сколькими способами можно разбить изображённую фигуру на прямоугольники 1×3 ?

Ответ: 6

Решение:

На каждой из сторон фигуры находится по три клетки. Если каждые такие клетки образуют полосу из трёх клеток, оставшийся квадрат 3×3 можно разбить двумя способами.

Если же на какой-то стороне три клетки не образуют полосу, оставшаяся часть фигуры разбивается однозначно.



2. (3 балла) На Острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды в комнате собралось n островитян.

Первый из них сказал: “Ровно 1 процент из присутствующих в этой комнате – лжецы.”

Второй сказал: “Ровно 2 процента из присутствующих в этой комнате – лжецы.”

и так далее

Человек с номером n сказал: “Ровно n процентов из присутствующих в этой комнате – лжецы.”

Сколько человек могло быть в комнате, если точно известно, что хотя бы один из них рыцарь?

Ответ: 100

Решение:

Рыцарь должен быть ровно один, так как все островитяне в комнате противоречат друг другу. Значит, рыцарей $\frac{1}{n}$ от общего числа человек. Пусть их k процентов от общего числа присутствующих, это значит, человек с номером $100 - k$ сказал правду.

Получаем, что $\frac{1}{n} = \frac{k}{100}$, где $100 - k \leq n$.

Это можно переписать как $nk = 100$ и $k + n \geq 100$, откуда $nk - k - n \leq 0$.

Следовательно, $n - k - n + 1 \leq 1$, то есть $(n - 1)(k - 1) \leq 1$. Поскольку n и k оба натуральные, получаем, что либо одно из них равно 1, либо оба они равны 2. Последний случай не удовлетворяет уравнению $nk = 100$.

Если $n = 1$, мы получаем, что единственный человек лжец, что противоречит условию.

Если $k = 1$, значит, $n = 100$ и правду говорит первый человек. Это и есть ответ.

3. (3 балла) Аня, Ваня, Дания и Таня собирали яблоки. Оказалось, что каждый из них собрал целое количество процентов от общего числа собранных яблок, причём все эти числа различны и больше нуля. Затем Таня, собравшая больше всех яблок, съела свои яблоки. После этого оказалось, что у каждого из ребят по-прежнему целое количество процентов, но уже от числа оставшихся яблок. Какое минимальное количество яблок могло быть собрано?

Ответ: 20: например $2+3+5+10$

Решение:

Пусть Аня собрала меньше всех яблок и это число k , а общее число яблок n . Тогда мы получаем, что всего собрано не менее $4k+6$ яблок. При $k \geq 5$ мы получаем уже больше 20 яблок. При $k < 5$ получаем $n = 4k+6 > 5k$. Так как $\frac{n}{k}$ должно быть целым числом и делителем сотни, получается, что собрано не менее $10k$ яблок, то есть хотя бы 20 при любом k , большем 1.

При $k = 1$ получаем, что Аня, Ваня и Саня собрали хотя бы 6 яблок, а значит, аналогично предыдущим рассуждениям, их хотя бы 10. Значит, у всех четверых вместе их было хотя бы 20 (следующий делитель сотни).

4. (3 балла) Число, записанное на доске, разрешается умножать на 5 или переставлять в нём цифры (нельзя ставить ноль на первое место). Можно ли из числа 1 таким образом получить стозначное число $5222 \dots 2221$?

Ответ: Нет

Решение:

Рассмотрим обратный процесс: будем пытаться из числа $5222 \dots 2221$ получить 1 указанными операциями.

Сначала надо получить число делящееся на 5, а именно $222 \dots 22122 \dots 5 = 222 \dots 22225 - 10^k$ (где k натуральное число). Разделив его на 5, получим число $444 \dots 445 - 2 \cdot 10^{k-1}$, то есть либо число вида $444 \dots 44244 \dots 445$, либо число $444 \dots 443$. Второй случай нас не устраивает, так как из него невозможно получить никакое число с меньшим количеством цифр.

От перестановки цифр в первом случае изменится только число k . Поделим $444 \dots 445 - 2 \cdot 10^{k-1}$ на 5, получим $888 \dots 889 - 4 \cdot 10^{k-2}$. Единственный способ сделать так, чтобы в получившемся числе была хотя бы одна пятёрка, это $k = 2$ и число $888 \dots 885$. Теперь надо поделить на 5 его, получается число $166 \dots 667$, в котором пятёрки нет. В этом числе как ни переставляй цифры, числа делящегося на 5 не получить, значит, 1 из него получить нельзя.

Значит и указанными в условии операциями не получить $5222 \dots 2221$ из единицы.

5. (3 балла) Дан прямоугольник $ABCD$, $AB = 8$, $BC = 9$. Точка K лежит на стороне BC , точка L — на стороне CD , точка M — на стороне AD . Докажите, что длина ломаной $AKLMB$ не меньше 30.

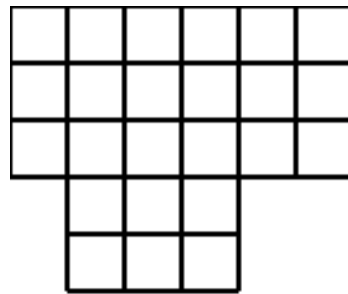
8 класс
2 вариант

1. (2 балла) Сколькими способами можно разбить изображённую фигуру на прямоугольники 1×3 ?

Ответ: 8

Решение:

На левой стороне фигуры находятся три клетки. Если эти три клетки не образуют полоску 1×3 , три полоски, содержащие их образуют квадрат 3×3 . Оставшаяся часть фигуры распадается на прямоугольник 2×3 и квадрат 3×3 . Первый разбивается единственным способом, второй двумя способами. Значит, мы получили два способа разбиения.



Если же эти три клетки образуют прямоугольник 1×3 , рассмотрим нижние три клетки. Если они не образуют прямоугольник 1×3 , оставшаяся фигура разбивается однозначно. Если они образуют прямоугольник 1×3 , а находящиеся над ними три клетки не образуют, оставшаяся фигура также разбивается однозначно. Это ещё 2 способа.

Аналогично получаем ещё 2 способа, рассматривая самые правые клетки. Если же все указанные клетки образуют 4 прямоугольника 1×3 , остаётся квадрат 3×3 , который разбивается двумя способами.

2. (3 балла) На Острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды в комнате собралось n островитян.

Первый из них сказал: “Ровно 1 процент из присутствующих в этой комнате – рыцари.”

Второй сказал: “Ровно 2 процента из присутствующих в этой комнате – рыцари.”

и так далее

Человек с номером n сказал: “Ровно n процентов из присутствующих в этой комнате – рыцари.”

Сколько человек могло быть в комнате, если точно известно, что хотя бы один из них рыцарь?

Ответ: 10, 20, 25, 50 или 100.

Решение:

Рыцарь должен быть ровно один, так как все островитяне в комнате противоречат друг другу. Значит, рыцарей $\frac{1}{n}$ от общего числа человек. Пусть их k процентов от общего числа присутствующих, это значит, человек с номером k сказал правду.

Получаем, что $\frac{1}{n} = \frac{k}{100}$, где $k \leq n$.

Это можно переписать как $nk = 100$, $n \geq \frac{100}{n}$. Значит, n может быть любым делителем сотни, не меньшим 10.

3. (3 балла) Аня, Ваня, Дania, Саня и Таня собирали яблоки. Оказалось, что каждый из них собрал целое количество процентов от общего числа собранных яблок, причём все эти числа различны и больше нуля. Затем Таня, собравшая больше всех яблок, съела свои яблоки. После этого оказалось, что у каждого из ребят по-прежнему целое количество процентов, но уже от числа оставшихся яблок. Какое минимальное количество яблок могло быть собрано?

Ответ: 20: например $1+2+3+4+10$

Решение:

Пусть Аня собрала меньше всех яблок, и это число k , а общее количество яблок n . Тогда мы получаем, что всего собрано не менее $4k + 10$ яблок. При $k \geq 3$ мы получаем уже больше 20 яблок. При $k = 2$ получаем $n \geq 18 = 9k$. Так как $\frac{n}{k}$ должно быть целым числом и делителем сотни, получается, что собрано не менее $10k$ яблок, то есть опять хотя бы 20. При $k = 1$ получаем, что ребята собрали хотя бы 15 яблок и это число, аналогично предыдущим рассуждениям, должно быть делителем сотни, то есть опять хотя бы 20 яблок.

4. (3 балла) Число, записанное на доске, разрешается умножать на 5 или переставлять в нём цифры (нельзя ставить ноль на первое место). Можно ли из числа 1 таким образом получить стопятидесятизначное число $5222 \dots 2223$?

Ответ: Нет

Решение:

Рассмотрим обратный процесс: будем пытаться из числа $5222 \dots 2223$ получить 1 указанными операциями.

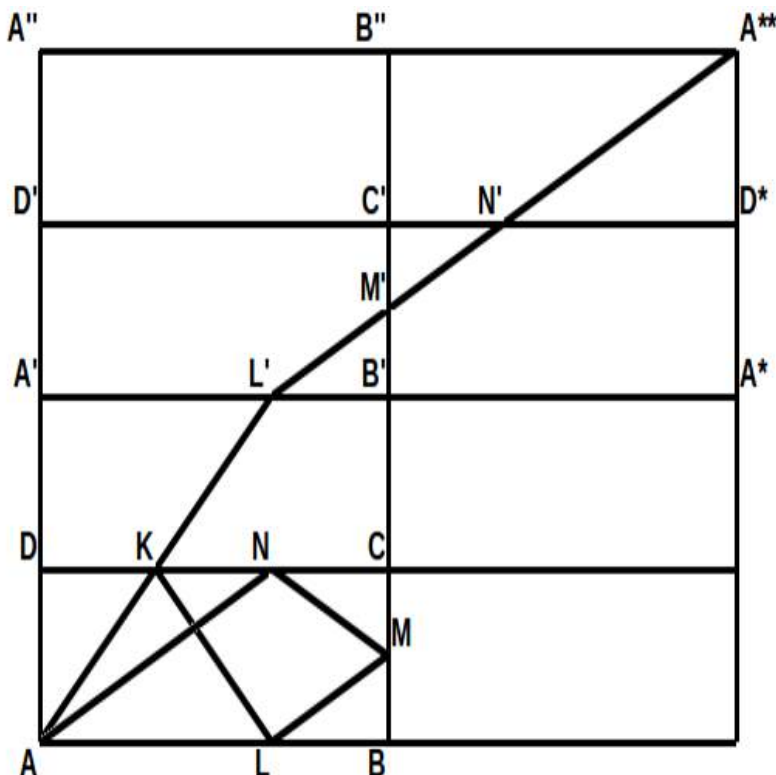
Сначала надо получить число делящееся на 5, а именно $222 \dots 22322 \dots 5 = 222 \dots 22225 + 10^k$ (где k натуральное число). Разделив его на 5, получим число $444 \dots 445 + 2 \cdot 10^{k-1}$, то есть либо число вида $444 \dots 44644 \dots 445$, либо число $444 \dots 447$. Второй случай нас не устраивает, так как из него невозможно получить никакое число с меньшим количеством цифр.

От перестановки цифр в первом случае изменится только число k . Поделим $444 \dots 445 + 2 \cdot 10^{k-1}$ на 5, получим $888 \dots 8889 + 4 \cdot 10^{k-2}$. В этом числе как ни переставляй цифры, числа делящегося на 5 не получить, значит, 1 из него получить нельзя.

Значит и указанными в условии операциями не получить $5222 \dots 2223$ из единицы.

5. (3 балла) Дан прямоугольник $ABCD$, $AB = 5$, $BC = 6$. Точка K лежит на стороне CD , точка L — на стороне AB , точка M — на стороне BC , точка N — на стороне CD . Докажите, что длина замкнутой ломаной $AKLMNA$ не больше 26.

Решение:



Достроим к нашему прямоугольнику ещё несколько равных ему, как показано на рисунке. Возьмём точку L' такую, что $AL = AL'$ и точку M такую, что $B'M' = BM$ и точку N' такую, что $C'N' = CN$.

Из построения очевидно, что длина ломаной $AKLMNA$ равна длине ломаной $AKL'M'N'A''$, которая длиннее, чем AB'' . Длину этого отрезка можно вычислить по теореме Пифагора и она равна 26.

6. (3 балла) Аня посчитала все девятизначные числа, все цифры в каждом из которых различны, делящиеся на 9. Коля посчитал все десятизначные числа, все цифры в каждом из которых различны, делящиеся на 5. Кто из них насчитал больше чисел?

Ответ: оба насчитали одинаково.

Решение:

Построим взаимно однозначное соответствие между этими множествами чисел. Рассмотрим какое-то Анино число. Так как оно делится на 3, сумма его цифр также делится на 9. Чтобы это условие выполнялось, надо чтобы в этом числе были все цифры, кроме 0, 3, 6 или 9.

Допишем к Аниному числу сзади недостающую цифру, а потом поменяем местами 4 и 9, а также 2 и 3. Теперь у нас получилось десятизначное число, заканчивающееся на 0, 2, 4 или 6 то есть как раз одно из тех чисел, что посчитал Коля.

Обратное преобразование тоже работает: поменяем местами 4 и 9, а также 2 и 3, а потом уберём последнюю цифру.

Вместо этого, разумеется, можно было непосредственно посчитать количество и тех, и других чисел. Оно составляет $33 \cdot 8!$.

7. (3 балла) Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точка P – пересечение BE и AC , точка Q пересечение CE и AD , точка O – пересечение AD и BE . Оказалось, что ABP и DEQ – равнобедренные треугольники с углом при вершине (именно при вершине, а не при основании), равным 40° градусов. Найдите значение угла ACE , если известно, что треугольники APO и EQO также равнобедренные.

Ответ: 120° или 75°

Решение: Рассмотрим треугольник ABP . Угол $\angle APB$ в нём может быть равен 40° или 70° . Тогда смежный $\angle APO$ составляет 140° или 110° . Значит, в треугольнике APO это угол при вершине и $\angle AOP$ составляет 20° или 35° .

Проведём аналогичные рассуждения для треугольников BQE и EQO , получим, что $\angle QOE$ также составляет 20° или 35° в зависимости от $\angle DQE$. Но $\angle QOE = \angle AOP$ как вертикальные, значит $\angle APB = \angle DQE$.

$\angle ACE = 360^\circ - \angle CPO - \angle CQO - \angle POQ = 360^\circ - 540^\circ + \angle APO + \angle EQO + \angle AOP$, что составляет 120° или 75°

8. (4 балла) На доске выписаны все трёхзначные натуральные числа, первые цифры которых нечётны и больше 1. Какое наибольшее количество квадратных уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$ можно составить, используя в качестве a , b и c данные числа, каждое не больше одного раза так, чтобы все эти уравнения имели корни.

Ответ: 100.

Решение:

В каждом уравнении обязательно должен быть коэффициент меньше пятиста. В противном случае дискриминант $b^2 - 4ac < 1000^2 - 4 \cdot 500^2 = 0$ и уравнение не имеет корней. Таким образом, получаем не больше 100 уравнений.

Теперь пример: В качестве b берём числа, начинающиеся на 9, в качестве a и c для каждого уравнение числа $500 - k$ и $399 + k$ соответственно, где k принимает натуральные значения от 0 до 99. Тогда $ac = (500 - k)(399 + k) < (500 - k)(400 + k) = 200000 + 100k - k^2 = 202500 - (k - 50)^2 \leq 202500$. Значит, $4ac < 810000$, с другой стороны, $b^2 \geq 900^2 = 810000$, следовательно, $b \geq ac$.

XI. Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады для 8 класса

Задача 1. (1 балл)

1. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D , а на стороне BC — точка E . Отрезки BD и AE пересекаются в точке K . Оказалось, что $AD = AK$, $BK = EK$. Угол CAE составляет 20 градусов. Найдите градусную меру угла ACB

Ответ: 30

2. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D , а на стороне BC — точка E . Отрезки BD и AE пересекаются в точке M . Оказалось, что $DM = AM$, $BE = BM$. Угол CBD составляет 40 градусов. Найдите градусную меру угла ACB

Ответ: 15

3. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D , а на стороне BC — точка E . Отрезки CD и AE пересекаются в точке L . Оказалось, что $CL = CE$, $AL = DL$. Угол ACE составляет 24 градуса. Найдите градусную меру угла ABC .

Ответ: 27

Примеры записи ответов:

45

Задача 2. (2 балла)

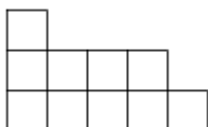
1. Лисица строит «пирамидки» из 11 кубиков следующим образом:

каждая «пирамидка» состоит из одного или нескольких уровней;

на каждом уровне количество кубиков строго меньше, чем на предыдущем;

каждый новый уровень состоит из одного или нескольких подряд идущих кубиков, начиная с левого края.

Пример «пирамидки» из десяти кубиков вы можете увидеть на картинке:



Какое количество различных пирамидок может получиться у Лисицы?

Ответ: 12

2. Лисица строит «пирамидки» из 12 кубиков следующим образом:

каждая «пирамидка» состоит из одного или нескольких уровней;

на каждом уровне количество кубиков строго меньше чем на предыдущем;

каждый новый уровень состоит из одного или нескольких подряд идущих кубиков, начиная с левого края.

Пример «пирамидки» из десяти кубиков вы можете увидеть на картинке:



Какое количество различных пирамидок может получиться у Лисицы?

Ответ: 15

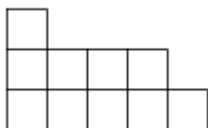
3. Лисица строит «пирамидки» из 13 кубиков следующим образом:

каждая «пирамидка» состоит из одного или нескольких уровней;

на каждом уровне количество кубиков строго меньше, чем на предыдущем;

каждый новый уровень состоит из одного или нескольких подряд идущих кубиков, начиная с левого края.

Пример «пирамидки» из десяти кубиков вы можете увидеть на картинке:



Какое количество различных пирамидок может получиться у Лисицы?

Ответ: 18

Примеры записи ответов:

12

Задача 3. (2 балла)

1. Таблица 6х6 заполнена числами. Числа, стоящие в соседних по стороне клетках, отличаются ровно в два раза. В одной из клеток стоит число 1. Какое максимальное число может находиться в этой таблице?

Ответ: 1024 | 2^{10}

2. Таблица 20х20 заполнена числами. Числа, стоящие в соседних по стороне клетках, отличаются ровно на 5. В одной из клеток стоит число 1. Какое максимальное число может находиться в этой таблице?

Ответ: 191

3. Таблица 10х10 заполнена числами. Числа, стоящие в соседних по стороне клетках, отличаются ровно на 7. В одной из клеток стоит число 1. Какое максимальное число может находиться в этой таблице?

Ответ: 127

Задача 4. (2 балла)

1. На доске была написана некоторая цифра a , большая 1. Имеющееся число разрешается умножать на 5 или прибавлять к нему исходное однозначное число a . После нескольких таких операций получилось число 2761535. Найдите a . Если возможных вариантов несколько, укажите их любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 5; 7 | 7; 5 | 5, 7 | 7, 5

2. На доске была написана некоторая цифра a , большая 1. Имеющееся число разрешается

умножать на 5 или прибавлять к нему исходное однозначное число a . После нескольких таких операций получилось число 1183515. Найдите a . Если возможных вариантов несколько, укажите их любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 5; 3 | 3; 5 | 5, 3 | 3, 5

3. На доске была написана некоторая цифра a , большая 1. Имеющееся число разрешается умножать на 5 или прибавлять к нему исходное однозначное число a . После нескольких таких операций получилось число 9859510. Найдите a . Если возможных вариантов несколько, укажите их любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 5; 2 | 2; 5 | 5, 2 | 2, 5

Примеры записи ответов:

5

5; 9

Задача 5. (2 балла)

1. На столе лежат палочки длиной 1, 2, 3, ..., n сантиметров. Известно, что из них можно сложить 40 треугольников, используя каждую палочку не более, чем по разу, а вот 41 уже нельзя. Найдите n (длину самой большой палочки)? Если возможных ответов несколько, перечислите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 121; 122; 123 | 121, 122, 123

2. На столе лежат палочки длиной 1, 2, 3, ..., n сантиметров. Известно, что из них можно сложить 50 треугольников, используя каждую палочку не более, чем по разу, а вот 51 уже нельзя. Найдите n (длину самой большой палочки)? Если возможных ответов несколько, перечислите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 151, 152, 153 | 151; 152; 153

3. На столе лежат палочки длиной 1, 2, 3, ..., n сантиметров. Известно, что из них можно сложить 100 треугольников, используя каждую палочку не более, чем по разу, а вот 101 уже нельзя. Найдите n (длину самой большой палочки)? Если возможных ответов несколько, перечислите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 301, 302, 303 | 301; 302; 303

Задача 6. (3 балла)

1. Дана трапеция (не параллелограмм) $ABCD$. Известно, что треугольники ABD и CBD равнобедренные, угол A составляет 40 градусов. Найдите все возможные значения угла C и выпишите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 55; 70; 100 | 55, 70, 100

2. Дана трапеция (не параллелограмм) $ABCD$. Известно, что треугольники ABD и CBD равнобедренные, угол A составляет 20 градусов. Найдите все возможные значения угла C и выпишите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 50; 80; 140 | 50, 80, 140

3. Дана трапеция (не параллелограмм) $ABCD$. Известно, что треугольники ABD и CBD равнобедренные, угол A составляет 36 градусов. Найдите все возможные значения угла C и выпишите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 54; 72; 108 | 54, 72, 108

Задача 7. (3 балла)

1. В магазине продают мешки по 3 кг яблок (один мешок стоит 20 руб), мешки по 4 кг груш (один мешок стоит 30 руб) и мешки по 5 кг слив (один мешок стоит 40 руб). У Ани есть 130 рублей, какое максимальное количество кг фруктов она сможет купить?

Ответ: 19

2. В магазине продают мешки по 4 кг яблок (один мешок стоит 15 руб), мешки по 5 кг груш (один мешок стоит 20 руб) и мешки по 6 кг слив (один мешок стоит 25 руб). У Ани есть 115 рублей, какое максимальное количество кг фруктов она сможет купить?

Ответ: 30

3. В магазине продают мешки по 3 кг яблок (один мешок стоит 20 руб), мешки по 4 кг груш (один мешок стоит 35 руб) и мешки по 5 кг слив (один мешок стоит 50 руб). У Ани есть 155 рублей, какое максимальное количество кг фруктов она сможет купить?

Ответ: 22

Примеры записи ответов:

11

Задача 8. (3 балла)

1. За круглым столом сидят рыцари, которые всё время говорят правду, и лжецы, которые всё время лгут, всего 239 человек. Каждый из них сказал: «Оба мои соседа лжецы». Какое наименьшее и наибольшее количество лжецов могло быть за столом? Ответы укажите в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 120, 159 | 120; 159 | 159; 120 | 159, 120

2. За круглым столом сидят рыцари, которые всё время говорят правду, и лжецы, которые всё время лгут, всего 245 человек. Каждый из них сказал: «Оба мои соседа лжецы». Какое наименьшее и наибольшее количество лжецов могло быть за столом? Ответы укажите в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 123, 163 | 123; 163 | 163; 123 | 163, 123

3. За круглым столом сидят рыцари, которые всё время говорят правду, и лжецы, которые всё время лгут, всего 289 человек. Каждый из них сказал: «Оба мои соседа лжецы». Какое наименьшее и наибольшее количество лжецов могло быть за столом? Ответы укажите в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 145, 192 | 145; 192 | 192; 145 | 192, 145

Примеры записи ответов:

100; 200

Задача 9. (3 балла)

1. Через точку (3, 5) на прямой $p: y = x + 2$ провели прямую q , перпендикулярную прямой p . Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, ограниченного прямыми p , q и осями координат.

Ответ: 23

2. Через точку (1, 5) на прямой $p: y = 2x + 3$ провели прямую q , перпендикулярную прямой p . Найдите площадь выпуклого четырёхугольника ограниченного, прямыми p , q и осями координат.

Ответ: 29

3. Через точку (2, 3) на прямой $p: y = 2x - 1$ провели прямую q , перпендикулярную прямой p . Найдите площадь выпуклого четырёхугольника ограниченного, прямыми p , q и осями координат.

Ответ: 4,75 | 19/4

Примеры записи ответов:

8

8,5

17/2

Задача 10. (5 баллов)

1. В трёхзначном числе каждую цифру умножили или разделили на три. Получились три новые цифры, из которых составили число, расположив каждую из цифр в разряде той, из которой она была получена. Оказалось, что новое число ровно в два раза больше старого. Найдите исходное число. Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 160

2. В трёхзначном числе каждую цифру умножили или разделили на три. Получились три новые цифры, из которых составили число, расположив каждую из цифр в разряде той, из которой она была получена. Оказалось, что новое число ровно в два раза меньше старого. Найдите исходное число. Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 320

3. В трёхзначном числе первую цифру умножили или разделили на два, вторую умножили или разделили на три, а третью умножили или разделили на четыре. Получились три новые цифры, из которых составили число, расположив каждую из цифр в разряде той, из которой она была получена. Оказалось, что новое число ровно в полтора раза больше старого.

Найдите исходное число. Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 292

ХІІ. Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады для 8 класса

Задача 1. (1 балл)

1. На плоскости даны точки $A(-3,1)$, $B(0,4)$, $C(1,0)$, $D(-1,-2)$. Чему равна площадь фигуры $ABCD$?

Ответ: 12,5.

2. На плоскости даны точки $A(-3,1)$, $B(0,3)$, $C(2,0)$, $D(-2,-1)$. Чему равна площадь фигуры $ABCD$?

Ответ: 11.

3. На плоскости даны точки $A(-2,0)$, $B(-1,4)$, $C(1,3)$, $D(0,-2)$. Чему равна площадь фигуры $ABCD$?

Ответ: 10,5.

Примеры записи ответов:

17

1/7

1,7

Задача 2. (2 балла)

1. У мальчика Коли есть 100 рублей. Если бы цены после Нового года поднялись на u процентов, то он смог бы купить себе 2 шоколадки, а если бы цены опустились на u процентов, то — 5 шоколадок. Сколько стоила одна шоколадка до Нового года?

Ответ: 35.

2. У мальчика Коли есть 100 рублей. Если бы цены после Нового года поднялись на u процентов, то он смог бы купить себе 2 шоколадки, а если бы цены опустились на u процентов, то — 10 шоколадок. Сколько стоила одна шоколадка до Нового года?

Ответ: 30.

3. У мальчика Коли есть 100 рублей. Если бы цены после Нового года поднялись на u процентов, то он смог бы купить себе 5 шоколадки, а если бы цены опустились на u процентов, то — 10 шоколадок. Сколько стоила одна шоколадка до Нового года?

Ответ: 15.

Задача 3. (2 балла)

1. Дан равносторонний треугольник ABC . Внутри него взята точка D так, что она разбивает треугольник ABC на три треугольника ABD , BCD , ACD так, что один из них прямоугольный, а еще один — равнобедренный треугольник с углом при вершине 130 градусов. Найдите все возможные значения угла BCD в градусах. В ответе перечислите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 5, 25, 35, 55 || 5; 25; 35; 55

2. Дан равносторонний треугольник ABC . Внутри него взята точка D так, что она разбивает треугольник ABC на три треугольника ABD , BCD , ACD так, что один из них прямоугольный, а еще один — равнобедренный треугольник с углом при вершине 140 градусов. Найдите все возможные значения угла BCD в градусах. В ответе перечислите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 10, 20, 40, 50 || 10; 20; 40; 50

3. Дан равносторонний треугольник ABC . Внутри него взята точка D так, что она разбивает треугольник ABC на три треугольника ABD , BCD , ACD так, что один из них прямоугольный, а еще один — равнобедренный треугольник с углом при вершине 172 градуса. Найдите все возможные значения угла BCD в градусах. В ответе перечислите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 4, 26, 34, 56 || 4; 26; 34; 56

Задача 4. (2 балла)

1. Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AB=3$, $BD=8$, $AC=4$, $CD=4$. Известно, что хотя бы одна из двух неизвестных сторон четырехугольника $ABCD$ так же целая. Найдите, чему она может быть равна. В ответе укажите все подходящие значения в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 5, 6, 7.

2. Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $BC=4$, $BD=9$, $AC=5$, $AD=3$. Известно, что хотя бы одна из двух неизвестных сторон четырехугольника $ABCD$ так же целая. Найдите, чему она может быть равна. В ответе укажите все подходящие значения в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 6, 7, 8.

3. Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AB=2$, $BC=4$, $AD=6$, $CD=3$. Известно, что хотя бы одна из двух диагоналей имеет целую длину, найдите, чему она может быть равна В ответе укажите все подходящие значения в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 4, 5, 6.

Задача 5. (3 балла)

1. Пятизначное число $АБВГД$, состоящее из различных цифр, делится как на трёхзначное число $ВГД$, так и на двузначное числе $АБ$. Найдите наибольшее возможное значение $АБВГД$.

Ответ: 97485

2. Чётное пятизначное число АБВГД, состоящее из различных цифр, делится как на трёхзначное число ВГД, так и на двузначное число АБ. Найдите наибольшее возможное значение АБВГД.

Ответ: 96480

3. Пятизначное число АБВГД, состоящее из различных цифр, делится как на трёхзначное число ВГД, так и на двузначное число АБ. Найдите наименьшее возможное значение АБВГД.

Ответ: 12480

Примеры записи ответов:

12345

Задача 6. (3 балла)

1. В стране Альфа 95 городов. Известно, что число дорог, выходящих из каждого города, составное. Также известно, что если есть дорога из города А в город В и из города В в город С, то тогда есть дорога и из города А в город С. Какое минимальное количество дорог может быть в стране?

Ответ: 99

2. В стране Бета 98 городов. Известно, что число дорог, выходящих из каждого города, составное. Также известно, что если есть дорога из города А в город В и из города В в город С, то тогда есть дорога и из города А в город С. Какое минимальное количество дорог может быть в стране?

Ответ: 102

3. В стране Гамма 92 города. Известно, что число дорог, выходящих из каждого города, составное. Также известно, что если есть дорога из города А в город В и из города В в город С, то тогда есть дорога и из города А в город С. Какое минимальное количество дорог может быть в стране?

Ответ: 96

Примеры записи ответов:

17

Задача 7. (4 балла)

1. Даны два квадратных уравнения со старшим коэффициентом 1. Разность между корнями первого равна 1, разность между корнями второго равна 7. Какое наибольшее значение может принимать разность между корнями суммы этих уравнений?

Ответ: 5

2. Даны два квадратных уравнения со старшим коэффициентом 1. Разность между корнями первого равна 7, разность между корнями второго равна 17. Какое наибольшее значение

может принимать разность между корнями суммы этих уравнений?

Ответ: 13

3. Даны два квадратных уравнения со старшим коэффициентом 1. Разность между корнями первого равна 17, разность между корнями второго равна 31. Какое наибольшее значение может принимать разность между корнями суммы этих уравнений?

Ответ: 25

Примеры записи ответов:

17

1/7

1,7

Задача 8. (4 балла)

1. На Загадочном Острове прошёл турнир по настольному теннису в один круг (т. е. каждый сыграл с каждым один раз). После каждой игры оба участника по отдельности подходили к Главному Судье и сообщали ему результат. При этом среди участников были люди только трёх видов: рыцари, всегда говорящие правду, лжецы, которые всегда лгут, и политики, которые всегда говорят то, что им выгодно — каждый политик после каждой игры утверждал, что он выиграл.

После турнира оказалось, что Главный Судья инкогнито посетил несколько игр, в результате чего ему повезло, и он не только смог вычислить результаты всех матчей, но и узнать, что политиков было ровно четверо. Какое наименьшее количество игр он мог посетить?

(Ничьих в настольном теннисе не бывает. Главный Судья заранее не знал, кто из игроков к какому типу принадлежит, и не получал информацию никакими другими способами, кроме описанных в условии)

Ответ: 7

2. На Сказочном Острове прошёл турнир по настольному теннису в один круг (т. е. каждый сыграл с каждым один раз). После каждой игры оба участника по отдельности подходили к Главному Судье и сообщали ему результат. При этом среди участников были люди только трёх видов: рыцари, всегда говорящие правду, лжецы, которые всегда лгут, и политики, которые всегда говорят то, что им выгодно — каждый политик после каждой игры утверждал, что он выиграл.

После турнира оказалось, что Главный Судья инкогнито посетил несколько игр, в результате чего ему повезло, и он не только смог вычислить результаты всех матчей, но и узнать, что политиков было ровно пятеро. Какое наименьшее количество игр он мог посетить?

(Ничьих в настольном теннисе не бывает. Главный Судья заранее не знал, кто из игроков к какому типу принадлежит, и не получал информацию никакими другими способами, кроме описанных в условии)

Ответ: 11

3. Острове Невезения прошёл турнир по настольному теннису в один круг (т. е. каждый сыграл с каждым один раз). После каждой игры оба участника по отдельности подходили к Главному Судье и сообщали ему результат. При этом среди участников были люди только трёх видов: рыцари, всегда говорящие правду, лжецы, которые всегда лгут, и политики, которые всегда говорят то, что им выгодно — каждый политик после каждой игры

утверждал, что он выиграл.

После турнира оказалось, что Главный Судья инкогнито посетил несколько игр, в результате чего ему повезло, и он не только смог вычислить результаты всех матчей, но и узнать, что политиков было ровно шестеро. Какое наименьшее количество игр он мог посетить?

(Ничьих в настольном теннисе не бывает. Главный Судья заранее не знал, кто из игроков к какому типу принадлежит, и не получал информацию никакими другими способами, кроме описанных в условии)

Ответ: 16

Примеры записи ответов:

17

Задача 9. (4 балла)

1. Сколько существует способов разбить данную фигуру на прямоугольники 1×2 ?

Ответ: 24

2. Сколько существует способов разбить данную фигуру на прямоугольники 1×2 ?

Ответ: 18

3. Сколько существует способов разбить данную фигуру на прямоугольники 1×2 ?

Ответ: 20

Задача 10. (4 балла)

1. Изначально на доске было записано число, состоящее из тысячи девяток. С числом разрешается производить следующие операции: вычёркивать из него единицу, семёрку или четвёрку, либо уменьшить любые три цифры, большие единицы, на один.

После некоторого количества таких операций у Васи появилось число, к которому ни одна из них не применима. Какое наибольшее число могло остаться у Васи?

Ответ: 88

2. Изначально на доске было записано число, состоящее из тысячи восьмёрок. С числом разрешается производить следующие операции: вычёркивать из него единицу, семёрку или четвёрку, либо уменьшить любые три цифры, большие единицы, на один.

После некоторого количества таких операций у Васи появилось число, к которому ни одна из них не применима. Какое наибольшее число могло остаться у Васи?

Ответ: 66

3. Изначально на доске было записано число, состоящее из тысячи девяток. С числом разрешается производить следующие операции: вычёркивать из него двойку, пятёрку или восьмёрку, либо уменьшить любые три цифры, большие 2, на один.

После некоторого количества таких операций у Васи появилось число, к которому ни одна из них не применима. Какое наибольшее число могло остаться у Васи?

Ответ: 77

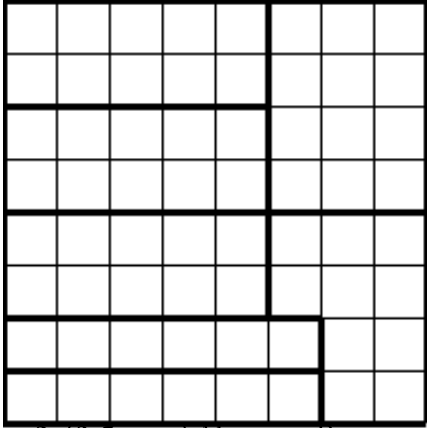
XIII. Задания заключительного этапа олимпиады для 7 класса

7 класс
1 вариант

1. (2 балла) Можно ли разрезать клетчатый квадрат 8×8 по клеточкам на 7 фигур равного периметра?

Ответ: Да.

Решение: Вот один из возможных примеров, разумеется, бывают и другие.



2. (3 балла) Мальчик Вася посмотрел на часы и увидел там какое-то время с количеством часов, большим нуля. Увиденные цифры он прочитал как трёх- или четырёхзначное число (например 5:07 превратилось бы у него в 507). Затем он вычислил количество минут, прошедшее с полуночи. Могло ли получиться так, что первое полученное им число делится на второе?

Ответ: Нет.

Решение:

Пусть на часах было a часов и b минут. Тогда число, которое увидел Вася, это $100a + b$, а вычисленное им число минут это $60a + b$. Если $100a + b$ делится на $60a + b$, то и их разность, $40a$ тоже делится на $60a + b$, но этого не может быть, так как при $a \neq 0$ $0 < 40a < 60a + b$.

3. (3 балла) У Ани было два треугольника, каждый из которых был составлен в точности из трех палочек натуральной длины. Затем из всех этих палочек сложили квадрат со стороной равной 5. Какие пары треугольников могли быть у Ани? Перечислите все возможные варианты и докажете, что других быть не могло.

Ответ:

- 1) 5, 5, 5 и 1, 2, 2;
- 2) 5, 5, 3 и 3, 2, 2;
- 3) 5, 5, 2 и 3, 3, 2;
- 4) 5, 5, 1 и 4, 3, 2;
- 5) 5, 5, 1 и 1, 4, 4;

Решение:

Давайте рассмотрим обратный процесс: пусть у нас есть четыре палочки длины 5, из которых сделан квадрат и нам надо сделать из них шесть палочек, из которых составлены треугольники. Для этого нам надо разделить одну из палочек на 3 части или две палочки на 2 части каждую.

Также заметим, что суммарная длина всех палочек составляет 20, значит, хотя бы у одного из треугольников периметр не больше 10, поэтому у него не может быть стороны 5, т.е. все отрезки длины 5 находятся в одном треугольнике.

Тогда если мы поделили один отрезок длины 5 на части натуральной длины, это значит, что эти части образуют один треугольник, а палочки длины 5 — другой. Так мы получаем первый ответ.

Рассмотрим оставшиеся случаи. Пусть в треугольник с двумя палочками длины 5 попала палочка длины 4. Тогда в оставшемся треугольнике есть палочка длины 1, а оставшиеся две это либо 1 и 4, либо 2 и 3. В любом случае треугольник не получается.

Пусть в треугольник с двумя палочками длины 5 попала палочка длины 3. Тогда в оставшемся треугольнике есть палочка длины 2, а оставшиеся две это либо 1 и 4, либо 2 и 3. В первом случае треугольник не получается, во втором случае мы получаем ответ номер 2.

Пусть в треугольник с двумя палочками длины 5 попала палочка длины 2. Тогда в оставшемся треугольнике есть палочка длины 3, а оставшиеся две это либо 1 и 4, либо 2 и 3. В первом случае треугольник не получается, во втором случае мы получаем ответ номер 3.

Наконец пусть в треугольник с двумя палочками длины 5 попала палочка длины 1. Тогда в оставшемся треугольнике есть палочка длины 4, а оставшиеся две это либо 1 и 4, либо 2 и 3. Так мы получаем последние 2 ответа.

4. (3 балла) На Острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды в комнате собралось n островитян.

Первый из них сказал: “В точности каждый первый из присутствующих в этой комнате — лжец.”

Второй сказал: “В точности каждый второй из присутствующих в этой комнате – лжец.”

и так далее

Человек с номером n сказал: “В точности каждый n -ый из присутствующих в этой комнате – лжец.”

Сколько человек могло быть в комнате?

Ответ: 2

Решение:

Давайте заметим, что среди этих человек точно есть один рыцарь, так как иначе получается, что первый островитянин — лжец, говорящий правду, что невозможно. Кроме того, первый человек обязательно лжец.

Кроме того, рыцарь ровно один, так как все говорящие противоречат друг другу. Значит, рыцарей не больше половины. С другой стороны, все островитяне утверждают, что рыцарей не меньше половины. Значит, их ровно половина, т.е. всего в комнате два человека.

5. (3 балла) Аня, Ваня, Даня, Саня и Таня собирали яблоки. Оказалось, что каждый из них собрал целое количество процентов от общего числа собранных яблок, причём все эти числа различны и больше нуля. Какое минимальное количество яблок могло быть собрано?

Ответ: 20

Решение:

Пример: разных примеров много, например $1 + 2 + 3 + 4 + 10$ или $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$

Оценка (доказательство того, что яблок не меньше 20):

Пусть Аня собрала меньше всех яблок и это число хотя бы 2. Тогда мы получаем, что всего собрано не менее $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$ яблок.

Если же у Ани 1 яблоко, а всего их n , значит $\frac{1}{n}$ – целое число процентов, т.е. n делитель 100, причём хотя бы $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Минимальное подходящее число — 20.

6. (3 балла) Число, записанное на доске, разрешается умножать на 5 или переставлять в нём цифры (нельзя ставить ноль на первое место). Можно ли из числа 1 таким образом получить стозначное число $222 \dots 2225$?

Ответ: Нет.

Решение:

Рассмотрим обратный процесс: будем пытаться из числа $222 \dots 2225$ получить 1 указанными операциями.

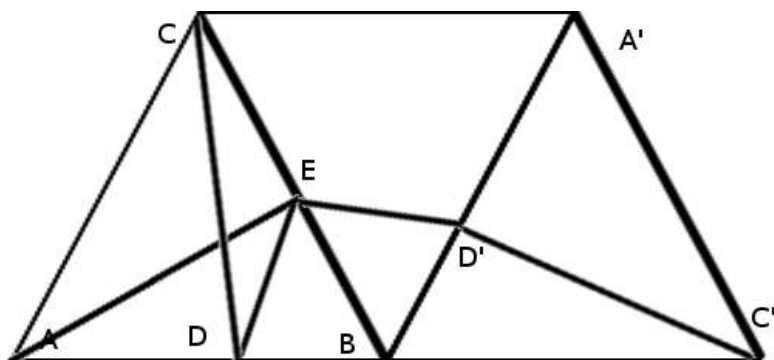
Заметим, что единственный способ получить перестановками цифр число, делящееся на 5, это само число $222 \dots 2225$. Поделим его на 5, получится $44 \dots 445$. В этом числе опять-таки бессмысленно переставлять цифры поэтому разделим его на 5. Получим число $888 \dots 889$. В этом числе как не переставляй цифры, числа делящегося на 5 не получить.

Значит и указанными в условии операциями не получить $222 \dots 2225$ из единицы.

7. (3 балла) Дан равносторонний треугольник ABC . На сторонах AB и BC отмечены точки D и E соответственно. Докажите, что длина ломаной $AEDC$ не меньше, чем $2AB$.

Решение:

Построим равносторонние треугольники $A'BC$ и $A'BC'$ так, как на рисунке. На отрезке $A'B$ возьмём точку D' такую, что $BD = BD'$. Рассматривая несколько пар равных треугольников, легко доказать, что длина ломаной $AEDC$ равна длине ломаной $AED'C'$, что, очевидно, больше $AC' = 2AC$.



8. (4 балла) В таблице 8×8 расставлены целые числа от 0 до 10 (естественно, числа могут повторяться, не обязательно все указанные числа встречаются). Известно, что в каждом прямоугольнике 3×2 или 2×3 сумма чисел равна 10. Найдите наименьшее возможное значение суммы чисел во всей таблице.

Ответ: 105

Решение:

Посмотрим на левую часть приведённого ниже рисунка. Рассмотрим прямоугольники 3×2 и 2×3 , содержащие левый верхний квадрат 2×2 . Оставшиеся части этих двух прямоугольников — это самые левые верхние прямоугольники 1×2 и 2×1 , закрашенные серым. Поскольку в обоих прямоугольниках 3×2 и 2×3 сумма чисел равна 10, в сумме чисел в этих двух серых прямоугольниках равны.

Аналогично доказывается, что равны суммы чисел во всех серых прямоугольниках на картинке, а также во всех белых квадратах 2×2 . Пусть в каждом белом квадрате в сумме стоит число x , тогда в каждом сером прямоугольнике число $10 - x$, значит, общая сумма чисел в таблице хотя бы $9x + 12(10 - x) = 120 - 3x$. Если $x < 5$, получается число большее, чем 105.

С другой стороны, вся таблица, кроме левого верхнего квадрата 2×2 разбивается на прямоугольники 3×2 и 2×3 , в общей сложности, на 10 штук. Значит, общая сумма чисел в таблице равна $100 + x$, то есть, при $x > 5$ получается число большее, чем 105.

Значит, сумма всех чисел в таблице не меньше 105.

Пример приведён в правой части рисунка, клетки, заполненные нулями, для удобства оставлены пустыми.

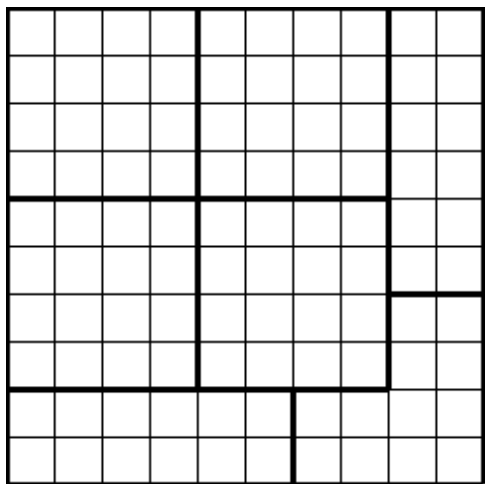
		5			5		
	5			5			5
5			5			5	
		5			5		
	5			5			5
5			5			5	
		5			5		
	5			5			5

7 класс
2 вариант

1. (2 балла) Можно ли разрезать клетчатый квадрат 10×10 по клеточкам на 7 фигур равного периметра?

Ответ: Да.

Решение: Вот один из возможных примеров, разумеется, бывают и другие.



2. (3 балла) Мальчик Вася посмотрел на часы и увидел там какое-то время с количеством часов, большим нуля. Увиденные цифры он прочитал как трёх- или четырёхзначное число (например 5:07 превратилось бы у него в 507). Затем он вычислил количество минут, прошедшее с полуночи. Могло ли получиться так, что удвоенное второе полученное им число делится на первое?

Ответ: Нет.

Решение:

Пусть на часах было a часов и b минут. Тогда число, которое увидел Вася, это $100a + b$, а вычисленное им число минут это $60a + b$. Если $120a + 2b$ делится на $100a + b$, то и их разность, $20a + b$ тоже делится на $100a + b$, но этого не может быть, так как при $a \neq 0$ $0 < 20a + b < 100a + b$.

3. (3 балла) У Ани было два треугольника, каждый из которых был составлен в точности из трех палочек натуральной длины. Затем из всех этих палочек сложили квадрат со стороной равной 4. Какие пары треугольников могли быть у Ани? Перечислите все возможные варианты и докажете, что других быть не могло.

Ответ:

- 1) 4, 4, 3 и 1, 2, 2;
- 2) 4, 4, 2 и 2, 2, 2;
- 3) 4, 4, 1 и 3, 2, 2;
- 4) 4, 4, 1 и 3, 3, 1;

Решение:

Давайте рассмотрим обратный процесс: пусть у нас есть четыре палочки длины 4, из которых сделан квадрат и нам надо сделать из них шесть палочек, из которых составлены треугольники. Для этого нам надо разделить одну из палочек на 3 части или две палочки на 2 части каждую.

Также заметим, что суммарная длина всех палочек составляет 16, значит, хотя бы у одного из треугольников периметр не больше 8, поэтому у него не может быть стороны 4, т.е. все отрезки длины 4 находятся в одном треугольнике.

Тогда если мы поделили один отрезок длины 4 на части натуральной длины, это значит, что эти части образуют один треугольник, а палочки длины 4 — другой. Но отрезок длины 4 нельзя разбить на три части так, чтобы получился треугольник.

Рассмотрим оставшиеся случаи. Пусть в треугольник с двумя палочками длины 4 попала палочка длины 3. Тогда в оставшемся треугольнике есть палочка длины 1, а оставшиеся две это либо 1 и 3, либо 2 и 2. В первом случае треугольник не получается, во втором случае мы получаем ответ номер 1.

Пусть в треугольник с двумя палочками длины 4 попала палочка длины 2. Тогда в оставшемся треугольнике тоже есть палочка длины 2, а оставшиеся две это либо 1 и 3, либо 2 и 2. В первом случае треугольник не получается, во втором случае мы получаем ответ номер 2.

Наконец пусть в треугольник с двумя палочками длины 4 попала палочка длины 1. Тогда в оставшемся треугольнике есть палочка длины 3, а оставшиеся две это либо 1 и 3, либо 2 и 2. Так мы получаем последние 2 ответа.

4. (3 балла) На Острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды в комнате собралось n островитян.

Первый из них сказал: “В точности каждый второй из присутствующих в этой комнате — лжец.”

Второй сказал: “В точности каждый третий из присутствующих в этой комнате — лжец.”

и так далее

Человек с номером n сказал: “В точности каждый $(n-1)$ -ый из присутствующих в этой комнате — лжец.”

Сколько человек могло быть в комнате, если известно, что не все они лжецы?

Ответ: 2

Решение:

По условию среди этих человек точно есть хотя бы один рыцарь. Следовательно, людей хотя бы двое, иначе первый человек рыцарь, говорящий неправду.

Кроме того, рыцарь ровно один, так как все говорящие противоречат друг другу. Значит, рыцарей не больше половины. С другой стороны, все островитяне, включая рыцаря, который говорит правду, утверждают, что рыцарей не меньше половины. Значит, их ровно половина, т.е. всего в комнате два человека.

5. (3 балла) Аня, Ваня, Дania, Маня, Саня и Таня собирали яблоки. Оказалось, что каждый из них собрал целое количество процентов от общего числа собранных яблок, причём все эти числа различны и больше нуля. Какое минимальное количество яблок могло быть собрано?

Ответ: 25

Решение:

Пример: разных примеров много, например $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 10$.

Оценка (доказательство того, что яблок не меньше 25):

Пусть Аня собрала меньше всех яблок и это число хотя бы 2. Тогда мы получаем, что всего собрано не менее $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$ яблок.

Если же у Ани 1 яблоко, а всего их n , значит $\frac{1}{n}$ – целое число процентов, т.е. n делитель 100, причём хотя бы $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Минимальное подходящее число — 25.

6. (3 балла) Число, записанное на доске, разрешается умножать на 5 или переставлять в нём цифры (нельзя ставить ноль на первое место). Можно ли из числа 1 таким образом получить стозначное число $777\dots7775$?

Рассмотрим обратный процесс: будем пытаться из числа $777\dots7775$ получить 1 указанными операциями.

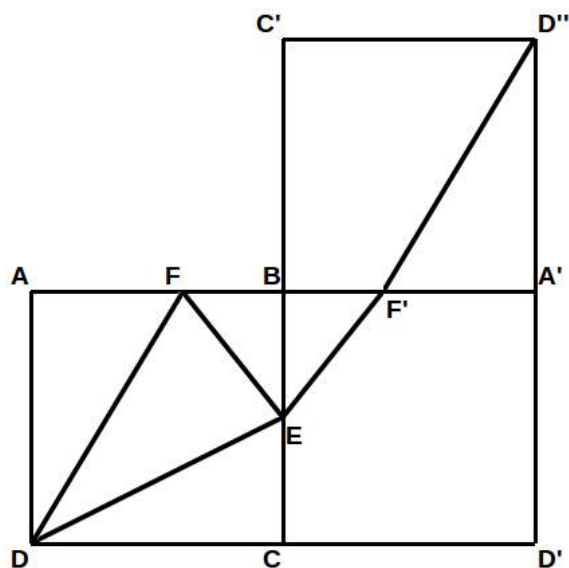
Заметим, что единственный способ получить перестановками цифр число, делящееся на 5, это само число $777\dots7775$. Поделим его на 5, получится $1555\dots555$. Переставив в нём как-нибудь цифры и затем разделив на 5. Получим число $111\dots1103111\dots1111$ (возможно, тройка стоит в начале, тогда 0 перед ней не пишется.). В этом числе как не переставляя цифры, числа делящегося на 5 не получить.

Значит и указанными в условии операциями не получить $777\dots7775$ из единицы.

7. (3 балла) Дан квадрат $ABCD$. На сторонах AB и BC отмечены точки F и E соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEF не меньше, чем $2AC$.

Решение:

Построим квадраты $A'BCD'$ и $A'BC'D'$ так, как на рисунке. На отрезке $A'B$ возьмём точку F' такую, что $BF = BF'$. Рассматривая несколько пар равных треугольников, легко доказать, что периметр треугольника DEF равен длине ломаной $DEF'D'$, что, очевидно, больше $DD' = 2BD = 2AC$.



8. (4 балла) В таблице 11×11 расставлены целые числа от 0 до 10 (естественно, числа могут повторяться, не обязательно все указанные числа встречаются). Известно, что в каждом прямоугольнике 3×2 или 2×3 сумма чисел равна 10. Найдите наименьшее возможное значение суммы чисел во всей таблице.

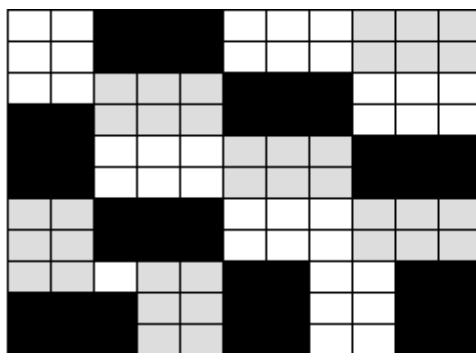
Ответ: 200

Решение:

На правой части приведённого ниже рисунка приводится разрезание таблицы на 20 прямоугольников и одну клетку. Значит, сумма чисел во всей таблице не меньше суммы чисел в этих 20 прямоугольниках, то есть 200.

Пример приведён в левой части рисунка, клетки, заполненные нулями, для удобства оставлены пустыми.

		5			5			5		
	5			5			5			5
5			5			5			5	
		5			5			5		
	5			5			5			5
5			5			5			5	
		5			5			5		
	5			5			5			5
5			5			5			5	
		5			5			5		
	5			5			5			5



XIV. Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады для 7 класса

Задача 1. (1 балл)

1. На столе лежат палочки натуральной длины от 1 до 30. Какое наибольшее количество треугольников можно из них составить одновременно, если каждую палочку можно использовать не более, чем один раз.

Ответ: 9

2. На столе лежат палочки натуральной длины от 1 до 33. Какое наибольшее количество треугольников можно из них составить одновременно, если каждую палочку можно использовать не более, чем один раз.

Ответ: 10

3. На столе лежат палочки натуральной длины от 1 до 27. Какое наибольшее количество треугольников можно из них составить одновременно, если каждую палочку можно использовать не более, чем один раз.

Ответ: 8

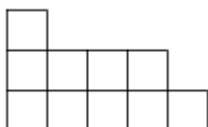
Примеры записи ответов:

11

Задача 2. (2 балла)

1. Лисица строит «пирамидки» из 5 кубиков следующим образом:
каждая «пирамидка» состоит из одного или нескольких уровней;
на каждом уровне количество кубиков не больше, чем на предыдущем;
каждый новый уровень состоит из одного или нескольких подряд идущих кубиков, начиная с левого края.

Пример «пирамидки» из десяти кубиков вы можете увидеть на картинке:



Какое количество различных пирамидок может получиться у Лисицы?

Ответ: 7

2. Лисица строит «пирамидки» из 6 кубиков следующим образом:
каждая «пирамидка» состоит из одного или нескольких уровней;
на каждом уровне количество кубиков не больше, чем на предыдущем;
каждый новый уровень состоит из одного или нескольких подряд идущих кубиков, начиная с левого края.

Пример «пирамидки» из десяти кубиков вы можете увидеть на картинке:



Какое количество различных пирамидок может получиться у Лисицы?

Ответ: 11

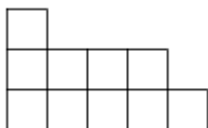
3. Лисица строит «пирамидки» из 7 кубиков следующим образом:

каждая «пирамидка» состоит из одного или нескольких уровней;

на каждом уровне количество кубиков строго меньше, чем на предыдущем;

каждый новый уровень состоит из одного или нескольких подряд идущих кубиков, начиная с левого края.

Пример «пирамидки» из десяти кубиков вы можете увидеть на картинке:



Какое количество различных пирамидок может получиться у Лисицы?

Ответ: 5

Примеры записи ответов:

12

Задача 3. (2 балла)

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Угол BDA составляет 70 градусов. Оказалось, что $BD=CD$. Найдите градусную меру угла A.

Считать известным, что сумма углов треугольника 180 градусов.

Ответ: 75

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD. Угол CDB составляет 80 градусов. Оказалось, что $CD=AD$. Найдите градусную меру угла B.

Считать известным, что сумма углов треугольника 180 градусов.

Ответ: 60

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Угол ADC составляет 66 градусов. - Оказалось, что $AD=BD$. Найдите градусную меру угла C.

Считать известным, что сумма углов треугольника 180 градусов.

Ответ: 81

Примеры записи ответов:

100

90

Задача 4. (2 балла)

1. Клетчатый прямоугольник 5×7 разбит на квадратики 2×2 и полоски из трёх клеток. Какое наибольшее количество полосок может участвовать в этом разбиении?

Ответ: 9

2. Клетчатый прямоугольник 4×8 разбит на квадратики 2×2 и полосы из трёх клеток. Какое наибольшее количество полосок может участвовать в этом разбиении?

Ответ: 8

3. Клетчатый прямоугольник 4×11 разбит на квадратики 2×2 и полосы из трёх клеток. Какое наибольшее количество полосок может участвовать в этом разбиении?

Ответ: 12

Примеры записи ответов:

100

90

Задача 5. (2 балла)

1. В сентябре Васе повысили зарплату на x процентов, а в октябре понизили зарплату на те же x процентов. После этого Вася с удивлением обнаружил, что его зарплата после этих изменений уменьшилась по сравнению с первоначальной на 9%. Найдите x .

Ответ: 30

2. В сентябре Васе повысили зарплату на x процентов, а в октябре понизили зарплату на те же x процентов. После этого Вася с удивлением обнаружил, что его зарплата после этих изменений уменьшилась по сравнению с первоначальной на 16%. Найдите x .

Ответ: 40

3. В сентябре Васе повысили зарплату на x процентов, а в октябре понизили зарплату на те же x процентов. После этого Вася с удивлением обнаружил, что его зарплата после этих изменений уменьшилась по сравнению с первоначальной на 36%. Найдите x .

Ответ: 60

Примеры записи ответов:

23

Задача 7. (3 балла)

1. На доске была написана некоторая цифра a , большая 1. Имеющееся число разрешается умножать на 5 или прибавлять к нему исходное однозначное число a . После нескольких таких операций получилось число 2761535. Найдите a . Если возможных вариантов несколько, укажите их любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 5; 7 | 7; 5 | 5, 7 | 7, 5

2. На доске была написана некоторая цифра a , большая 1. Имеющееся число разрешается умножать на 5 или прибавлять к нему исходное однозначное число a . После нескольких таких операций получилось число 1183515. Найдите a . Если возможных вариантов несколько, укажите их любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 5; 3 | 3; 5 | 5, 3 | 3, 5

3. На доске была написана некоторая цифра a , большая 1. Имеющееся число разрешается умножать на 5 или прибавлять к нему исходное однозначное число a . После нескольких таких операций получилось число 9859510. Найдите a . Если возможных вариантов несколько, укажите их любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 5; 2 | 2; 5 | 5, 2 | 2, 5

Примеры записи ответов:

5

5; 9

Задача 8. (4 балла)

1. В магазине продают мешки по 3 кг яблок (один мешок стоит 20 руб), мешки по 4 кг груш (один мешок стоит 30 руб) и мешки по 5 кг слив (один мешок стоит 40 руб). У Ани есть 130 рублей, какое максимальное количество кг фруктов она сможет купить?

Ответ: 19

2. В магазине продают мешки по 4 кг яблок (один мешок стоит 15 руб), мешки по 5 кг груш (один мешок стоит 20 руб) и мешки по 6 кг слив (один мешок стоит 25 руб). У Ани есть 115 рублей, какое максимальное количество кг фруктов она сможет купить?

Ответ: 30

3. В магазине продают мешки по 3 кг яблок (один мешок стоит 20 руб), мешки по 4 кг груш (один мешок стоит 35 руб) и мешки по 5 кг слив (один мешок стоит 50 руб). У Ани есть 155 рублей, какое максимальное количество кг фруктов она сможет купить?

Ответ: 22

Примеры записи ответов:

11

Задача 9. (4 балла)

1. На доске было написано двузначное число. Аня увеличила его первую цифру в 4 раза, а вторую уменьшила в два раза. При этом всё число увеличилось в три раза. Найдите исходное число. Если возможных вариантов несколько, укажите их любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 14, 28 | 14; 28 | 28; 14 | 28, 14

2. На доске было написано двузначное число, не делящееся на 10. Ваня увеличил его первую цифру в некоторое целое количество раз, а вторую уменьшил в то же самое количество раз. При этом всё число увеличилось в два раза. Найдите исходное число. Если возможных вариантов несколько, укажите их любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 16

3. На доске было написано двузначное число, не делящееся на 10. Алёша увеличил его первую цифру в пять раз, а вторую уменьшил в некоторое целое количество раз. Получилось новое двузначное число, делящееся на старое. Найдите исходное число. Если возможных вариантов несколько, укажите их любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 17; 18 | 17, 18 | 18, 17 | 18; 17

Примеры записи ответов:

11

22; 33

Задача 10. (5 баллов)

1. На плоскости был нарисован прямоугольник с целочисленными сторонами. После того, как каждую из его сторон увеличили на 2, его площадь стала больше в два раза. Каким был периметр исходного прямоугольника? Если возможных вариантов несколько, укажите их любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 20, 26 | 26, 20 | 20; 26 | 26; 20

2. На плоскости был нарисован прямоугольник с целочисленными сторонами. После того, как каждую из его сторон увеличили на 2, его площадь стала больше в три раза. Каким был периметр исходного прямоугольника? Если возможных вариантов несколько, укажите их любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 12

3. На плоскости был нарисован прямоугольник с целочисленными сторонами. После того, как каждую из его сторон увеличили на 1, его площадь стала больше в три раза. Каким был периметр исходного прямоугольника? Если возможных вариантов несколько, укажите их любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 6

Примеры записи ответов:

11

22; 33

Задача 6. (3 балла)

1. За круглым столом сидят рыцари, которые всё время говорят правду, и лжецы, которые всё время лгут, всего 239 человек. Каждый из них сказал: «Оба мои соседа лжецы». Какое наименьшее и наибольшее количество лжецов могло быть за столом? Ответы укажите в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 120, 159 | 120; 159 | 159; 120 | 159, 120

2. За круглым столом сидят рыцари, которые всё время говорят правду, и лжецы, которые всё время лгут, всего 245 человек. Каждый из них сказал: «Оба мои соседа лжецы». Какое наименьшее и наибольшее количество лжецов могло быть за столом? Ответы укажите в

любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 123, 163 | 123; 163 | 163; 123 | 163, 123

3. За круглым столом сидят рыцари, которые всё время говорят правду, и лжецы, которые всё время лгут, всего 289 человек. Каждый из них сказал: «Оба мои соседа лжецы». Какое наименьшее и наибольшее количество лжецов могло быть за столом? Ответы укажите в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 145, 192 | 145; 192 | 192; 145 | 192, 145

Примеры записи ответов:

100; 200

XV. Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады для 7 класса

Задача 1. (1 балл)

1. На какое наименьшее количество квадратов можно разрезать прямоугольник 6×10 ?

Ответ: 4

2. На какое наименьшее количество квадратов можно разрезать прямоугольник 8×10 ?

Ответ: 5

3. На какое наименьшее количество квадратов можно разрезать прямоугольник 7×9 ?

Ответ: 6

Задача 2. (2 балла)

1. У мальчика Коли есть 100 рублей. Если бы цены после Нового года поднялись на u процентов, то он смог бы купить себе 2 шоколадки, а если бы цены опустились на u процентов, то — 5 шоколадок. Сколько стоила одна шоколадка до Нового года?

Ответ: 35.

2. У мальчика Коли есть 100 рублей. Если бы цены после Нового года поднялись на u процентов, то он смог бы купить себе 2 шоколадки, а если бы цены опустились на u процентов, то — 10 шоколадок. Сколько стоила одна шоколадка до Нового года?

Ответ: 30.

3. У мальчика Коли есть 100 рублей. Если бы цены после Нового года поднялись на u процентов, то он смог бы купить себе 5 шоколадки, а если бы цены опустились на u процентов, то — 10 шоколадок. Сколько стоила одна шоколадка до Нового года?

Ответ: 15.

Задача 3. (2 балла)

1. Сколько существует трёхзначных чисел, состоящих из различных цифр таких, что первая цифра делится на вторую, а вторая на третью?

Ответ: 7

2. Сколько существует четырёхзначных чисел, состоящих из различных цифр таких, что каждая следующая цифра делится на предыдущую?

Ответ: 8

3. Сколько существует двузначных чисел, состоящих из различных цифр таких, что первая цифра делится на вторую?

Ответ: 14

Задача 4. (3 балла)

1. Четырёхзначное число $ABVG$, состоящее из различных цифр, делится как на двузначное число VG , так и на двузначное число AB . Найдите наибольшее возможное значение $ABVG$.

Ответ: 4896

2. Нечётное четырёхзначное число $ABVG$, состоящее из различных цифр, делится как на двузначное число VG , так и на двузначное число AB . Найдите наименьшее возможное значение $ABVG$.

Ответ: 1365

3. Четырёхзначное число $ABVG$, состоящее из различных цифр, делится как на двузначное число VG , так и на двузначное число AB . Найдите наименьшее возможное значение $ABVG$.

Ответ: 1248

Примеры записи ответов:

1234

Задача 5. (3 балла)

1. Дан равносторонний треугольник ABC . Внутри него взята точка D так, что она разбивает треугольник ABC на три треугольника ABD , BCD , ACD так, что один из них прямоугольный, а еще один — равнобедренный треугольник с углом при вершине 130 градусов. Найдите наименьшее и наибольшее возможные значения угла BCD в градусах.

Считать известным, что сумма углов треугольника равна 180 градусам.

Ответ: 5, $55 \parallel 5$; $55 \parallel 55$, $5 \parallel 55$; 5

2. Дан равносторонний треугольник ABC . Внутри него взята точка D так, что она разбивает треугольник ABC на три треугольника ABD , BCD , ACD так, что один из них прямоугольный, а еще один — равнобедренный треугольник с углом при вершине 140 градусов. Найдите наименьшее и наибольшее возможные значения угла BCD в градусах.

Считать известным, что сумма углов треугольника равна 180 градусам.

Ответ: 10, $50 \parallel 10$; $50 \parallel 50$, $10 \parallel 50$; 10

3. Дан равносторонний треугольник ABC . Внутри него взята точка D так, что она разбивает треугольник ABC на три треугольника ABD , BCD , ACD так, что один из них прямоугольный, а еще один — равнобедренный треугольник с углом при вершине 172 градуса. Найдите наименьшее и наибольшее возможные значения угла BCD в градусах.

Считать известным, что сумма углов треугольника равна 180 градусам.

Ответ: 4, $56 \parallel 4$; $56 \parallel 56$, $4 \parallel 56$; 4

Задача 6. (3 балла)

1. Найдите все натуральные числа a, b, c удовлетворяющие уравнениям $abc = 60$, $(a+1)(b+1)(c+1)=120$. В ответе укажите все возможные значения числа a в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 3; 4; 5 || 3, 4, 5

2. Найдите все натуральные числа a, b, c удовлетворяющие уравнениям $abc = 100$, $(a+1)(b+1)(c+1)=198$. В ответе укажите все возможные значения числа a в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 2; 5; 10 || 2, 5, 10

3. Найдите все натуральные числа a, b, c удовлетворяющие уравнениям $abc = 80$, $(a+1)(b+1)(c+1)=162$. В ответе укажите все возможные значения числа a в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 2; 5; 8 || 2, 5, 8

Задача 7. (3 балла)

1. Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AB=3$, $BD=8$, $AC=4$, $CD=4$. Известно, что хотя бы одна из двух неизвестных сторон четырехугольника $ABCD$ так же целая. Найдите, чему она может быть равна. В ответе укажите все подходящие значения в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 5, 6, 7 || 5; 6; 7

2. Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $BC=4$, $BD=9$, $AC=5$, $AD=3$. Известно, что хотя бы одна из двух неизвестных сторон четырехугольника $ABCD$ так же целая. Найдите, чему она может быть равна. В ответе укажите все подходящие значения в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 6, 7, 8 || 6; 7; 8

3. Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AB=2$, $BC=4$, $AD=6$, $CD=3$. Известно, что хотя бы одна из двух диагоналей имеет целую длину. Найдите, чему она может быть равна В ответе укажите все подходящие значения в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 4, 5, 6 || 4; 5; 6

Задача 8. (4 балла)

1. В стране Альфа 89 городов. Известно, что из каждого города выходит хотя бы 2 дороги. Так же известно, что если есть дорога из города А в город В и из города В в город С, то тогда есть дорога и из города А в город С. Какое минимальное количество дорог может быть в

стране?

Ответ: 93

2. В стране Бета 86 городов. Известно, что из каждого города выходит хотя бы 2 дороги. Также известно, что если есть дорога из города А в город В и из города В в город С, то тогда есть дорога и из города А в город С. Какое минимальное количество дорог может быть в стране?

Ответ: 90

3. В стране Гамма 83 города. Известно, что из каждого города выходит хотя бы 2 дороги. Также известно, что если есть дорога из города А в город В и из города В в город С, то тогда есть дорога и из города А в город С. Какое минимальное количество дорог может быть в стране?

Ответ: 87

Примеры записи ответов:

17

Задача 9. (4 балла)

1. Сколько существует способов разбить данную фигуру на прямоугольники 1×2 ?

Ответ: 8

2. Сколько существует способов разбить данную фигуру на прямоугольники 1×2 ?

Ответ: 18

3. Сколько существует способов разбить данную фигуру на прямоугольники 1×2 ?

Ответ: 11

Задача 10. (5 баллов)

1. Изначально на доске было записано число, состоящее из тысячи девяток. С числом

разрешается производить следующие операции: вычёркивать из него единицу, семёрку или четвёрку, либо уменьшить любые три цифры, большие единицы, на один.

После некоторого количества таких операций у Васи появилось число, к которому ни одна из них не применима. Какое наибольшее число могло остаться у Васи?

Ответ: 88

2. Изначально на доске было записано число, состоящее из тысячи восьмёрок. С числом разрешается производить следующие операции: вычёркивать из него единицу, семёрку или четвёрку, либо уменьшить любые три цифры, большие единицы, на один.

После некоторого количества таких операций у Васи появилось число, к которому ни одна из них не применима. Какое наибольшее число могло остаться у Васи?

Ответ: 66

3. Изначально на доске было записано число, состоящее из тысячи девяток. С числом разрешается производить следующие операции: вычёркивать из него двойку, пятёрку или восьмёрку, либо уменьшить любые три цифры, большие 2, на один.

После некоторого количества таких операций у Васи появилось число, к которому ни одна из них не применима. Какое наибольшее число могло остаться у Васи?

Ответ: 77