Задания отборочного и заключительного этапов
«Открытой олимпиады школьников» (математика)
(№66 Перечня олимпиад школьников, 2024/2025 уч. год)

Оглавление

1 Открытая олимпиада школьников 2024/2025 уч. год

1.1 Задания заключительного этапа олимпиады

1.1.1 Задания для 11 класса

Задача 1. (2 балла) (Условие и решение в общем виде)

Многочлен $P(x) - a$ и многочлен $P(P(x) - b)$ имеют как минимум один общий корень. Докажите, что число $a - b$ является корнем многочлена $P(x)$.

Доказательство:

Пусть x_0 — общий корень двух данных многочленов. Тогда, во-первых, $P(x_0) = a$, а, во вторых, $P(P(x_0) - b) = 0$. Но $P(P(x_0) - b) = P(a - b)$. Утверждение задачи доказано.

Таблица с параметрами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	8	7	8	3	3	3	8	8	5	7
b	5	8	5	7	5	8	4	5	3	6
$a - b$	3	-1	3	-4	-2	-5	4	3	2	1

Задача 2. (3 балла)(Условие и решение в общем виде)

Варианты 1–5.

Петя и Вася играют в игру. Начинает Петя. В начале игры на доске написан многочлен $x^{2n+1} + x^{2n} + \ldots + x^2 + x + 1$. В свой ход игрок может либо заменить многочлен на его производную, либо, если в многочлене больше одного одночлена, стереть с доски один из одночленов.

Если при дифференцировании какого-то одночлена получается 0, он на доске не пишется.

Игра заканчивается, когда на доске остаётся число. Петя хочет, чтобы это число было как можно больше, а Вася — чтобы как можно меньше.

Какое число останется на доске при правильной игре?

Ответ: $(n + 1)!$

Решение:

Будем говорить, что одночлен ax^k при дифференцировании превращается в одночлен akx^{k-1} (или исчезает, если получившийся одночлен равен 0). Результат игры зависит от того, многократным дифференцированием какого одночлена получена итоговая константа. При этом на каждом ходу исчезает не более одного одночлена, поэтому игра продлится минимум $2n + 1$ ход (изначально одночленов $2n + 2$).

Петина стратегия — всё время дифференцировать многочлен. Петя начинает первый, он сделает минимум $n + 1$ ход и уничтожит все одночлены, изначальная степень которых была от 0 до n включительно. Таким образом, вне зависимости от действий соперника, Петя гарантирует, что оставшийся одночлен будет иметь изначальную степень не меньше $n + 1$, а значит, его итоговое значение после превращения в константу будет не меньше $(n + 1)!$.

Васина стратегия всё время стирать старший член многочлена. Вася сделает не менее n ходов и уничтожит все одночлены, изначальная степень которых была больше $n + 1$. Таким образом, вне зависимости от действий соперника, Вася гарантирует, что оставшийся одночлен будет иметь изначальную степень не больше $n + 1$, а значит, его итоговое значение после превращения в константу будет не больше $(n + 1)!$.

Таблица с параметрами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5
n	1010	1011	1012	1013	1014
Степень	2021	2023	2025	2027	2029
Ответ	1011!	1012!	1013!	1014!	1015!

Замечание: В качестве стратегии для Пети в этих вариантах также подходит удаление младших членов.

Варианты 6–10.

Петя и Вася играют в игру. Начинает Петя. В начале игры на доске написан многочлен $x^{2n+1} + x^{2n} + \ldots + x^2 + x + 1$. В свой ход игрок может либо заменить многочлен на его производную, либо, если в многочлене больше одного одночлена, стереть с доски один из одночленов.

Если при дифференцировании какого-то одночлена получается 0, он на доске не пишется.

Игра заканчивается, когда на доске остаётся число. Вася хочет, чтобы это число было как можно больше, а Петя — чтобы как можно меньше.

Какое число останется на доске при правильной игре?

Ответ: $n!$

Решение:

Будем говорить, что одночлен ax^k при дифференцировании превращается в одночлен akx^{k-1} (или исчезает, если получившийся одночлен равен 0). Результат игры зависит от того, многократным дифференцированием какого одночлена получена итоговая константа. При этом на каждом ходу исчезает не более одного одночлена, поэтому игра продлится минимум $2n+1$ ход (изначально одночленов $2n+2$).

Петина стратегия всё время стирать старший член многочлена. Петя начинает первый, он сделает не менее $n+1$ хода и уничтожит все одночлены, изначальная степень которых была больше n. Таким образом, вне зависимости от действий соперника, Петя гарантирует, что оставшийся одночлен будет иметь изначальную степень не больше n, а значит, его итоговое значение после превращения в константу будет не больше $n!$.

Васина стратегия — всё время дифференцировать многочлен. Вася начинает второй, он сделает минимум n ходов и уничтожит все одночлены, изначальная степень которых была от 0 до $n-1$ включительно. Таким образом, вне зависимости от действий соперника, Вася гарантирует, что оставшийся одночлен будет иметь изначальную степень не меньше n, а значит, его итоговое значение после превращения в константу будет не меньше $n!$.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	6	7	8	9	10
n	1010	1011	1012	1013	1014
Степень	2021	2023	2025	2027	2029
Ответ	1010!	1011!	1012!	1013!	1014!

Замечание: В качестве стратегии для Васи в этих вариантах также подходит удаление младших членов.

Задача 3. (2 балла)(Условие и решение в общем виде)

Сфера S проходит через вершины A, B и C и середины рёбер AD, BD и CD тетраэдра $ABCD$. Высота тетраэдра, опущенная из точки D, имеет длину $2h$, а радиус описанной окружности треугольника ABC составляет $2 \cdot \sqrt{k}$.

Найдите радиус сферы S.

Ответ: см. таблицу с параметрами и ответами

Решение:

Заметим, что треугольник, образованный указанными серединами рёбер (назовём его $A_1B_1C_1$), подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Значит, и радиус его описанной окружности в два раза меньше, и составляет $\sqrt{k}$.

Центры описанных окружностей этих треугольников назовём O_1 и O соответственно, центр сферы назовём O'. Плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны и их пересечения со сферой — это описанные окружности треугольников, поэтому точки O', O и O_1 лежат на одной прямой, перепендикулярной этим плоскостями. Значит, $OO_1 = h$ (расстояние между плоскостями, равное половине высоты тетраэдра).

Пусть R — искомый радиус сферы, $OO' = |x|$, где x будем считать отрицательным, если точка O' лежит по ту же сторону, от O, что и O_1. Тогда из теоремы Пифагора для треугольников $O'O_1A_1$ и $O'OA$ получим следующие равенства:

$$R^2 = (x+h)^2 + (\sqrt{k})^2 \text{ и } R^2 = x^2 + (2\cdot\sqrt{k})^2.$$

Приравняв их правые части, раскрыв скобки и сократив x^2, получаем $2xh + h^2 + k = 4k$, откуда $x = \dfrac{3k-h^2}{2h}$.

Теперь подставив x в равенство $R^2 = x^2 + (2\cdot\sqrt{k})^2$, найдём

$$R = \sqrt{x^2+4k} = \sqrt{\left(\frac{3k-h^2}{2h}\right)^2 + 4k}.$$

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h	120	90	36	50	72	68	110	126	36	40
k	5600	6600	504	1500	2016	2040	5720	8400	1056	960
x	10	65	3	20	6	11	23	37	26	16
Ответ	150	175	45	80	90	91	153	187	70	64

Замечание: Поскольку тетраэдры $ABCD$ и $A_1B_1C_1D$ гомотетичны с центром в точке D, точка D лежит на одной прямой с точками O и O_1 (а значит, и с O'), поэтому в данном тетраэдре высота проходит через центр описанной окружности треугольника ABC. Впрочем, в решении мы этого факта не использовали.

Задача 4. (3 балла)(Условие и решение в общем виде)

Антон выбрал несколько n-элементных множеств натуральных чисел. Оказалось, что любые два множества имеют хотя бы один общий элемент, но никакие четыре не имеют общего элемента.

Докажите, что выбранных множеств не более $2n$.

Доказательство:

Рассмотрим любое из выбранных множеств, назовём его A. Каждое из оставшихся имеет с ним как минимум один общий элемент, при этом ни один из элементов множества A не может принадлежать больше чем двум другим множествам, поэтому остальных множеств не более $2n$, а вместе с A — не более $2n+1$.

Осталось доказать, что число множеств не может составлять в точности $2n+1$.

Предположим, это так. Значит, каждые два множества пересекаются в точности по одному элементу и каждый элемент принадлежит ровно трём множествам.

Поэтому мы можем посчитать общее число элементов во всех множествах: надо размер множества умножить на количество выбранных множеств и поделить на 3, поскольку каждый элемент принадлежит ровно трём множествам. Получается $\dfrac{n\cdot(2n+1)}{3}$.

Однако, числа в задаче подобраны так, что ни n, ни $2n+1$ на три не делятся (каждое n в каждом из вариантов даёт остаток 2 при делении на 3), поэтому предполагаемая ситуация невозможна.

Таблица с параметрами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	80	95	65	110	125	170	140	500	200	800
$2n$	160	190	130	220	250	340	280	1000	400	1600
$2n+1$	161	191	131	221	251	341	281	1001	401	1601

Задача 5. (4 балла)(Условие и решение в общем виде)

Попарно различные натуральные числа $x_1, \ldots, x_n$ таковы, что для каждых двух из них одно является степенью другого с натуральным показателем. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\log_{x_1} x_2 + \log_{x_2} x_3 + \log_{x_3} x_4 + \ldots + \log_{x_{n-1}} x_n + \log_{x_n} x_1$$

Ответ: $2n - 2 + \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Решение:

Приведём сначала пример, для которого достигается это число: x_1 — любое натуральное число, большее 1, $x_2 = x_1^2$, $x_3 = x_2^2$, $\ldots x_n = x_{n-1}^2 = x_1^{2^{n-1}}$.

Переупорядочим наши числа по возрастанию: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$. Тогда $a_2 = a_1^{k_1}$, $a_3 = a_2^{k_2}$, $\ldots$, $a_n = a_{n-1}^{k_{n-1}}$. Соответственно, $a_3 = a_1^{k_1 k_2}$, $\ldots$, $a_n = a_1^{k_1 \ldots k_{n-1}}$.

К сожалению, мы не можем сказать, что $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$, потому что при это нарушается общность: соседние по возрастанию элементы не обязательно идут подряд.

Однако, поскольку от циклического сдвига переменных ничего не поменяется, мы можем считать, что $x_1 = a_1$. Выделим среди чисел $x_1, \ldots x_n$ самую длинную возрастающую последовательность. Если точнее $b_1 = x_1$, $b_2 = x_2$, b_3 — первый из элементов $x_3, \ldots x_n$, больший x_2, b_4 — первый из элементов, следующих за b_3, больший b_3 и так далее. Последним элементом этой подпоследовательности будет $b_m = a_n$ — наибольшее среди всех чисел.

Рассмотрим в нашей сумме логарифмов только те логарифмы, аргументами которых являются числа $b_2, \ldots b_m$. На самом деле, это все логарфимы из искомой суммы, большие единицы. Основания этих логарифмов назовём $c_2, \ldots c_m$ и запишем их сумму:

$$\log_{c_2} b_2 + \log_{c_3} b_3 + \ldots + \log_{c_m} b_m \geqslant \log_{b_1} b_2 + \log_{b_2} b_3 + \ldots + \log_{b_{m-1}} b_m$$

Это неравенство верно, поскольку $c_i \leqslant b_{i-1}$ из определения b_i: b_i — первый после b_{i-1} элемент последовательности x_k, больший, чем b_{i-1}, значит, все элементы, находящиеся в последовательности x_k, между b_{i-1} и b_i (если они есть) меньше, чем b_i.

Далее, $\log_{b_1} b_2 = k_1 \cdot \ldots \cdot k_{j_1}$, $\log_{b_2} b_3 = k_{j_1+1} \cdot \ldots \cdot k_{j_2}$, $\ldots$, $\log_{b_{m-1}} b_m = k_{j_{m-2}} \cdot \ldots \cdot k_n$.

Все k_i — натуральные числа, не меньшие 2, поэтому для любого их набора произведение не меньше суммы. Значит, $\log_{c_2} b_2 + \log_{c_3} b_3 + \ldots + \log_{c_m} b_m \geqslant k_1 + \ldots + k_n$, а вся сумма из условия тем более не меньше $k_1 + \ldots + k_n$.

При этом если какое-то из k_i больше 2, сумма логарифмов получается больше, чем в приведённом примере. Значит, если существует какой-то меньший пример, все k_i для него также должны быть равны 2 и $\log_{c_2} b_2 + \log_{c_3} b_3 + \ldots + \log_{c_m} b_m \geqslant k_1 + \ldots + k_n = 2(n-1)$.

Однако из этого не следует автоматические, что все логарифмы из этой суммы равны 2, поскольку $2 \cdot 2 = 2 + 2$ и в этом месте некотрые из наших неравенство обращаются в равенства. Значит, в нашей сумме логарифмов, больших единицы, есть только двойки и четвёрки.

Кроме того, в искомой сумме есть как минимум один логарифм, меньший единицы — это логарифм по самому большому основанию. Он точно не меньше, чем $\log_{a_n} a_1 = \dfrac{1}{2^{n-1}}$, что доказывает оценку.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам (1–5):

Вариант	1	2	3	4	5
n	90	100	120	150	200
Ответ:	$178\frac{1}{2^{89}}$	$198\frac{1}{2^{99}}$	$238\frac{1}{2^{119}}$	$298\frac{1}{2^{149}}$	$398\frac{1}{2^{199}}$

Таблица с параметрами и ответами по вариантам (6–10):

Вариант	6	7	8	9	10
n	250	300	1000	80	500
Ответ:	$498\frac{1}{2^{249}}$	$598\frac{1}{2^{299}}$	$1998\frac{1}{2^{999}}$	$158\frac{1}{2^{79}}$	$998\frac{1}{2^{499}}$

Задача 6. (4 балла)(Условие и решение в общем виде)

Найдите все пары числел (p, n), где p — простое, а n — целое и при этом $p^4+a = n^2+5pn$.

В ответе укажите значения n. Если их несколько, перечислите их в любом порядке через запятую.

Ответ: см. таблицу с параметрами и ответами

Решение:

Согласно малой теореме Ферма, если $p \neq 5$, число p^4 даёт остаток 1 при делении на 5. (Также можно убедиться в этом простым перебором остатков). Число a в любом из вариантов заканчивается на 1, то есть также даёт остаток 1. $5pn$ делится на p, значит, если $p \neq 5$, мы получаем, что n^2 даёт остаток 2 при делении на 5, что невозможно.

Осталось разобрать случай $p = 5$. В этом случае нам надо решить квадратное уравнение $n^2 + 25n - 625 - a = 0$, корнями которого являются числа $n_{1,2} = \dfrac{-25 \pm \sqrt{3125 + 4a}}{2}$. Числа в условии подобраны так, чтоб все эти уравнения имели по два решения.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

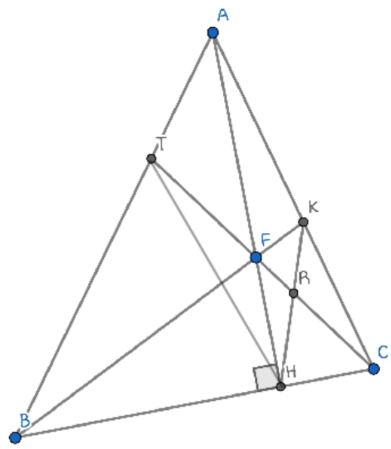
Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	211	341	551	701	941	1111	1381	1571	1871	2081
D	3969	4489	5329	5929	6889	7569	8649	9409	10609	11449
$\sqrt{D}$	63	67	73	77	83	87	93	97	103	107
Ответ 1:	−44	−46	−49	−51	−54	−56	−59	−61	−64	−66
Ответ 2:	19	21	24	26	29	31	34	36	39	41

Задача 7. (4 балла)(Условие и решение в общем виде)

В треугольнике ABC проведена высота AH. На ней отмечена точка F. Через точку F проведены отрезки BK, CT к сторонам треугольника, а HK пересекает CT в точке R. Известно, что $BT = \dfrac{a(a+b)}{a-b}$, $TF = a$, $FR = b$. Найти длину AB.

Ответ: $\dfrac{2a^2}{a-b}$.

Решение:



Докажем сначала, что HA — биссектриса $\angle THK$.
Это доказывается с помощью теоремы Чевы:

$$1 = \frac{CK}{KA} \cdot \frac{AT}{TB} \cdot \frac{BH}{HC} = \frac{S_{HKC}}{S_{HKA}} \cdot \frac{S_{HTA}}{S_{HTB}} \cdot \frac{BH}{HC} =$$
$$= \frac{HC \cdot HK \cdot \sin\angle KHC}{HA \cdot HK \cdot \sin(90^\circ - \angle KHC)} \cdot \frac{HA \cdot HT \cdot \sin(90^\circ - \angle BHT)}{HT \cdot HB \cdot \sin\angle BHT} \cdot \frac{BH}{HC}$$
$$= \frac{\operatorname{tg}\angle KHC}{\operatorname{tg}\angle BHT} \Rightarrow \angle KHC = \angle BHT.$$

(Или сразу следует из теоремы об изогоналях.)

Далее, так как HC — внешняя биссектриса $\angle THR$, то $\dfrac{CR}{TC} = \dfrac{FR}{TF}$, то есть $\dfrac{TC - a - b}{TC} =$ $= \dfrac{b}{a} \Rightarrow 1 - \dfrac{a+b}{TC} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \Rightarrow \dfrac{a+b}{TC} = \dfrac{a-b}{a} \Rightarrow TC = \dfrac{a(a+b)}{a-b}$.

Далее замечаем, что $BT = TC$. Тогда $\angle BAH = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \angle TCB = \angle HFC =$ $= \angle AFT$, значит $AT = TF = a$.

Следовательно, $AB = BT + TA = \dfrac{a(a+b)}{a-b} + a = \dfrac{2a^2}{a-b}$.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$TF = a$	7	5	6	8	6	7	10	8	9	8
$FR = b$	6	4	4	4	5	5	5	6	6	7
BT	91	45	30	24	66	42	30	56	45	120
Ответ:	98	50	36	32	72	49	40	64	54	128

Задача 8. (4 балла)(Условие и решение в общем виде)

В Нонквинтляндии n городов, некоторые из которых соединены дорогами. Путешественник обнаружил, что невозможно проехать по пяти разным дорогами и вернутся в исходный город. Докажите, что в стране не более m дорог.

Каждая дорога соединяет два города. Два города могут быть соединены не более, чем одной дорогой. По каждой дороге можно двигаться в любом из двух направлений. Путешественник может двигаться только по дорогам.

Доказательство:

Заметим сначала, что во всех вариантах $m = \dfrac{n(n-1)}{3}$.

Будем называть замкнутый маршрут из пяти дорог, существование которого запрещено условием, 5-циклом.

Докажем сначала, что если мы рассмотрим какие-либо шесть городов, между ними будет проведено не более 10 дорог из возможных 15. Предположим противное: пусть между какими-то шестью городами проведено не менее 11 дорог. Тогда среди этих шести городов и соединяющих их дорог найдём 5-цикл, существование которого запрещено условием.

Нам достаточно доказать, что мы сможем найти 5-цикл, если дорог ровно 11. Действительно, если дорог больше 11, удалим лишние и докажем, что цикл из 5-цикл среди оставшихся дорог всё равно найдётся.

Для удобства, если какие-то два города не соединены дорогой, будем говорить, что они соединены антидорогой. Таким образом, мы хотим доказать, что мы сможем найти 5-цикл, если между шестью городами проведены ровно четыре антидороги.

Какие-то две антидороги точнов выходят из одного города. Исключим его и рассмотрим оставшиеся пять городов. Пронумеруем их числами от 1 до 5. Между этими городами не более двух антидорог. Опять же, достаточно найти 5-цикл в ситуации, когда этих антидорог ровно две, в противном случае он найдётся и подавно.

Есть две возможных ситуации: когда эти антидороги имеют общий конец, и когда не имеют.

В первом случае без ограничения можно считать, что антидороги соединяют город 1 с городами 2 и 3. Тогда мы можем найти следующий 5-цикл: 1-4-2-3-5-1.

Во втором случае можно считать, у наши антидороги соединяют город 1 с городом 2, а город 3 с городом 4. Тогда мы сможем найти такой 5-цикл: 1-3-5-2-4-1

Мы доказали, что среди любых 5 городов проведено не более 10 дорог из 15, то есть максимум $\dfrac{2}{3}$ от из всех возможных дорог. Поскольку каждая пара городов с проведённой между ними дорогой или антидорогой входит в равное число таких шестёрок, поэтому общее количество дорог также составляет не более $\dfrac{2}{3}$ от максимально возможного, то есть максимум $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{3}$.

Докажем это чуть более строго. В каждой шестёрке городов не более 10 дорог. Всего этих шестёрок C_n^6. Итого получаем $10C_n^6$ дорог, однако, каждая из них посчитана несколько раз. А именно, к каждой паре городов можно подобрать ещё 4 города C_{n-2}^4 способами, значит, именно столько раз мы посчитали каждую дорогу.

Таким образом, всего дорог не более $\dfrac{10C_n^6}{C_{n-2}^4} = \dfrac{10 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{720}}{\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{24}} = \dfrac{n(n-1)}{3}$.

Таблица с параметрами по вариантам (1–5):

Вариант	1	2	3	4	5
Число городов (n)	600	900	1200	1500	1800
Ограничение (m)	119800	269700	479600	749500	1079400

Таблица с параметрами по вариантам (6–10):

Вариант	6	7	8	9	10
Число городов (n)	2100	2400	2700	3000	450
Ограничение (m)	1469300	1919200	2429100	2999000	67350

1.1.2 Задания для 10 класса

Задача 1. (2 балла)

Вариант 1

Медиана пятёрки чисел — это среднее по величине из них, то есть если $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$, медиана равна числу c. Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 9$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{500}.

Ответ: 172

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 6$, $a_7 = 7$, $a_8 = 8$, $a_9 = 8$, $a_{10} = 9$, $a_{11} = 9$, $a_{12} = 9$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_{10} каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел a_n, a_{n_1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4} имеет один из следующих трёх видов:

1) x, x, $x + 1$, $x + 1$, $x + 1$ (этот вид принимает база нашей индукции при $n = 8$);

2) x, $x + 1$, $x + 1$, $x + 1$, $x + 2$;

3) x, x, x, $x + 1$, $x + 1$.

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x + 1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x + 2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x + 1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x + 1$, $x + 1$, $x + 1$, $x + 2$, $x + 2$, начинающуюся с a_{n+1}, что соответствует виду 3) с $x + 1$ вместо x.

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x + 1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

Значит, $a_{500} = a_{497} + 1 = a_{494} + 2 = \ldots = a_8 + \dfrac{492}{3} = 8 + 164 = 172.$

Вариант 2

Медиана пятёрки чисел — это среднее по величине из них, то есть если $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$, медиана равна числу c. Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{1000}.

Ответ: 336

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 4$, $a_7 = 5$, $a_8 = 5$, $a_9 = 6$, $a_{10} = 6$, $a_{11} = 6$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_9 каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел a_n, a_{n_1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4} имеет один из следующих трёх видов:

1) x, x, $x+1$, $x+1$, $x+1$ (этот вид принимает база нашей индукции при $n=7$);

2) x, $x+1$, $x+1$, $x+1$, $x+2$;

3) x, x, x, $x+1$, $x+1$.

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5}=x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5}=x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x+1$, $x+1$, $x+1$, $x+2$, $x+2$, начинающуюся с a_{n+1}, что соответствует виду 3) с $x+1$ вместо x.

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5}=x+1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

Значит, $a_{1000}=a_{997}+1=a_{994}+2=\ldots=a_7+\dfrac{993}{3}=5+331=336$.

Вариант 3

Медиана пятёрки чисел — это среднее по величине из них, то есть если $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$, медиана равна числу c. Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1=5$, $a_2=4$, $a_3=3$, $a_4=2$, $a_5=1$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{800}.

Ответ: 268

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6=4$, $a_7=4$, $a_8=4$, $a_9=5$, $a_{10}=5$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_6 каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3}=a_n+1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел a_n, a_{n_1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4} имеет один из следующих трёх видов:

1) x, x, $x+1$, $x+1$, $x+1$;

2) x, $x+1$, $x+1$, $x+1$, $x+2$;

3) x, x, x, $x+1$, $x+1$.(этот вид принимает база нашей индукции при $n=6$).

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5}=x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5}=x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x+1$, $x+1$, $x+1$, $x+2$, $x+2$, начинающуюся с a_{n+1}, что соответствует виду 3) с $x+1$ вместо x.

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5}=x+1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

Значит, $a_{800}=a_{797}+1=a_{794}+2=\ldots=a_8+\dfrac{792}{3}=4+264=268$.

Вариант 4

Медиана пятёрки чисел — это среднее по величине из них, то есть если $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$, медиана равна числу c. Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1=1$,

$a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, $a_5 = 25$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{150}.

Ответ: 60

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 10$, $a_7 = 11$, $a_8 = 12$, $a_9 = 13$, $a_{10} = 13$, $a_{11} = 13$, $a_{12} = 14$, $a_{13} = 14$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_9 каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел a_n, a_{n_1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4} имеет один из следующих трёх видов:

1) x, x, $x+1$, $x+1$, $x+1$;

2) x, $x+1$, $x+1$, $x+1$, $x+2$;

3) x, x, x, $x+1$, $x+1$ (этот вид принимает база нашей индукции при $n = 9$).

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x+1$, $x+1$, $x+1$, $x+2$, $x+2$, начинающуюся с a_{n+1}, что соответствует виду 3) с $x+1$ вместо x.

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

Значит, $a_{150} = a_{147} + 1 = a_{144} + 2 = \ldots = a_9 + \dfrac{141}{3} = 13 + 47 = 60$.

Вариант 5

Медиана пятёрки чисел — это среднее по величине из них, то есть если $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$, медиана равна числу c. Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 7$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{400}.

Ответ: 137

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 4$, $a_7 = 5$, $a_8 = 6$, $a_9 = 6$, $a_{10} = 7$, $a_{11} = 7$, $a_{12} = 7$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_{10} каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел a_n, a_{n_1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4} имеет один из следующих трёх видов:

1) x, x, $x+1$, $x+1$, $x+1$ (этот вид принимает база нашей индукции при $n = 8$;

2) x, $x+1$, $x+1$, $x+1$, $x+2$;

3) x, x, x, $x+1$, $x+1$.

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x+1$, $x+1$, $x+1$, $x+2$, $x+2$, начинающуюся с a_{n+1}, что соответствует виду 3) с $x+1$ вместо x.

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

Значит, $a_{400} = a_{397} + 1 = a_{394} + 2 = \ldots = a_{10} + \dfrac{390}{3} = 7 + 130 = 137.$

Вариант 6

Медиана пятёрки чисел — это среднее по величине из них, то есть если $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$, медиана равна числу c. Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 11$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{200}.

Ответ: 72

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 6$, $a_7 = 7$, $a_8 = 8$, $a_9 = 8$, $a_{10} = 9$, $a_{11} = 9$, $a_{12} = 9$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_{10} каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел a_n, a_{n_1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4} имеет один из следующих трёх видов:

1) x, x, $x+1$, $x+1$, $x+1$ (этот вид принимает база нашей индукции при $n = 8$;

2) x, $x+1$, $x+1$, $x+1$, $x+2$;

3) x, x, x, $x+1$, $x+1$.

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x+1$, $x+1$, $x+1$, $x+2$, $x+2$, начинающуюся с a_{n+1}, что соответствует виду 3) с $x+1$ вместо x.

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

Значит, $a_{200} = a_{197} + 1 = a_{194} + 2 = \ldots = a_8 + \dfrac{192}{3} = 8 + 64 = 72.$

Вариант 7

Медиана пятёрки чисел — это среднее по величине из них, то есть если $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$, медиана равна числу c. Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 8$, $a_5 = 13$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{700}.

Ответ: 239

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 6$, $a_7 = 7$, $a_8 = 8$, $a_9 = 9$, $a_{10} = 9$, $a_{11} = 9$, $a_{12} = 10$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_9 каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел a_n, a_{n_1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4} имеет один из следующих трёх видов:

1) x, x, $x+1$, $x+1$, $x+1$;

2) x, $x+1$, $x+1$, $x+1$, $x+2$ (этот вид принимает база нашей индукции при $n = 8$);

3) x, x, x, $x+1$, $x+1$.

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x+1$, $x+1$, $x+1$, $x+2$, $x+2$, начинающуюся с a_{n+1}, что соответствует виду 3) с $x+1$ вместо x.

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

Значит, $a_{700} = a_{697} + 1 = a_{694} + 2 = \ldots = a_{10} + \dfrac{690}{3} = 9 + 230 = 239$.

Вариант 8

Медиана пятёрки чисел — это среднее по величине из них, то есть если $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$, медиана равна числу c. Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 10$, $a_5 = 15$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{350}.

Ответ: 123

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 7$, $a_7 = 8$, $a_8 = 9$, $a_9 = 10$, $a_{10} = 10$, $a_{11} = 10$, $a_{12} = 11$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_9 каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел a_n, a_{n_1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4} имеет один из следующих трёх видов:

1) x, x, $x+1$, $x+1$, $x+1$;

2) x, $x+1$, $x+1$, $x+1$, $x+2$ (этот вид принимает база нашей индукции при $n = 8$);

3) x, x, x, $x+1$, $x+1$.

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x+1$, $x+1$, $x+1$, $x+2$, $x+2$, начинающуюся с a_{n+1}, что соответствует виду 3) с $x+1$ вместо x.

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

Значит, $a_{350} = a_{347} + 1 = a_{344} + 2 = \ldots = a_8 + \dfrac{342}{3} = 9 + 114 = 123.$

Вариант 9

Медиана пятёрки чисел — это среднее по величине из них, то есть если $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$, медиана равна числу c. Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 9$, $a_5 = 16$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{550}.

Ответ: 188

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 5$, $a_7 = 6$, $a_8 = 7$, $a_9 = 8$, $a_{10} = 8$, $a_{11} = 8$, $a_{12} = 9$.

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_9 каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел a_n, a_{n_1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4} имеет один из следующих трёх видов:

1) x, x, $x+1$, $x+1$, $x+1$;

2) x, $x+1$, $x+1$, $x+1$, $x+2$ (этот вид принимает база нашей индукции при $n = 8$);

3) x, x, x, $x+1$, $x+1$.

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x+1$, $x+1$, $x+1$, $x+2$, $x+2$, начинающуюся с a_{n+1}, что соответствует виду 3) с $x+1$ вместо x.

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5} = x+1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

Значит, $a_{550} = a_{547} + 1 = a_{544} + 2 = \ldots = a_{10} + \dfrac{540}{3} = 8 + 180 = 188.$

Вариант 10

Медиана пятёрки чисел — это среднее по величине из них, то есть если $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$, медиана равна числу c. Последовательность a_n задана начальными условиями $a_1 = 10$, $a_2 = 6$, $a_3 = 3$, $a_4 = 1$, $a_5 = 0$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1.

Найдите a_{200}.

Ответ: 68

Решение: Посчитаем вручную несколько следующих членов: $a_6 = 4$, $a_7 = 4$, $a_8 = 4$, $a_9 = 5$, $a_{10} = 5$, $a_{11} = 5$..

Посчитав члены последовательности дальше, можно заметить, что начиная с a_6 каждый член последовательности повторяется три раза подряд, а после этого также три раза подряд идёт это число, увеличенное на 1. Таким образом, начиная с некоторого места, $a_{n+3} = a_n + 1$.

Докажем эту закономерность, ведь просто заметить её недостаточно для полного решения. Доказательство проведём индукции: будем доказывать, что пятёрка подряд идущих чисел a_n, a_{n_1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4} имеет один из следующих трёх видов:

1) x, x, $x+1$, $x+1$, $x+1$;
2) x, $x+1$, $x+1$, $x+1$, $x+2$;
3) x, x, x, $x+1$, $x+1$(этот вид принимает база нашей индукции при $n=6$);

В первом случае медиана нашей пятёрки это число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5}=x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 2).

Во втором случае медиана нашей пятёрки это также число $x+1$, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5}=x+2$ и мы получаем следующую пятёрку чисел: $x+1$, $x+1$, $x+1$, $x+2$, $x+2$, начинающуюся с a_{n+1}, что соответствует виду 3) с $x+1$ вместо x.

Наконец в третьем случае медиана нашей пятёрки это число x, значит следующий элемент нашей последовательности $a_{n+5}=x+1$ и мы получаем следующую пятёрку чисел, начинающуюся с a_{n+1} и имеющую вид 1).

Значит, $a_{200}=a_{197}+1=a_{194}+2=\ldots=a_8+\dfrac{192}{3}=4+64=68$.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	1	5	1	1	2	2	1	0	10
b	3	2	4	4	2	3	3	3	1	6
c	5	3	3	9	3	5	5	6	4	3
d	7	4	2	16	5	7	8	10	9	1
e	9	5	1	25	7	11	13	15	16	0
n	500	1000	800	150	400	200	700	350	550	200
Ответ	172	336	268	60	137	72	239	123	188	68

Задача 2. (2 балла)(Условие и решение в общем виде)

Натуральные числа a, b, c таковы, что $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=2+\dfrac{n^2}{c}$, причём все дроби несократимы. Найдите $|a-b|$.

Число n в задаче является параметром, см. таблицу.

Ответ: $|a-b|=n$

Решение:

Перенесём 2 в левую часть, приведём её к общему знаменателю и получим

$$\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}=\frac{n^2}{c}.$$

Числа a и b не имеют общих делителей, поэтому $a+b$ также не имеет с ними общий делителей. Если несократимые дроби с натуральными числителями и знаменателями равны, то их числители и знаменатели совпадают. Значит, $(a-b)^2=n^2$, откуда $|a-b|=n$.

Таблица с параметрами и по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Числитель (n^2)	16	25	36	49	64	81	100	121	400	900
Ответ (n)	4	5	6	7	8	9	10	11	20	30

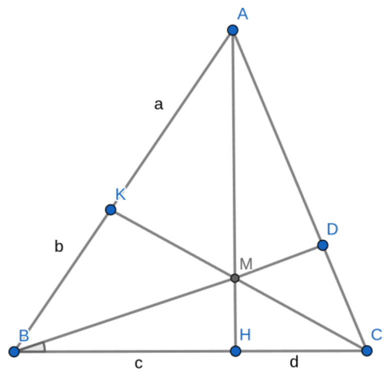
Задача 3. (3 балла)(Условие и решение в общем виде)

В треугольнике ABC проведена высота AH. На стороне AB отмечена точка K. Оказалось, что $AK=a$, $KB=b$, $BH=c$, $CH=d$.

Отрезки AH и CK пересекаются в точке M. Найдите синус угла $\angle MBH$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{a+b-c}{(2(a+b))}}$.

Решение: (варианты 1–9)



Пусть BM и AC пересекаются в точке D. По теореме Чевы $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{BH}{CH}\cdot\dfrac{AK}{BK}=\dfrac{ac}{bd}$.

Числа в условии подобраны так, что $d=\dfrac{ac^2}{b^2+a(b-c)}$, поэтому $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{ac}{b\cdot\frac{ac^2}{b^2+a(b-c)}}=$
$=\dfrac{b^2+a(b-c)}{bc}$

С другой стороны,

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a+b}{c+\frac{ac^2}{b^2+a(b-c)}}=\frac{(a+b)(b^2+a(b-c))}{c(b^2+a(b-c))+ac^2}=\frac{(a+b)(b^2+a(b-c))}{b^2c+abc-ac^2+ac^2}=$$
$$=\frac{(a+b)(b^2+a(b-c))}{bc(a+b)}=\frac{b^2+a(b-c)}{bc}.$$

Из этих равенств следует, что BD биссектриса $\angle B$.

В работах участников, разумеется, все эти равенства имеют место в численном виде.

Вычисляем $\cos\angle B=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{a+b}{c}$ и по формуле синуса половинного угла находим $\sin\angle MBH=\sqrt{\dfrac{a+b-c}{(2(a+b)}}$.

Решение: (вариант 10)

(Аналогичное решение проходит и для вариантов 1–9). Запишем теорему Менелая для треугольника ABH и точек C, M, K лежащих на одной прямой:

$$\frac{AK}{BK}\cdot\frac{BC}{CH}\cdot\frac{MH}{AM}=1\Rightarrow 2\cdot\frac{MH}{AM}\cdot 2=1,$$

то есть $MH=\dfrac{1}{4}AM=\dfrac{1}{5}AH$.

По теореме Пифагора находим $AH=\sqrt{15^2-4^2}=\sqrt{221}$. Отсюда $AM=\dfrac{\sqrt{221}}{5}$, $MB=\sqrt{\dfrac{222}{25}+2^2}=\dfrac{\sqrt{321}}{5}$, $\sin\angle MBH=\dfrac{MH}{MB}=\dfrac{\sqrt{221}}{\sqrt{321}}$

Таблица с параметрами и ответами по вариантам (1–5):

Вариант	1	2	3	4	5
$AK = a$	5	20	6	5	10
$BK = b$	10	10	9	5	5
$BH = c$	12	6	10	6	6
$CH = d$	8	4	8	9	24
$\cos B$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
Ответ (округлённо, в меньшую сторону)	0,316	0,632	0,408	0,447	0,547

Таблица с параметрами и ответами по вариантам (6–10):

Вариант	6	7	8	9	10
$AK = a$	16	5	7	8	10
$BK = b$	8	10	14	12	5
$BH = c$	9	5	6	5	2
$CH = d$	27	1	1	1	2
$\cos B$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{15}$
Ответ (округлённо, в меньшую сторону)	0,559	0,577	0,597	0,612	0,829

Задача 4. (3 балла)(Условие и решение в общем виде)

Положительные числа a_i и b_i таковы, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = x$, $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i = y$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{(a_i+b_i)^3}{a_i b_i}$.

Ответ: $\dfrac{(x+y)^3}{xy}$

Решение:

Преобразуем:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i+b_i)^3}{a_i b_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3+b_i^3}{a_i b_i} + 3 \cdot \frac{a_i^2 b_i + a_i b_i^2}{a_i b_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3+b_i^3}{a_i b_i} + 3x + 3y.$$

Теперь оценим по неравенству Коши-Буняковского-Шварца для дробей:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3+b_i^3}{a_i b_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{a_i} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)} = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}.$$

Итого, складывая мы получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i+b_i)^3}{a_i b_i} \geq 3x + 3y + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{(x+y)^3}{xy}$$

Наименьшее возможное значение достигается, когда все неравенства обращаются в равенство. Для неравенству Коши-Буняковского-Шварца это происходит в случае $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}$, то есть в случае $a_1 = \ldots = a_n = \dfrac{x}{n}$, а $b_1 = \ldots, b_n = \dfrac{y}{n}$.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	25	10	8	10	50	4	20	5	20	16
y	4	8	20	25	8	50	5	8	25	10
Ответ	$243,89$	$72,9$	$137,2$	$171,5$	$487,78$	$787,32$	$156,25$	$54,925$	$182,25$	$109,85$

Задача 5. (3 балла)(Условие и решение в общем виде)

Дана трапеция $ABCD$, боковые стороны которой имеют длины $AB = a$, $CD = b$. Также известна длина диагонали $BD = d$.

Точка K на продолжении стороны AB за точку A такова, что $\angle BKD = \angle ADC$. Также оказалось, что AD — биссектриса $\angle BDK$.

Точка L на луче DA такова, что $\angle LKA = \angle CBD$.

Найдите длину DL.

Ответ: $\dfrac{bd}{a}$

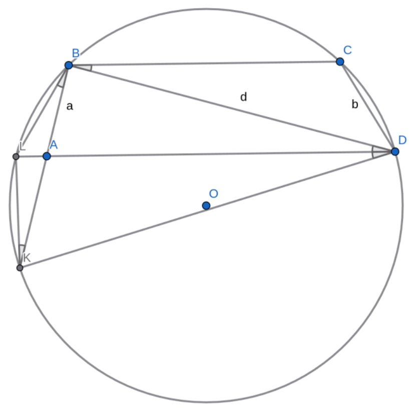
Решение:

Во-первых, $\angle BKD = \angle ADC$ по условию, $\angle ADC = 180° - \angle BCD$ (как односторонние углов в трапеции), поэтому четырёхугольник $KBCD$ — вписанный.

Во-вторых, заметим, что точка L определена не однозначно: она может оказаться как на продолжении луча DA за точку L, так и на отрезке AD.

Разберём сначала первый случай.

Первый случай:



Поймём, что все пять отмеченных на рисунке угла равны: $\angle LKA = \angle CBD$ по условию, $\angle CBD = \angle BDL$ как накрест лежащий, $\angle BDL = \angle DLK$, так как DA биссектриса. Из равенства $\angle BDL = \angle LKA$ получаем, что точка L лежит на той же окружности, что и точки B, C, D и K. Отсюда $\angle LBK = \angle LDK$, как опираюущийся на ту же дугу.

Кроме того, из равенства указанных выше углов также следует, что $BK = KL = CD = b$.

Способ 1. Теорема синусов:

Запишем три теоремы синусов.

Для треугольника BDL: $\dfrac{DL}{BD} = \dfrac{\sin\angle DBL}{\sin\angle BLD}$.

Для треугольника ABD: $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{\sin\angle BDA}{\sin\angle BAD}$.

Для треугольника BD: $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{\sin\angle BCD}{\sin\angle CBD}$.

Заметим, что $\angle CBD = \angle BDL = \angle BDA$; $\angle DBL = \angle DBA + \angle ABL = \angle DBA + \angle KBL = \angle DBA + \angle CBD = \angle ABC = 180^\circ - \angle BAD$, поэтому $\sin\angle DBL = \sin\angle BAD$; наконец, $\angle BLD = 180^\circ - \angle BCD$, поэтому их синусы также равны.

Значит, произведение правых частей в теоремах синусов равно единице, поэтому $\frac{DL}{BD} \cdot \frac{AB}{BD}\frac{BD}{CD} = 1$, откуда $DL = \frac{BD \cdot CD}{AB} = \frac{bd}{a}$.

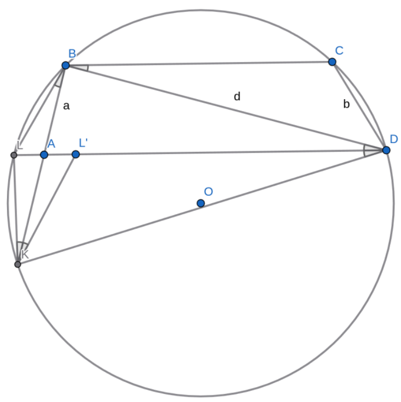
Способ 2. Теорема Птолемея.

По теореме Птолемея для четырёхугольника $BDKL$, $DL = \frac{BD \cdot KL + BL \cdot DK}{BK}$. Поскольку $BL = KL = CD = b$, получаем $DL = b \cdot \frac{BD + DK}{BK} = b \cdot \frac{BD}{BK} \cdot \left(1 + \frac{DK}{BD}\right)$.

По основному свойству биссектрисы для треугольника KBD, $\frac{DK}{BD} = \frac{AK}{AB}$, поэтому $DL = b \cdot \frac{BD}{BK} \cdot \left(1 + \frac{AK}{AB}\right) = b \cdot \frac{BD}{BK} \cdot \frac{AB + AK}{AB} = b \cdot \frac{d}{BK} \cdot \frac{BK}{a} = \frac{bd}{a}$.

Второй случай:

Поскольку мы будем пользоваться свойствами точки L из первого случая, лежащую на отрезке AD «версию» точки L назовём L'.



$\angle KBD$ и $\angle KLD$ опираются на одну дугу, поэтому равны, то есть $\angle ABD = \angle ALK$. $\angle BAD = \angle LAK$ вертикальные, поэтому треугольники BAD и LAK подобны, $AL = \frac{AB \cdot LK}{BD} = \frac{ab}{d}$. Значит, $AD = DL - AL = \frac{bd}{a} - \frac{ab}{d} = \frac{b(d^2 - a^2)}{ad}$.

Из того же самого подобия получаем $AK = AD \cdot \frac{LK}{BD} = AD \cdot \frac{b}{d}$.

Теперь заметим, что треугольник AKD подобен треугольнику $AL'K$ по двум углам, откуда $AL' = \frac{AK^2}{AD} = \frac{AD^2 \cdot \frac{b^2}{d^2}}{AD} = = AD \cdot \frac{b^2}{d^2} = \frac{b(d^2 - a^2)}{ad} \cdot \frac{b^2}{d^2} = \frac{b^3(d^2 - a^2)}{ad^3}$.

Следовательно,

$$DL' = AD - AL' = AD \cdot \left(1 - \frac{b^2}{d^2}\right) = \frac{b(d^2 - a^2)}{ad} \cdot \frac{d^2 - b^2}{d^2} = \frac{b(d^2 - a^2)(d^2 - b^2)}{ad^3}.$$

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	8	6	6	8	10	9	10	8	12	12
b	12	8	9	10	15	12	14	12	15	16
d	20	15	12	20	24	21	30	18	28	33
DL(Ответ 1)	30	20	18	25	36	28	42	27	35	44
AL	$\frac{16}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{27}{7}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{32}{9}$	$\frac{36}{7}$	$\frac{48}{11}$
AL(прибл)	$3,2$	$2,4$	3	$3,2$	$4,17$	$3,86$	$3,33$	$3,56$	$5,14$	$4,36$
AD	$\frac{134}{5}$	$\frac{88}{5}$	$\frac{15}{1}$	$\frac{109}{5}$	$\frac{191}{6}$	$\frac{169}{7}$	$\frac{116}{3}$	$\frac{211}{9}$	$\frac{209}{7}$	$\frac{436}{11}$
AD(прибл)	$26,8$	$17,6$	15	$21,8$	$31,83$	$24,14$	$38,67$	$23,44$	$29,86$	$39,64$
AK	$\frac{402}{25}$	$\frac{704}{75}$	$\frac{45}{4}$	$\frac{545}{50}$	$\frac{2865}{144}$	$\frac{676}{49}$	$\frac{812}{45}$	$\frac{1266}{81}$	$\frac{3135}{196}$	$\frac{6976}{363}$
AK(прибл)	$16,08$	$9,39$	$11,25$	$10,9$	$19,9$	$13,8$	$18,04$	$15,63$	$15,99$	$19,22$
AL'	$\frac{1206}{125}$	$\frac{5632}{1125}$	$\frac{135}{16}$	$\frac{2725}{500}$	$\frac{42975}{3456}$	$\frac{2704}{343}$	$\frac{5684}{675}$	$\frac{7596}{729}$	$\frac{47025}{5488}$	$\frac{111616}{11979}$
AL'(прибл)	$9,65$	$5,01$	$8,44$	$5,45$	$12,43$	$7,88$	$8,42$	$10,42$	$8,57$	$9,32$
DL'(Ответ 2)	$\frac{2144}{125}$	$\frac{14168}{1125}$	$\frac{105}{16}$	$\frac{8175}{500}$	$\frac{67041}{3456}$	$\frac{5577}{343}$	$\frac{20416}{675}$	$\frac{9495}{729}$	$\frac{116831}{5488}$	$\frac{363188}{11979}$
DL'(прибл)	$17,15$	$12,59$	$6,56$	$16,35$	$19,4$	$16,26$	$30,25$	$13,02$	$21,29$	$30,32$

Задача 6. (3 балла)(Условие и решение в общем виде)

На одной из клеток верхней строки клетчатого прямоугольника, стоит шахматный слон. Он начинает движение, за один ход перемещаясь на одну клетку по диагонали в одном и том же направлении. Достигнув клетки на стороне прямоугольника, слон меняет направление на $90°$.

Через n ходов слон впервые вернулся на исходную клетку, ни разу не попав в угол прямоугольника. Найдите площадь прямоугольника. Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через запятую.

Ответ: Такое невозможно.

Решение (для общего случая):

Переформулируем задачу: давайте слон будет ходить не по клеткам, а по их центрам. Пусть наш прямоугольник имеет размер $(a+1)\times(b+1)$. Рассмотрим другой прямоугольник, границы которого проходят по центрам нижней и верхней строки и правого и левого столбца исходного прямоугольника. Отразим новый прямоугольник симметрично относительно всех его сторон, затем получившиеся прямоугольники также отразим, и так далее. Получим прямоугольную сетку, ячейками которой являются прямоугольники $a \times b$.

Соединим теперь центры клеток, на которых находился слон, отрезками. Назовём объединение этих отрезков *траекторией* слона. В нашей новой интерпретации, когда слон доходит до края доски и меняет направление, его траектория меняется под углом $90°$, отражаясь от края доски. Таким образом, мы получаем классическую геометрическую задачу про отражения.

Вместо того, чтобы отразить траекторию слона от стороны нового треугольника под углом $90°$, продлим её дальше по прямой в отражённом прямоугольнике. Будем продолжаться движение слона по прямой, попадая во всё новые и новые отражённые прямоугольники. Движение слона заканчивается, когда слон попадает в точку, являющуюся образом нескольких последовательных отражение исходной.

Введём систему координат с центром в левом верхнем углу нашего прямоугольника. Тогда исходная точка имеет координаты $(x, 0)$ где x — натуральное число. Точки, являющиеся образами нескольких последовательных отражений исходной, имеют вертикальную координату, делящуюся на $2a$, а горизонтальную $2ka \pm x$ или

С другой стороны, смещение нашего слона по вертикали за n ходов равно в точности n, откуда n делится на $2b$. Однако во всех вариантах $n = pq$, где p и q — нечётные простые числа. Значит, это невозможно.

Короткое решение.

Приведённый выше подход позволил бы решить задачу при любых начальных условиях. Для решения же данной задачи с нечётным n достаточно следующего соображения: за нечётное число ходов слон в принципе не может вернуться в исходную точку, так как каждый раз он сдвигается по горизонтали и вертикали на 1, значит, его суммарный сдвиг по каждой координате за n ходов будет нечётным, а для того, чтобы вернуться в исходную точку нужно одинаковое число раз сдвинуться вправо и влево.

Задача 7. (4 балла)(Условие и решение в общем виде)

На конференции по теории графов собралось много учёных. Они выяснили следующие вещи:

(1) У каждого из них ровно a знакомых на конференции.

(2) У любых двух знакомых ровно b общих знакомых на конференции.

(3) У любых двух незнакомых ровно c общих знакомых на конференции.

Сколькими способами можно посадить за круглый стол четверых учёных так, чтобы справа и слева от каждого сидели его знакомые?

(Порядок рассадки для данной четверки учёных важен и должен учитываться в ответе).

Ответ: $n(dc(c-1) + ab(b-1)$, где $d = \dfrac{a(a-b-1)}{c}$, $n = a + d + 1$.

Решение:

Найдём сначала общее количество учёных n. Рассмотрим какого-то одного учёного. У него есть a знакомых. У каждого из них также a знакомых, но среди этих a уже посчитаны b общих знакомых с первым учёным и сам первый учёный. Остаётся ещё $a-b-1$ знакомый у каждого, итого $a(a-b-1)$. В это число вошли все незнакомые с первым учёным люди, причём каждый ровно c раз благодаря третьему условию. Значит, всего получаем $n = 1+a+\dfrac{a(a-b-1)}{c}$ учёных. У каждого из них при этом ровно $d = \dfrac{a(a-b-1)}{c}$ незнакомых на конференции.

Теперь рассмотрим любой из интересующих нас способов. На первое место мы можем посадить любого человека. Напротив него также может сидеть любой из оставшихся.

Рассмотрим два случая: первый человек выбирается n способами. Незнакомого человека напротив можно выбрать d способами. Тогда оставшиеся два выбираются $c(c-1)$ способами так как мы знаем, сколько у первых двоих общих знакомых. Получаем $n \cdot d \cdot c(c-1)$ способов.

Во втором случае мы выбираем человека напротив из a знакомых первого человека, а дальше $b(b-1)$ способами выбираем их общих знакомых. Получаем всего $n \cdot a \cdot b(b-1)$ способов.

Полученные два числа необходимо сложить для получения ответа.

Таблица параметров и ответов по вариантам (1–5):

Вариант	a	b	c	n (учёных)	d (незнакомых)	1-е слагаемое	2-е слагаемое	Ответ
1	81	60	54	112	30	9616320	32114880	41731200
2	78	55	66	105	26	11711700	24324300	36036000
3	72	51	45	105	32	6652800	19278000	25930800
4	54	26	27	109	54	4131972	3825900	7957872
5	44	19	16	111	66	1758240	1670328	3428568

Таблица параметров и ответов по вариантам (6–10):

Вариант	a	b	c	n (учёных)	d (незнакомых)	1-е слагаемое	2-е слагаемое	Ответ
6	66	37	42	111	44	8410248	9758232	18168480
7	56	27	28	113	56	4783968	4442256	9226224
8	36	15	9	117	80	673920	884520	1558440
9	80	52	60	117	36	14910480	24822720	39733200
10	54	21	27	119	64	5346432	2698920	8045352

Замечание. Говоря в терминах теории графов, все эти графы реально существуют. Они называются *сильно регулярными графами*. Их можно найти на этой странице: *https://aeb.win.tue.nl/graphs/srg/srgtab101-150.html*

Задача 8. (5 баллов)(Условие и решение в общем виде)

Обозначим за $d(n)$ число натуральных делителей числа n (включая единицу и само число).

Найдите все такие n, что $n = 3p \cdot d(n)$ (где p — простое число, свой для каждого варианта).

Ответ: $72p$.

Решение:

Очевидно, n делится на 3 и на p. Разложим n в произведение степеней простых чисел: $n = 3^l p^k p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$. Тогда $d(n) = (l+1)(k+1)(k_1+1)\ldots(k_m+1)$. Разделив n на $3p \cdot d(n)$ получим

$$\frac{3^{l-1}}{l+1} \cdot \frac{p^{k-1}}{k+1} \cdot \frac{p_1^{k_1}}{k_1+1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_m^{k_m}}{k_m+1} = 1.$$

Заметим, что все дроби в этом произведении, кроме первых двух, гарантированно не меньше 1 (равенство достигается только в случае $\frac{2^1}{1+1} = 1$). Тогда как минимум одна из первых двух дробей не превосходит единицы, как и их произведение.

Вторая дробь не превосходит единицы только при $k = 1$, поскольку во всех вариантах $p \geqslant 7$. В этом случае она равна $\frac{1}{2}$. Первая же дробь может быть равна как $\frac{1}{2}$ при $l = 1$, так и $\frac{3^{2-1}}{2+1} = 1$ при $l = 2$. При этом при $k > 1$ вторая дробь составляет как минимум $\frac{p}{3}$, а при $l > 2$ первая дробь составляет как минимум $\frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$. И то и другое больше двух, что делает произведение дробей больше единицы.

Осталось разобрать два случая: $k = l = 1$ и $k = 1$, $l = 2$.

В первом случае и первая, и вторая дробь равны $\frac{1}{2}$, а их произведение составляет $\frac{1}{4}$. Значит, произведение остальных должно быть равно 4. Множитель 2 в числителе может получиться только одно из оставшихся простых чисел равно 2. Рассмотрим дроби вида $\frac{2^{k_1}}{k_1+1}$, которые не превосходят 4: это $\frac{2^1}{1+1}=1$, $\frac{2^2}{2+1}=\frac{4}{3}$, $\frac{2^3}{3+1}=2$, $\frac{2^4}{4+1}=\frac{16}{5}=3\frac{1}{5}$. Нас устраивают только дроби, у которых после сокращения в числителе остаётся хотя бы 4. Если мы используем дробь $\frac{4}{3}$, нам понадобиться ещё один множитель 3 в числителе, которого у нас нет, если же возьмём $\frac{16}{5}$, нам понадобится ещё дробь с 5 в числителе, то есть минимум $\frac{5}{2}$, что уже даёт слишком большое произведение.

Во втором случае первая дробь равна $\frac{1}{2}$, а вторая равна 1. Значит, произведение остальных должно быть равно 2. Мы можем добавить к ним только $\frac{2^3}{3+1}=2$ и получить единицу в качестве произведения.

Значит, $n = 3^l p^k 2^3 = 3^2 \cdot 2^3 \cdot p = 72p$.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6
p	11	13	17	19	7	23
$3p$(число в условии)	33	39	51	57	21	69
	792	936	1224	1368	504	1656

1.1.3 Задания для 9 класса

Задача 1. (2 балла)

Вариант 1.

Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что $f(4) = 63$, $f(-3) = 14$.

Найдите $f(1) - f(0)$.

Ответ: 7

Решение: Пусть наш квадратный трёхчлен имеет вид ax^2+bx+c. Тогда $16a+4b+c = 63$, $9a - 3b + c = 14$. Вычитая эти равенства, получаем $7(a + b) = 49$, откуда $a + b = 7$.

Заметим, что $a + b$ это и есть $f(1) - f(0)$.

Вариант 2.

Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что $f(5) = 72$, $f(-4) = 27$.

Найдите $f(1) - f(0)$.

Ответ: 5

Решение: Пусть наш квадратный трёхчлен имеет вид ax^2+bx+c. Тогда $25a+5b+c = 72$, $16a - 4b + c = 27$. Вычитая эти равенства, получаем $9(a + b) = 45$, откуда $a + b = 5$.

Заметим, что $a + b$ это и есть $f(1) - f(0)$.

Вариант 3.

Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что $f(6) = 77$, $f(-5) = 33$.

Найдите $f(1) - f(0)$.

Ответ: 4

Решение: Пусть наш квадратный трёхчлен имеет вид ax^2+bx+c. Тогда $36a+6b+c = 77$, $25a - 5b + c = 33$. Вычитая эти равенства, получаем $11(a + b) = 44$, откуда $a + b = 4$.

Заметим, что $a + b$ это и есть $f(1) - f(0)$.

Вариант 4.

Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что $f(7) = 91$, $f(-6) = 52$.

Найдите $f(1) - f(0)$.

Ответ: 3

Решение: Пусть наш квадратный трёхчлен имеет вид ax^2+bx+c. Тогда $49a+7b+c=91$, $36a-6b+c=52$. Вычитая эти равенства, получаем $13(a+b)=39$, откуда $a+b=3$.

Заметим, что $a+b$ это и есть $f(1)-f(0)$.

Вариант 5.

Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что $f(8)=90$, $f(-7)=60$.

Найдите $f(1)-f(0)$.

Ответ: 2

Решение: Пусть наш квадратный трёхчлен имеет вид ax^2+bx+c. Тогда $64a+8b+c=90$, $49a-7b+c=60$. Вычитая эти равенства, получаем $15(a+b)=30$, откуда $a+b=2$.

Заметим, что $a+b$ это и есть $f(1)-f(0)$.

Вариант 6.

Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что $f(9)=102$, $f(-8)=85$.

Найдите $f(1)-f(0)$.

Ответ: 1

Решение: Пусть наш квадратный трёхчлен имеет вид ax^2+bx+c. Тогда $81a+9b+c=102$, $64a-8b+c=85$. Вычитая эти равенства, получаем $17(a+b)=17$, откуда $a+b=1$.

Заметим, что $a+b$ это и есть $f(1)-f(0)$.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6
x_1	4	5	6	7	8	9
y_1	63	72	77	91	90	102
x_2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
y_2	14	27	33	52	60	85
Ответ	7	5	4	3	2	1

Задача 2. (3 балла) (Условие и решение в общем виде).

$ABCD$ — вписанный четырёхугольник, $AD=CD=a$, $BD=b$, $\angle C=90^\circ$. Найдите радиус вписанной окружности треугольника BCD.

Ответ: $\dfrac{2a\cdot\sqrt{b^2-a^2}}{a+b+\sqrt{b^2-a^2}}$.

Решение:

Вообще-то мы хотели спросить про радиус вписанной окружности треугольника ABC, это чуть более интересная задача, но давайте решать то, что получилось.

Нам надо найти радиус вписанной окружности прямоугольного треугольника. Это можно сделать по формуле, $r=\dfrac{S}{p}$, где S — площадь, а p — полупериметр.

По теореме Пифагора $BC=\sqrt{b^2-a^2}$. Значит, $p=\dfrac{a+b+\sqrt{b^2-a^2}}{2}$, $S=\dfrac{a\cdot\sqrt{b^2-a^2}}{2}$,

$$r=\frac{a\cdot\sqrt{b^2-a^2}}{a+b+\sqrt{b^2-a^2}}.$$

Замечание: вместо этих вычислений можно воспользоваться формулой $r=\dfrac{BC+CD-BD}{2}$ для прямоугольного треугольника.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5	6
a	10	12	12	10	6	12
b	20	36	48	25	9	16
Ответ (приближённо)	3,66	4,97	5,24	3,96	1,85	3,29

Задача 3. (3 балла)(Условие и решение в общем виде).

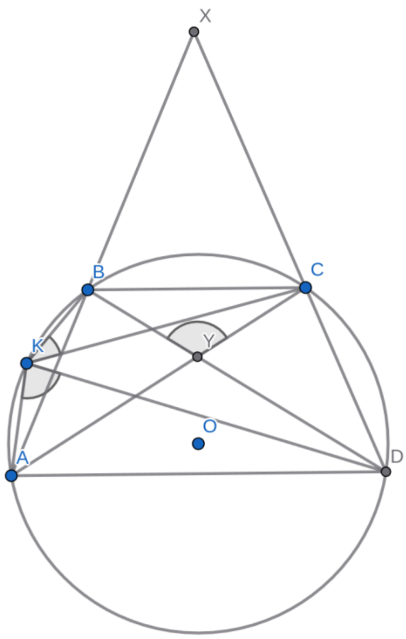
$ABCD$ — равнобедренная трапеция, лучи AB и DC пересекаются в точке X, а диагонали трапеции в точке Y. Точка K, лежащая между прямыми AD и BC такова, что $\angle BKC+\angle DKA=\angle BYC$. O — центр описанной окружности треугольника ABK. $AB=a$, $BX=b$, $OK=r$

Найдите OX^2.

Ответ: $r^2+(a+b)b$.

Решение:

Заметим, что равнобедренная трапеция вписана в окружность.



Докажем, что точка K лежит на той же окружности. Если K действительно лежит на этой окружности, $\angle BKC+\angle DKA=\dfrac{\smile{BC}}{2}+\dfrac{\smile{AD}}{2}=\angle BYC$. Если K внутри окружности, углы $\angle BKC$ и $\angle DKA$ больше половин соответствующих дуг, а если снаружи — меньше. Значит, K лежит на той же окружности, а центр окружности находится в точке O, а её радиус равен r.

По теореме о степени точки относительно окружности, $AX\cdot BX=OX^2-r^2$, откуда $OX^2=r^2+(a+b)b$.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4
a	10	7	16	9
b	8	9	9	16
r	16	9	20	48
Ответ	400	225	625	2704

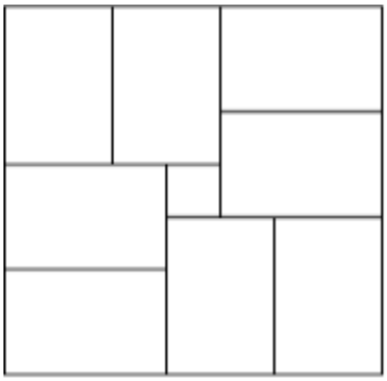
Задача 4. (3 балла)

Вариант 1. В клетках таблицы 7×7 расставлены неотрицательные числа. В каждом прямоугольнике 2×3 или 3×2 сумма чисел не превосходит 60.

Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 540

Решение. Оценка:



Поскольку $2+2+3=7$, мы можем выделить в нашей таблице 8 прямоугольников 2×3 и 3×2 так как показано на рисунке. В центре останется одна клетка, в которой находится число, не большее 60. В каждом из восьми прямоугольников сумма чисел также не больше 60, итого получаем максимум $9 \cdot 60 = 540$.

Пример: Во всех клетках расставляем нули, кроме центральной клетки, четырёх углов и четырёх середин сторон. В этих девяти клетках пишем 60.

Вариант 2. В клетках таблицы 11×11 расставлены неотрицательные числа. В каждом прямоугольнике 5×3 или 3×5 сумма чисел не превосходит 50.

Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 450

Решение. Оценка:

Поскольку $3+3+5=11$, мы можем выделить в нашей таблице 8 прямоугольников 5×3 и 3×5 аналогично показаному на рисунке в вар. 1. В центре останется одна клетка, в которой находится число, не большее 50. В каждом из восьми прямоугольников сумма чисел также не больше 50, итого получаем максимум $9 \cdot 50 = 450$.

Пример: Во всех клетках расставляем нули, кроме центральной клетки, четырёх углов и четырёх середин сторон. В этих девяти клетках пишем 50.

Вариант 3. В клетках таблицы 15×15 расставлены неотрицательные числа. В каждом прямоугольнике 4×7 или 7×4 сумма чисел не превосходит 10.

Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 90

Решение. Оценка:

Поскольку $4+4+7=15$, мы можем выделить в нашей таблице 8 прямоугольников 4×7 и 7×4 аналогично показаному на рисунке в вар. 1. В центре останется одна клетка, в которой находится число, не большее 10. В каждом из восьми прямоугольников сумма чисел также не больше 10, итого получаем максимум $9 \cdot 10 = 90$.

Пример: Во всех клетках расставляем нули, кроме центральной клетки, четырёх углов и четырёх середин сторон. В этих девяти клетках пишем 10.

Задача 5. (3 балла)

Вариант 1. Будем обозначать $\overline{abc}$ число, состоящее из трёх различных цифр a, b и c в указанном порядке. Какое наибольшее значение может принимать НОД$(\overline{abc}, \overline{bca})$?

Ответ: 243

Решение.Пример:

$\overline{abc} = 972 = 243 \cdot 4$, $\overline{bca} = 729 = 243 \cdot 3$.

Оценка: Обозначим искомый НОД за d. Если $\overline{abc}$ и $\overline{bca}$) делятся на d, на него также делится число $10 \cdot \overline{abc} - \overline{bca} = 999a$

Заметим, что $999 = 3^3 \cdot 37$. Если трёхзначное число одновременно делится на 3 и на 37, то оно делится на 111, а значит состоит из одинаковых цифр и не удовлетворяет условию задачи.

Если d число не делится на 37, то оно является делителем числа 3^3a, максимальное значение этого числа как раз равно 243.

Если d делится на 37, то оно, по доказанному выше, не делится на 3. Значит, d является делителем числа $37a$, причём a не делится на 3. Осталось разобрать случаи $d = 7 \cdot 37$ и $d = 8 \cdot 37$, остальные варианты слишком малы.

Рассмотрим все трёхзначные числа, делящиеся на эти два. $7 \cdot 37 = 259$, $2 \cdot 7 \cdot 37 = 518$, $3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$, эти числа нам не подходят. $8 \cdot 37 = 296$, $2 \cdot 8 \cdot 37 = 592$, $3 \cdot 8 \cdot 37 = 888$, эти числа нам также не подходят.

Вариант 2. Будем обозначать $\overline{abba}$ число, состоящее из цифр a, b, b и a в указанном порядке, причём $a \neq b$. Какое наибольшее значение может принимать НОД$(\overline{abba}, \overline{baab})$?

Ответ: 132

Решение.Пример:

$\overline{abba} = 4884 = 132 \cdot 37$, $\overline{baab} = 8448 = 132 \cdot 64$.

Оценка: Обозначим искомый НОД за d. Если $\overline{abba}$ и $\overline{baab}$) делятся на d, на него также делится их сумма, равная $1111 \cdot (a + b) = 11 \cdot 101 \cdot (a + b)$. Оба числа очевидно не делятся на 101 при $a \neq b$. Значит, $11 \cdot (a + b)$ делится на d.

Поскольку $a + b$ не больше 17, чтобы получить ответ, больший $132 = 11 \cdot 12$, d должно быть в точности равно $11 \cdot (a + b)$

С другой стороны, $\overline{abba} - \overline{baab} = 891(a - b) = 11 \cdot 3^4 \cdot (a - b)$ также делится на d. Поскольку $a - b \leqslant 8$, чтобы d было больше $11 \cdot 12$, необходимо, чтобы d делилось на 3, значит, и $a + b$ делится на 3.

Осталось разобрать случай $a + b = 15$, $d = 11 \cdot 15$. Однако он невозможен, поскольку тогда и a, и b должны делиться на 5.

Вариант 3. Будем обозначать $\overline{abc}$ число, состоящее из трёх различных цифр a, b и c в указанном порядке. Какое наибольшее значение может принимать НОД$(\overline{abc}, \overline{cba})$?

Ответ: 99

Решение.Примеры:

$\overline{abc} = 198 = 99 \cdot 2$, $\overline{cba} = 891 = 99 \cdot 9$.

$\overline{abc} = 297 = 99 \cdot 3$, $\overline{cba} = 792 = 99 \cdot 8$.

$\overline{abc} = 396 = 99 \cdot 3$, $\overline{cba} = 693 = 99 \cdot 7$.

$\overline{abc} = 495 = 99 \cdot 5$, $\overline{cba} = 594 = 99 \cdot 6$.

Оценка: Обозначим искомый НОД за d. Если $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$) делятся на d, на него также делится $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c)$.

Если d не делится на 11, то $9(a - c)$ делится на d, а это число меньше 99. Если d не делится на 3, то $11(a - c)$ делится на d, а это число также меньше 99. Значит, d делится на 33.

Дальше можно перебрать всё трехзначные числа, делящиеся на 33, или заметить следующее:

$\overline{abc} = \overline{xy} \cdot 11$. Если $x + y < 10$, мы получаем, что $a = x$, $b = x + y$, $c = y$. Аналогично $\overline{cba} = \overline{yx} \cdot 11$, то есть нам надо найти наибольший возможный общий делитель $\overline{xy}$ и $\overline{yx}$. На него должна делиться также из сумма $11 \cdot (x + y)$. Но при различных x и y число $\overline{xy}$ не делится на 11, значит d не превосходит $11 \cdot (x + y) \leqslant 99$.

Если же $x+y \geqslant 10$, всё же придется перебрать. При этом $\overline{xy}$, как и d, должно делиться на 3.

$39 \cdot 11 = 429$, $48 \cdot 11 = 528$, $57 \cdot 11 = 627$, $66 \cdot 11 = 726$, $75 \cdot 11 = 825$, $84 \cdot 11 = 924$, $93 \cdot 11 > 1000$, $69 \cdot 11 = 759$, $78 \cdot 11 = 858$, $87 \cdot 11 = 957$, $96 \cdot 11 > 1000$, $99 \cdot 11 > 1000$.

Можно убедиться, что у любой подходящей под условие пары НОД равен 33.

Задача 6. (4 балла) (Условие и решение в общем виде)

Про положительные числа a, b, c известно, что $\dfrac{1}{abc} - k^2\left(\dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ac} + \dfrac{c}{ab}\right) = 2k^3$.

Докажите, что среди чисел a, b, c есть число, не меньшее $\dfrac{1}{2k}$.

Доказательство: Сделаем замену $x = ka$, $y = kb$, $z = kc$ получим
$\dfrac{k^3}{xyz} - k^2\left(\dfrac{kx}{yz} + \dfrac{ky}{xz} + \dfrac{kz}{xy}\right) = 2k^3$.

Домножив на xyz и разделив на k^3 получим $1 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2xyz$ или $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Нам необходимо и достаточно доказать, что среди чисел x, y и z одно не меньше $\dfrac{1}{2}$. Это очевидно, поскольку если все числа меньше $\dfrac{1}{2}$, левая часть последнего равенства меньше 1.

Комментарий: эта задача взялась из следующих свойств углов треугольника: если α, β и γ углы треугольника, то для них выполняется равенство

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 1.$$

Задача 7. (4 балла)(Условие и решение в общем виде)

В Нонквинтляндии n городов, некоторые из которых соединены дорогами. Путешественник обнаружил, что невозможно проехать по пяти разным дорогами и вернутся в исходный город. Докажите, что в стране не более m дорог.

Каждая дорога соединяет два города. Два города могут быть соединены не более, чем одной дорогой. По каждой дороге можно двигаться в любом из двух направлений. Путешественник может двигаться только по дорогам.

Доказательство:

Заметим сначала, что во всех вариантах $m = 0.7 \cdot \dfrac{n(n-1)}{2}$, то есть m составляет $\dfrac{7}{10}$ от максимального числа дорог, которые могут быть проведены между n городами.

Будем называть замкнутый маршрут из пяти дорог, существование которого запрещено условием, 5-циклом.

Докажем, что если среди любых пяти городов проведено не меньше восьми (из десяти возможных) дорог, то среди этих городов можно найти 5-цикл. Действительно, если дорог не меньше восьми, то отстуствуют не больше двух дорог. Можно пронумеровать города так, чтобы отсутствовали дороги, соединяющие города 1 и 2, 1 и 3 либо города 1 и 2, 3 и 4.

В первом случае мы найдём 5-цикл 1-4-2-3-5-1, во втором 1-3-5-2-4-1.

Поскольку каждая пара городов с проведённой между ними дорогой или антидорогой входит в равное число таких пятёрок, поэтому общее количество дорог также составляет не более $\dfrac{7}{10}$ от максимально возможного, то есть максимум $\dfrac{7}{10} \cdot \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{7n(n-1)}{20}$.

Докажем это чуть более строго. В каждой пятёрке городов не более 7 дорог. Всего этих пятёрок C_n^5. Итого получаем максимум $7C_n^5$ дорог, однако, каждая из них посчитана несколько раз. А именно, к каждой паре городов можно подобрать ещё 3 города C_{n-2}^3 способами, значит, именно столько раз мы посчитали каждую дорогу.

Таким образом, всего дорог не более $\dfrac{7C_n^5}{C_{n-2}^3} = \dfrac{7\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}}{\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}} = \dfrac{7n(n-1)}{20}$.

Таблица с параметрами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4
n	200	300	400	500
m	13930	31395	55860	87325

Задача 8. (5 баллов)(Условие и решение в общем виде)

Обозначим за $d(n)$ число натуральных делителей числа n (включая единицу и само число).

Найдите все такие n, что $n = p\cdot d(n)$.

Ответ: $8p$, $12p$.

Решение:

Очевидно, n делится на p. Разложим n в произведение степеней простых чисел: $n = p^k p_1^{k_1}\dots p_m^{k_m}$. Тогда $d(n) = (k+1)(k_1+1)\dots(k_m+1)$. Разделив n на $p\cdot d(n)$ получим

$$\frac{3^{l-1}}{l+1}\cdot\frac{p^{k-1}}{k+1}\cdot\frac{p_1^{k_1}}{k_1+1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_m^{k_m}}{k_m+1} = 1.$$

Заметим, что все дроби в этом произведении, кроме первого гарантированно не меньше 1 (равенство достигается только в случае $\dfrac{2^k}{1+1} = 1$). Тогда первая дробь гарантированно не превосходит единицы.

Первая дробь не превосходит единицы только при $k = 1$, поскольку во всех вариантах $p \geqslant 7$. В этом случае она равна $\dfrac{1}{2}$.

Множитель 2 в числителе может получиться только одно из оставшихся простых чисел равно 2. Рассмотрим дроби вида $\dfrac{2^{k_1}}{k_1+1}$, которые не превосходят 2: это $\dfrac{2^1}{1+1} = 1$, $\dfrac{2^2}{2+1} = \dfrac{4}{3}$, $\dfrac{2^3}{3+1} = 2$.

$\dfrac{2^1}{1+1} = 1$ не устраивает нас, поскольку двойка в числителе не образуется.

Наличие в произведение дроби $\dfrac{2^2}{2+1} = \dfrac{4}{3}$ означает, что должна быть ещё дробь с множителем 3 в числителе. Однаков $\dfrac{3^2}{2+1} = 3$ и большие дроби дадут в итоге слишком большое произведение, а вот вариант $\dfrac{3^1}{1+1} = \dfrac{3}{2}$ нас устраивает. Итак, мы получили первый ответ $n = 12p$.

$\dfrac{2^3}{3+1} = 2$ даёт нам второй ответ $8p$.

Таблица с параметрами и ответами по вариантам:

Вариант	1	2	3	4	5
p	11	13	17	19	23
$8p$	88	104	136	152	184
$12p$	132	156	204	228	276

1.1.4 Задания для 8 класса

Задача 1. (2 балла)

Вариант 1. Вася решал приведённое квадратное уравнение с целыми корнями $x_1 = -3$ и x_2 по теореме Виета, но перепутал второй коэффициент и свободный член и получил целые корни $x_3 = -1$ и x_4.

Найдите x_2 и x_4.

Ответ: $x_2 = -2$, $x_4 = -5$

Решение: Согласно теореме Виета, для приведённого квадратного уравнения второй коэффициент равен $-(x_1 + x_2)$, а свободный член равен x_1x_2. Из условия, что для второго уравнения эти числа поменялись местами, получаем

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = x_3x_4 \\ -x_3 - x_4 = x_1x_2 \end{cases} \text{или, подставив значения корней, } \begin{cases} 3 - x_2 = -x_4 \\ 1 - x_4 = -3x_2 \end{cases}.$$

Отсюда $x_2 = 3 + x_4$, $1 - x_4 = -3(3 + x_4) \Rightarrow 10 = -2x_4 \Rightarrow x_4 = -5 \Rightarrow x_2 = -2$.

Вариант 2. Вася решал приведённое квадратное уравнение с целыми корнями $x_1 = 4$ и x_2 по теореме Виета, но перепутал второй коэффициент и свободный член и получил целые корни $x_3 = 2$ и x_4.

Найдите x_2 и x_4. В ответе запишите их в любом порядке через запятую.

Ответ: $x_2 = 0$, $x_4 = -2$

Решение: Согласно теореме Виета, для приведённого квадратного уравнения второй коэффициент равен $-(x_1 + x_2)$, а свободный член равен x_1x_2. Из условия, что для второго уравнения эти числа поменялись местами, получаем

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = x_3x_4 \\ -x_3 - x_4 = x_1x_2 \end{cases} \text{или, подставив значения корней, } \begin{cases} -4 - x_2 = 2x_4 \\ -2 - x_4 = 4x_2 \end{cases}.$$

Отсюда $x_2 = -4 - 2x_4$, $-2 - x_4 = 4(-4 - 2x_4) \Rightarrow 14 = -7x_4 \Rightarrow x_4 = -2 \Rightarrow x_2 = 0$.

Вариант 3. Вася решал приведённое квадратное уравнение с целыми корнями $x_1 = 1$ и x_2 по теореме Виета, но перепутал второй коэффициент и свободный член и получил целые корни $x_3 = 3$ и x_4.

Найдите x_2 и x_4. В ответе запишите их в любом порядке через запятую.

Ответ: $x_2 = 1$, $x_4 = -4$

Решение: Согласно теореме Виета, для приведённого квадратного уравнения второй коэффициент равен $-(x_1 + x_2)$, а свободный член равен x_1x_2. Из условия, что для второго уравнения эти числа поменялись местами, получаем

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = x_3x_4 \\ -x_3 - x_4 = x_1x_2 \end{cases} \text{или, подставив значения корней, } \begin{cases} -1 - x_2 = 3x_4 \\ -3 - x_4 = x_2 \end{cases}.$$

Отсюда $x_2 = -1 - 3x_4$, $-3 - x_4 = -1 - 3x_4 \Rightarrow -2 = -2x_4 \Rightarrow x_4 = 1 \Rightarrow x_2 = -4$.

Задача 2. (2 балла)

Вариант 1. Сумма трёх чисел равна 0, а их произведение равно 17. Найдите сумму кубов этих трёх чисел.

Ответ: 51

Решение: Воспользуемся известным тождеством $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$. Из него следует, что при $a + b + c = 0$ выполняется равенство $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, откуда немедленно получаем ответ

Вариант 2. Сумма трёх чисел равна 0, а их произведение равно 19. Найдите сумму кубов этих трёх чисел.

Ответ: 57

Решение: Воспользуемся известным тождеством $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$. Из него следует, что при $a+b+c=0$ выполняется равенство $a^3+b^3+c^3=3abc$, откуда немедленно получаем ответ

Вариант 3. Сумма трёх чисел равна 0, а их произведение равно 23. Найдите сумму кубов этих трёх чисел.

Ответ: 69

Решение: Воспользуемся известным тождеством $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$. Из него следует, что при $a+b+c=0$ выполняется равенство $a^3+b^3+c^3=3abc$, откуда немедленно получаем ответ

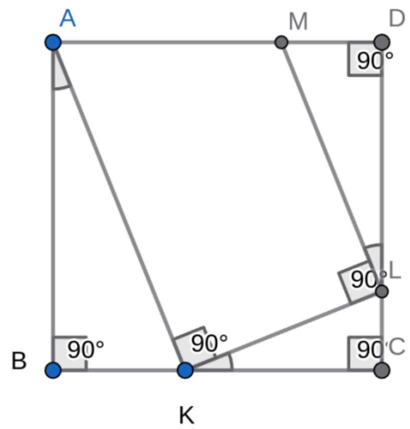
Задача 3. (2 балла)

Вариант 1. $ABCD$ — квадрат со стороной 1728. На отрезке BC взята точка K такая, что $BK=720$. Перпендикуляр к прямой AK, восставленный в точке K, пересекает отрезок CD в точке L. Перпендикуляр к прямой KL, восставленный в точке L, пересекает отрезок AD в точке M.

Найдите длину LM.

Ответ: 1417

Решение:



$\angle LKC=180^\circ-90^\circ-\angle AKB=\angle KAB$, поэтому прямоугольнные треугольники LKC и KAB подобные. Аналогично подобен им треугольник MLD.

Отсюда получаем

$$LM=\frac{KA\cdot DL}{AB}=\frac{\sqrt{AB^2+BK^2}\cdot(CD-LC)}{1728}=$$

$$=\frac{\sqrt{1728^2+720^2}\cdot(CD-LC)}{1728}=\frac{1872\cdot(CD-LC)}{1728}$$

.

Из тех же подобий $LC=\dfrac{BK\cdot CK}{AB}=\dfrac{720\cdot 1008}{1728}=420$, поэтому $LM=\dfrac{1872\cdot 1308}{1728}=$ $=1417$.

Вариант 2. $ABCD$ — квадрат со стороной 1600. На отрезке BC взята точка K такая, что $BK=1200$. Перпендикуляр к прямой AK, восставленный в точке K, пересекает отрезок CD в точке L. Перпендикуляр к прямой KL, восставленный в точке L, пересекает отрезок AD в точке M.

Найдите длину LM.

Ответ: 1625

Решение:

$\angle LKC = 180^\circ - 90^\circ - \angle AKB = \angle KAB$, поэтому прямоугольнные треугольники LKC и KAB подобные. Аналогично подобен им треугольник MLD.

Отсюда получаем

$$LM = \frac{KA \cdot DL}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 + BK^2} \cdot (CD - LC)}{1728} =$$

$$= \frac{\sqrt{1600^2 + 1200^2} \cdot (CD - LC)}{1600} = \frac{2000 \cdot (CD - LC)}{1600}$$

.

Из тех же подобий $LC = \dfrac{BK \cdot CK}{AB} = \dfrac{1200 \cdot 400}{1600} = 300$, поэтому $LM = \dfrac{2000 \cdot 1300}{1600} =$ $= 1625$.

Вариант 3. $ABCD$ — квадрат со стороной 3375. На отрезке BC взята точка K такая, что $BK = 1800$. Перпендикуляр к прямой AK, восставленный в точке K, пересекает отрезок CD в точке L. Перпендикуляр к прямой KL, восставленный в точке L, пересекает отрезок AD в точке M.

Найдите длину LM.

Ответ: 2873

Решение:

$\angle LKC = 180^\circ - 90^\circ - \angle AKB = \angle KAB$, поэтому прямоугольнные треугольники LKC и KAB подобные. Аналогично подобен им треугольник MLD.

Отсюда получаем

$$LM = \frac{KA \cdot DL}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 + BK^2} \cdot (CD - LC)}{3375} =$$

$$= \frac{\sqrt{3375^2 + 1800^2} \cdot (CD - LC)}{3375} = \frac{3825 \cdot (CD - LC)}{3375}$$

.

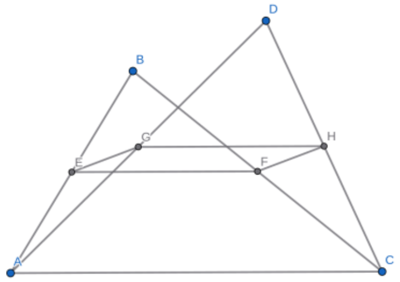
Из тех же подобий $LC = \dfrac{BK \cdot CK}{AB} = \dfrac{1800 \cdot 1575}{3375} = 840$, поэтому $LM = \dfrac{3825 \cdot 2535}{3375} =$ $= 2873$.

Задача 4. (3 балла)

Вариант 1. По одну сторону от прямой AC взяты точки B и D. Площади треугольников ABC и ACD равны 30 и 40 соответственно. Найдите площадь четырёхугольника, образованного серединами отрезков AB, BC, CD и AD.

Ответ: 5

Решение:



Заметим, что средние линии EF и GH треугольников ABC и ACD параллельны стороне AC и в два раза короче её. Значит, четырёхугольник $EFHG$ параллелограмм.

Его площадь равна длине EF, умноженной на расстояние между прямыми EF и GH. Это расстояние равно разности между расстояниями от GH и EF до AC, которые составляют половины от высот h_2 и h_1 треугольников ABD и ACD.

Значит, $S_{EFHG} = EF \cdot \left(\dfrac{h_2}{2} - \dfrac{h_1}{2}\right) = \dfrac{AC}{2} \cdot \dfrac{h_2}{2} - \dfrac{AC}{2} \cdot \dfrac{h_1}{2} = \dfrac{S_{ABC}}{2} - \dfrac{S_{ACD}}{2} = \dfrac{40-30}{2} = 5.$

Вариант 2. По одну сторону от прямой AC взяты точки B и D. Площади треугольников ABC и ACD равны 40 и 60 соответственно. Найдите площадь четырёхугольника, образованного серединами отрезков AB, BC, CD и AD.

Ответ: 10

Решение: Заметим, что средние линии EF и GH треугольников ABC и ACD параллельны стороне AC и в два раза короче её. Значит, четырёхугольник $EFHG$ параллелограмм.

Его площадь равна длине EF, умноженной на расстояние между прямыми EF и GH. Это расстояние равно разности между расстояниями от GH и EF до AC, которые составляют половины от высот h_2 и h_1 треугольников ABD и ACD.

Значит, $S_{EFHG} = EF \cdot \left(\dfrac{h_2}{2} - \dfrac{h_1}{2}\right) = \dfrac{AC}{2} \cdot \dfrac{h_2}{2} - \dfrac{AC}{2} \cdot \dfrac{h_1}{2} = \dfrac{S_{ABC}}{2} - \dfrac{S_{ACD}}{2} = \dfrac{60-40}{2} = 10.$

Вариант 3. По одну сторону от прямой AC взяты точки B и D. Площади треугольников ABC и ACD равны 20 и 24 соответственно. Найдите площадь четырёхугольника, образованного серединами отрезков AB, BC, CD и AD.

Ответ: 2

Решение: Заметим, что средние линии EF и GH треугольников ABC и ACD параллельны стороне AC и в два раза короче её. Значит, четырёхугольник $EFHG$ параллелограмм.

Его площадь равна длине EF, умноженной на расстояние между прямыми EF и GH. Это расстояние равно разности между расстояниями от GH и EF до AC, которые составляют половины от высот h_2 и h_1 треугольников ABD и ACD.

Значит, $S_{EFHG} = EF \cdot \left(\dfrac{h_2}{2} - \dfrac{h_1}{2}\right) = \dfrac{AC}{2} \cdot \dfrac{h_2}{2} - \dfrac{AC}{2} \cdot \dfrac{h_1}{2} = \dfrac{S_{ABC}}{2} - \dfrac{S_{ACD}}{2} = \dfrac{24-20}{2} = 2.$

Задача 5. (3 балла)

Вариант 1. Сумма четырёх попарно различных простых чисел равна утроенному произведению двух из них. Какое наименьшее значение может принимать эта сумма?

Ответ: 99

Решение: Если все простые числа нечётные, то их сумма чётна, а утроенное произведение любых двух нечётно, поэтому они не могут быть равны. Значит, одно из простых чисел равно 2, а их обшая сумма нечётна. Поэтому произведение двух из них тоже должно быть нечётно, значит, 2 не участвует в этом произведении.

Запишем это в виде формулы: $2 + p + q + r = 3pq$. Умножим это равенство на 3 и перегруппируем слагаемые, добавив в каждую часть по единице: $3r + 7 = 9pq - 3p - 3q + 1$, откуда $(3p-1)(3q-1) - 7 = 3r$.

Нам подходит вариант $p = 3$, $q = 11$ или наоборот, тогда $r = 83$, $2 + 3 + 11 + 83 = 3 \cdot 3 \cdot 11 = 99$.

Чтобы доказать, что это наименьший вариант, достаточно перебрать все пары нечётных простых чисел, произведение которых меньше $\frac{99}{3} = 33$.

$p = 3$, $q = 5$: $(3p-1)(3q-1) - 7 = 105 = 3 \cdot 35$, но 35 не простое.

$p = 3$, $q = 7$: $(3p-1)(3q-1) - 7 = 153 = 3 \cdot 51$, но 51 не простое.

Следующее простое q при $p = 3$ это как раз 11, значит, остальные варианты при $p = 3$ дают ещё большее произведение. Если же оба числа больше трёх, то их произведение хотя бы $5 \cdot 7 = 35$.

Вариант 2. Сумма четырёх попарно различных простых чисел равна произведению двух из них. Какое наименьшее значение может принимать эта сумма?

Ответ: 33

Решение: Если все простые числа нечётные, то их сумма чётна, а утроенное произведение любых двух нечётно, поэтому они не могут быть равны. Значит, одно из простых чисел равно 2, а их обшая сумма нечётна. Поэтому произведение двух из них тоже должно быть нечётно, значит, 2 не участвует в этом произведении.

Запишем это в виде формулы: $2 + p + q + r = pq$. Получаем $r + 3 = pq - p - q + 1$, откуда $(p-1)(q-1) - 3 = r$.

Нам подходит вариант $p = 3$, $q = 11$ или наоборот, тогда $r = 17$, $2 + 3 + 11 + 17 = 3 \cdot 11 = 33$.

Чтобы доказать, что это наименьший вариант, достаточно перебрать все пары нечётных простых чисел, произведение которых меньше 33.

$p = 3$, $q = 5$: $(p-1)(q-1) - 3 = 5$, но то есть $r = p$, что противоречит условию.

$p = 3$, $q = 7$: $(p-1)(q-1) - 3 = 9$, но 9 не простое.

Следующее простое q при $p = 3$ это как раз 11, значит, остальные варианты при $p = 3$ дают ещё большее произведение. Если же оба числа больше трёх, то их произведение хотя бы $5 \cdot 7 = 35$.

Вариант 3. Сумма четырёх попарно различных простых чисел равна произведению двух из них, умноженному на 5. Какое наименьшее значение может принимать эта сумма?

Ответ: 165

Решение: Если все простые числа нечётные, то их сумма чётна, а утроенное произведение любых двух нечётно, поэтому они не могут быть равны. Значит, одно из простых чисел равно 2, а их общая сумма нечётна. Поэтому произведение двух из них тоже должно быть нечётно, значит, 2 не участвует в этом произведении.

Запишем это в виде формулы: $2 + p + q + r = 5pq$. Умножим это равенство на 5 и перегруппируем слагаемые, добавив в каждую часть по единице: $5r + 11 = 25pq - 5p - 5q + 1$, откуда $(5p-1)(5q-1) - 11 = 5r$.

Нам подходит вариант $p = 3$, $q = 11$ или наоборот, тогда $r = 149$, $2 + 3 + 11 + 149 = 5 \cdot 3 \cdot 11 = 165$.

Чтобы доказать, что это наименьший вариант, достаточно перебрать все пары нечётных простых чисел, произведение которых меньше $\frac{165}{5} = 33$.

$p = 3$, $q = 5$: $(5p-1)(5q-1) - 11 = 325 = 5 \cdot 65$, но 65 не простое.

$p = 3$, $q = 7$: $(5p-1)(5q-1) - 7 = 465 = 5 \cdot 93$, но 93 не простое.

Следующее простое q при $p = 3$ это как раз 11, значит, остальные варианты при $p = 3$ дают ещё большее произведение. Если же оба числа больше трёх, то их произведение хотя бы $5 \cdot 7 = 35$.

Задача 6. (3 балла)

Вариант 1. В какое наибольшее количество раз произведение восьми подряд идущих чисел может быть больше их наименьшего общего кратного?

Ответ: 5040

Решение: Каждое простое число входит в произведение чисел в суммарное степени вхождения в каждое из них, а в наименьшее общее кратное — в максимальной.

Из восьми подряд идущих чисел на простые числа большие 7, делится максимум одно из них, значит в НОК и в произведение эти простые числа входят в одной и той же степени.

На простое число 7 делятся максимум два числа. В одно из них 7 входит в первой степени, в другое — в степени больше 1. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная на 1.

На простое число 5 делятся также максимум два числа. В одно из них 5 входит в первой степени, в другое — в степени больше 1. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная на 1.

На простое число 3 делятся максимум три числа. В два из них 3 входит в первой степени, в оставшееся — в степени больше 1. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная на 2.

На простое число 2 делятся ровно 4 числа. Из них ровно 2 делятся на $2 \cdot 2 = 4$, а из них одно делится на какую-то большую степень. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная на 4.

Итого получаем ответ $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040$.

Вариант 2. В какое наибольшее количество раз произведение десяти подряд идущих чисел может быть больше их наименьшего общего кратного?

Ответ: 362880

Решение: Каждое простое число входит в произведение чисел в суммарное степени вхождения в каждое из них, а в наименьшее общее кратное — в максимальной.

Из десяти подряд идущих чисел на простые числа большие 7, делится максимум одно из них, значит в НОК и в произведение эти простые числа входят в одной и той же степени.

На простое число 7 делятся максимум два числа. В одно из них 7 входит в первой степени, в другое — в степени больше 1. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная на 1.

На простое число 5 делятся также максимум два числа. В одно из них 5 входит в первой степени, в другое — в степени больше 1. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная на 1.

На простое число 3 делятся максимум четыре числа. Из них одно или два делятся на 9 и максимум одно может делиться на какую-то большую степень тройки. Если делящееся на 9 число одно, то в НОК войдёт тройка в той же степени, что и в этом числе, а в произведение — в степени на 3 больше. Если же есть второе число, делящее на 9, то степень будет больше не на 3, а на 4.

На простое число 2 делятся ровно 5 чисел. Из них два или три делятся на $2 \cdot 2 = 4$, одно или два на $2^3 = 8$ и максимум одно на большую степень двойки. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная максимум на $1 + 1 + 2 + 3 = 7$.

Итого получаем ответ $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 362880$.

Вариант 3. В какое наибольшее количество раз произведение одиннадцати подряд идущих чисел может быть больше их наименьшего общего кратного?

Ответ: 3628800

Решение: Каждое простое число входит в произведение чисел в суммарное степени вхождения в каждое из них, а в наименьшее общее кратное — в максимальной.

Из десяти подряд идущих чисел на простые числа большие 7, делится максимум одно из них, значит в НОК и в произведение эти простые числа входят в одной и той же степени.

На простое число 7 делятся максимум два числа. В одно из них 7 входит в первой степени, в другое — в степени больше 1. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная на 1.

На простое число 5 делятся также максимум три числа. В два из них 5 входит в первой степени, в оставшееся — в степени больше 1. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная на 1.

На простое число 3 делятся максимум четыре числа. Из них одно или два делятся на 9 и максимум одно может делиться на какую-то большую степень тройки. Если делящееся на 9 число одно, то в НОК войдёт тройка в той же степени, что и в этом числе, а в произведение — в степени на 3 больше. Если же есть второе число, делящее на 9, то степень будет больше не на 3, а на 4.

На простое число 2 делятся пять или шесть чисел. Из них два или три делятся на $2 \cdot 2 = 4$, одно или два на $2^3 = 8$ и максимум одно на большую степень двойки. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная максимум на $1 + 1 + 1 + 2 + 3 = 8$.

Итого получаем ответ $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 = 3628800$.

Задача 7. (4 балла)

Вариант 1. Фокусник раздал зрителям разноцветные шляпы, а затем сказал: «Как бы вы не поменялись шляпами, я смогу выбрать семерых из вас так, что ни один из них не получил шляпу от другого». При каком наименьшем числе зрителей фокусник гарантированно будет прав?

Ответ: 19

Решение: Рассмотрим какого-то одного зрителя. Он отдал шляпу какому-то другому зрителю, тот отдал шляпу третьему и так далее. Продолжая эту последовательность, мы рано или поздно дойдём до человека, который отдал шляпу первому зрителю. Повторив аналогичную процедуру со всеми остальными зрителями, мы обнаружим, что зрители таким образом разбились на циклы.

В семёрке зрителей, которую выбирает фокусник, не может быть двоих, которые являются соседями в одном цикле. Значит, из каждого цикла мы можем взять половину зрителей, округлённую вниз.

Почему нельзя меньше 19?

Если общее число зрителей меньше 19, то их можно разбить на шесть (или меньше) циклов по два или три человека в каждом, ведь любое число имеет вид $3k$, $3k + 2$ или $3k + 1 = 3(k - 1) + 2 + 2$, причём k не больше 6 в первом случае, и не больше 5 во втором и третьем.

Из каждого такого цикла фокусник сможет выбрать максимум одного человека, итого не больше 6.

Почему 19 подходит?

Если зрителей ровно 19, и они разбиваются на 7 или больше циклов, фокусник гарантированно прав. Если же циклов $n < 7$, мы можем выбрать из каждого из них не менее $\frac{l-1}{2}$ человек, где l — длина этого цикла. Просуммировав эти числа, мы получим общую длину всех циклов, то есть 19, делённую на 2, минус $\frac{n}{2}$, что не больше 3. Итого фокусник сможет выбрать не менее $6,5$ человек, то есть не менее 7.

Вариант 2. Фокусник раздал зрителям разноцветные шляпы, а затем сказал: «Как бы вы не поменялись шляпами, я смогу выбрать восьмерых из вас так, что ни один из них не получил шляпу от другого». При каком наименьшем числе зрителей фокусник гарантированно будет прав?

Ответ: 22

Решение: Рассмотрим какого-то одного зрителя. Он отдал шляпу какому-то другому зрителю, тот отдал шляпу третьему и так далее. Продолжая эту последовательность, мы рано или поздно дойдём до человека, который отдал шляпу первому зрителю. Повторив аналогичную процедуру со всеми остальными зрителями, мы обнаружим, что зрители таким образом разбились на циклы.

В семёрке зрителей, которую выбирает фокусник, не может быть двоих, которые являются соседями в одном цикле. Значит, из каждого цикла мы можем взять половину зрителей, округлённую вниз.

Почему нельзя меньше 22?

Если общее число зрителей меньше 22, то их можно разбить на семь (или меньше) циклов по два или три человека в каждом, ведь любое число имеет вид $3k$, $3k+2$ или $3k+1 = 3(k-1)+2+2$, причём k не больше 7 в первом случае, и не больше 6 во втором и третьем.

Из каждого такого цикла фокусник сможет выбрать максимум одного человека, итого не больше 7.

Почему 22 подходит?

Если зрителей ровно 22, и они разбиваются на 8 или больше циклов, фокусник гарантированно прав. Если же циклов $n < 8$, мы можем выбрать из каждого из них не менее $\dfrac{l-1}{2}$ человек, где l — длина этого цикла. Просуммировав эти числа, мы получим общую длину всех циклов, то есть 22, делённую на 2, минус $\dfrac{n}{2}$, что не больше 3,5. Итого фокусник сможет выбрать не менее $11 - 3,5 = 7,5$ человек, то есть не менее 8.

Вариант 3. Фокусник раздал зрителям разноцветные шляпы, а затем сказал: «Как бы вы не поменялись шляпами, я смогу выбрать шестерых из вас так, что ни один из них не получил шляпу от другого». При каком наименьшем числе зрителей фокусник гарантированно будет прав?

Ответ: 16

Решение: Рассмотрим какого-то одного зрителя. Он отдал шляпу какому-то другому зрителю, тот отдал шляпу третьему и так далее. Продолжая эту последовательность, мы рано или поздно дойдём до человека, который отдал шляпу первому зрителю. Повторив аналогичную процедуру со всеми остальными зрителями, мы обнаружим, что зрители таким образом разбились на циклы.

В семёрке зрителей, которую выбирает фокусник, не может быть двоих, которые являются соседями в одном цикле. Значит, из каждого цикла мы можем взять половину зрителей, округлённую вниз.

Почему нельзя меньше 16?

Если общее число зрителей меньше 16, то их можно разбить на пять (или меньше) циклов по два или три человека в каждом, ведь любое число имеет вид $3k$, $3k+2$ или $3k+1 = 3(k-1)+2+2$, причём k не больше 5 в первом случае, и не больше 4 во втором и третьем.

Из каждого такого цикла фокусник сможет выбрать максимум одного человека, итого не больше 5.

Почему 16 подходит?

Если зрителей ровно 16 и они разбиваются на 6 или больше циклов, фокусник гарантированно прав. Если же циклов $n < 6$, мы можем выбрать из каждого из них не менее $\dfrac{l-1}{2}$ человек, где l — длина этого цикла. Просуммировав эти числа, мы получим общую длину всех циклов, то есть 16, делённую на 2, минус $\frac{n}{2}$, что не больше 2,5. Итого фокусник сможет выбрать не менее $8 - 2,5 = 5,5$ человек, то есть не менее 6.

Задача 8. (5 баллов)

Вариант 1. Дети нарисовали мелками на клетчатой доске 1000×1000 по клеточкам 70000 прямоугольников площади 15 каждый. Прямоугольники могут пересекаться и даже совпадать.

Вася посчитал все клетки, каждая из которых находится внутри хотя бы двух из нарисованных прямоугольников. Какое наименьшее число могло у него получиться?

Ответ: 15

Решение:

Пример: все (или почти все) прямоугольники совпадают, остальные клетки покрыты не более, чем один раз.

Оценка: Пусть таких клеток меньше 15. Это значит, что никакие два из них не совпадают. Из клеток, накрытых более чем одним прямоугольником, каждая накрыта не более, чем 60 другими. Действительно, существует четыре вида прямоугольников площади 15: 1×15, 3×5, 5×3, 15×1. Одну и ту же клетку содержат не больше 15 прямоугольников одного вида.

Итого получаем не более $14 \cdot 60 = 840$ прямоугольников, содержащих эти 14 (или меньше) клеток. Остальные прямоугольники не пересекаются, поэтому их не более, чем $\frac{1000^2}{15} = 66666\frac{2}{3}$.

Значит, суммарное количество прямоугольников меньше 70000. Получаем противоречие, значит, таких клеток не может быть меньше 15.

Вариант 2. Дети нарисовали мелками на клетчатой доске 1000×1000 по клеточкам 50000 прямоугольников площади 21 каждый. Прямоугольники могут пересекаться и даже совпадать.

Вася посчитал все клетки, каждая из которых находится внутри хотя бы двух из нарисованных прямоугольников. Какое наименьшее число могло у него получиться?

Ответ: 21

Решение:

Пример: все (или почти все) прямоугольники совпадают, остальные клетки покрыты не более, чем один раз.

Оценка: Пусть таких клеток меньше 21. Это значит, что никакие два из них не совпадают. Из клеток, накрытых более чем одним прямоугольником, каждая накрыта не более, чем 84 другими. Действительно, существует четыре вида прямоугольников площади 21: 1×21, 3×7, 7×3, 21×1. Одну и ту же клетку содержат не больше 21 прямоугольников одного вида.

Итого получаем не более $20 \cdot 84 = 1680$ прямоугольников, содержащих эти 20 (или меньше) клеток. Остальные прямоугольники не пересекаются, поэтому их не более, чем $\frac{1000^2}{21} = 47619\frac{1}{21}$.

Значит, суммарное количество прямоугольников меньше 50000. Получаем противоречие, значит, таких клеток не может быть меньше 15.

Вариант 3. Дети нарисовали мелками на клетчатой доске 1000×1000 по клеточкам 35000 прямоугольников площади 35 каждый. Прямоугольники могут пересекаться и даже совпадать.

Вася посчитал все клетки, каждая из которых находится внутри хотя бы двух из нарисованных прямоугольников. Какое наименьшее число могло у него получиться?

Ответ: 35

Решение:

Пример: все (или почти все) прямоугольники совпадают, остальные клетки покрыты не более, чем один раз.

Оценка: Пусть таких клеток меньше 35. Это значит, что никакие два из них не совпадают. Из клеток, накрытых более чем одним прямоугольником, каждая накрыта не более, чем 140 другими. Действительно, существует четыре вида прямоугольников площади 35: 1×35, 5×7, 7×5, 35×1. Одну и ту же клетку содержат не больше 35 прямоугольников одного вида.

Итого получаем не более $34 \cdot 140 = 4760$ прямоугольников, содержащих эти 34 (или меньше) клеток. Остальные прямоугольники не пересекаются, поэтому их не более, чем $\dfrac{1000^2}{35} = 28571\frac{3}{7}$.

Значит, суммарное количество прямоугольников меньше 35000. Получаем противоречие, значит, таких клеток не может быть меньше 35.

Замечание Все оценки в этой задаче довольно грубые, поэтому аналогичное утверждение можно доказать и для меньшего числа прямоугольников.

1.1.5 Задания для 5-7 классов

Задача 1. (2 балла)

Вариант 1. На конкурсе шесть судей выставляют свои оценки (целые неотрицательные числа), затем самая большая и самая маленькая оценки отбрасываются, и итоговая оценка участника является суммой оставшихся четырёх оценок. Если самых больших оценок несколько, отбрасывается только одна из них, аналогичное верно и для самой маленькой оценки.

Участник получил от шести судей в сумме 60 баллов. Какое наибольшее число баллов у него могло оказаться после отбрасывания самой большой и самой маленькой оценки?

Ответ: 48

Решение:

Пример: Значение 48 достигается. когда участник получил от пяти судей оценку 12, а от последнего — оценку 0. В этом случае после отбрасывания оценок 0 и 12 у участника остаётся $4 \cdot 12 = 48$ баллов.

Оценка: Больше 48 баллов итоговая оценка быть не может, так как отброшенная наибольшая оценка должна быть не меньше среднего арифметического четырёх оставшихся. Если участник в итоге получил больше 48 баллов, среднее арифметическое четырёх оставшихся не отброшенными оценок составляет больше, чем $48 : 4 = 12$, а значит вместе эти пять оценок дают уже больше, чем $48 + 12 = 60$. Поскольку отброшенная наименьшая оценка неотрицательна, сумма всех шести оценок также больше 60, что противоречит условию.

Вариант 2. На конкурсе семь судей выставляют свои оценки (целые неотрицательные числа), затем самая большая и самая маленькая оценки отбрасываются, и итоговая оценка участника является суммой оставшихся пяти оценок. Если самых больших оценок несколько, отбрасывается только одна из них, аналогичное верно и для самой маленькой оценки.

Участник получил от семи судей в сумме 60 баллов. Какое наибольшее число баллов у него могло оказаться после отбрасывания самой большой и самой маленькой оценки?

Ответ: 50

Решение:

Пример: Значение 50 достигается. когда участник получил от шести судей оценку 10, а от последнего — оценку 0. В этом случае после отбрасывания оценок 0 и 10 у участника остаётся $5 \cdot 10 = 50$ баллов.

Оценка: Больше 50 баллов итоговая оценка быть не может, так как отброшенная наибольшая оценка должна быть не меньше среднего арифметического пяти оставшихся. Если участник в итоге получил больше 50 баллов, среднее арифметическое четырёх оставшихся не отброшенными оценок составляет больше, чем $50 : 5 = 10$, а значит вместе эти пять оценок дают уже больше, чем $50 + 10 = 60$. Поскольку отброшенная наименьшая оценка неотрицательна, сумма всех шести оценок также больше 60, что противоречит условию.

Вариант 3. На конкурсе пять судей выставляют свои оценки (целые неотрицательные числа), затем самая большая и самая маленькая оценки отбрасываются, и итоговая оценка участника является суммой оставшихся трёх оценок. Если самых больших оценок несколько, отбрасывается только одна из них, аналогичное верно и для самой маленькой оценки.

Участник получил от пяти судей в сумме 60 баллов. Какое наибольшее число баллов у него могло оказаться после отбрасывания самой большой и самой маленькой оценки?

Ответ: 45

Решение:

Пример: Значение 45 достигается. когда участник получил от четырёх судей оценку 15, а от последнего — оценку 0. В этом случае после отбрасывания оценок 0 и 15 у участника остаётся $3 \cdot 15 = 45$ баллов.

Оценка: Больше 50 баллов итоговая оценка быть не может, так как отброшенная наибольшая оценка должна быть не меньше среднего арифметического пяти оставшихся. Если участник в итоге получил больше 50 баллов, среднее арифметическое четырёх оставшихся не отброшенными оценок составляет больше, чем $50 : 5 = 10$, а значит вместе эти пять оценок дают уже больше, чем $50 + 10 = 60$. Поскольку отброшенная наименьшая оценка неотрицательна, сумма всех шести оценок также больше 60, что противоречит условию.

Задача 2. (2 балла)

Вариант 1. В филиале корпорации работали начальник и 9 подчинённых. Зарплата начальника была вдвое больше средней зарплаты подчинённых. При очередном повышении зарплаты начальник филиала отчитался о повышении средней зарплаты по филиалу на 20%, при это средняя зарплата подчинённых выросла только на 10%.

На сколько процентов выросла зарплата начальника?

Ответ: На 65%.

Решение: Предположим, подчинённые получали в среднем $10x$ рублей каждый, тогда начальник получал $20x$ рублей, Обшая сумма всех зарплат составляла $9 \cdot 10x + 20x = 110x$.

После повышения суммарная зарплата подчинённых составила $90x \cdot 1,1 = 99x$, а обшая зарплата всех сотрудников филиала увеличилась до $110x \cdot 1,2 = 132x$. Значит, зарплата начальника составила $132x - 99x = 33x$, что составляет 165% от его изначальной зарплата.

Значит, зарплата начальника повысилась на 65%.

Вариант 2. В филиале корпорации работали начальник и 19 подчинённых. Зарплата начальника была вдвое больше средней зарплаты подчинённых. При очередном повышении зарплаты начальник филиала отчитался о повышении средней зарплаты по филиалу на 20%, при это средняя зарплата подчинённых выросла только на 10%.

На сколько процентов выросла зарплата начальника?

Ответ: На 115%.

Решение: Предположим, подчинённые получали в среднем $10x$ рублей каждый, тогда начальник получал $20x$ рублей, Обшая сумма всех зарплат составляла $19 \cdot 10x + 20x = 210x$.

После повышения суммарная зарплата подчинённых составила $190x \cdot 1,1 = 209x$, а обшая зарплата всех сотрудников филиала увеличилась до $210x \cdot 1,2 = 252x$. Значит, зарплата начальника составила $252x - 209x = 43x$, что составляет 215% от его изначальной зарплата.

Значит, зарплата начальника повысилась на 115%.

Вариант 3. В филиале корпорации работали начальник и 24 подчинённых. Зарплата начальника была вдвое больше средней зарплаты подчинённых. При очередном повышении зарплаты начальник филиала отчитался о повышении средней зарплаты по филиалу на 20%, при это средняя зарплата подчинённых выросла только на 10%.

На сколько процентов выросла зарплата начальника?

Ответ: На 140%.

Решение: Предположим, подчинённые получали в среднем $10x$ рублей каждый, тогда начальник получал $20x$ рублей, Обшая сумма всех зарплат составляла $24 \cdot 10x + 20x = 260x$.

После повышения суммарная зарплата подчинённых составила $240x \cdot 1,1 = 264x$, а обшая зарплата всех сотрудников филиала увеличилась до $260x \cdot 1,2 = 312x$. Значит, зарплата начальника составила $312x - 264x = 48x$, что составляет 240% от его изначальной зарплата.

Значит, зарплата начальника повысилась на 140%.

Задача 3. (3 балла)

Вариант 1. В прямоугольнике $ABCD$ выполняются равенства $AB = CD = 4$, $AD = BC = 5$. Точка K на отрезке AD такова, что $AK = 1$. Точка L на отрезке CD такова, что $DL = 1$.

Пользуясь тем, что сумма углов треугольника равна $180°$, найдите $\angle KBL$.

Ответ: $45°$.

Решение: $DK = AD - AK = 5 - 1 = 4$. Получается $AB = DK = 4$, $AK = DL = 1$, $\angle BAK = \angle KDL = 90°$, откуда $\Delta BAK = \Delta KDL$.

Значит, $BK = KL$ и треугольник BKL равнобедренный.

Заметим, что $\angle BKL = 180° - \angle AKB - \angle DKL = 180° - \angle DLK - \angle DKL = \angle KDL = 90°$. (Первое равенство верно, поскольку $\angle BKL$, $\angle AKB$ и $\angle DKL$ в сумме образуют развёрнутый, второе следует из доказанного выше равенства треугольников, а третье из того, что сумма углов треугольника равна $180°$)

Значит, треугольник BKL равнобедренный с углом $\angle BKL = 90°$, откуда остальные два угла этого треугоьльника равны по $45°$.

Вариант 2. В прямоугольнике $ABCD$ выполняются равенства $AB = CD = 6$, $AD = BC = 5$. Точка K на отрезке AB такова, что $AK = 1$. Точка L на отрезке BC такова, что $BL = 1$.

Пользуясь тем, что сумма углов треугольника равна $180°$, найдите $\angle KDL$.

Ответ: $45°$.

Решение: $BK = AB - AK = 6 - 1 = 5$. Получается $AD = BK = 4$, $AK = BL = 1$, $\angle DAK = \angle KBL = 90°$, откуда $\Delta DAK = \Delta KBL$.

Значит, $DK = KL$ и треугольник DKL равнобедренный.

Заметим, что $\angle DKL = 180° - \angle AKD - \angle BKL = 180° - \angle BLK - \angle BKL = \angle KBL = 90°$. (Первое равенство верно, поскольку $\angle DKL$, $\angle AKD$ и $\angle BKL$ в сумме образуют развёрнутый, второе следует из доказанного выше равенства треугольников, а третье из того, что сумма углов треугольника равна $180°$)

Значит, треугольник BKL равнобедренный с углом $\angle DKL = 90°$, откуда остальные два угла этого треугоьльника равны по $45°$.

Вариант 3. В прямоугольнике $ABCD$ выполняются равенства $AB = CD = 7$, $AD = BC = 5$. Точка K на отрезке CD такова, что $CK = 2$. Точка L на отрезке AD такова, что $DL = 2$.

Пользуясь тем, что сумма углов треугольника равна 180°, найдите $\angle KBL$.

Ответ: 45°.

Решение: $DK = CD - CK = 7 - 2 = 5$. Получается $CB = DK = 5$, $CK = DL = 2$, $\angle BCK = \angle KDL = 90^\circ$, откуда $\Delta BCK = \Delta KDL$.

Значит, $BK = KL$ и треугольник BKL равнобедренный.

Заметим, что $\angle BKL = 180^\circ - \angle CKB - \angle DKL = 180^\circ - \angle DLK - \angle DKL = \angle KDL = 90^\circ$. (Первое равенство верно, поскольку $\angle BKL$, $\angle CKB$ и $\angle DKL$ в сумме образуют развёрнутый, второе следует из доказанного выше равенства треугольников, а третье из того, что сумма углов треугольника равна 180°)

Значит, треугольник BKL равнобедренный с углом $\angle BKL = 90^\circ$, откуда остальные два угла этого треугоьльника равны по 45°.

Задача 4. (3 балла)

Вариант 1. У Алисы и Боба есть палочка длиной один метр. С помощью этой палочки они играют в игру, первой ходит Алиса. В свой ход игрок может сломать одну из имеющихся палочек на две части меньшего размера. Игра заканчивается, когда остаётся ровно 125 палочек.

Алиса хочет, чтобы из каких-то трёх палочек в конце игры можно было составить треугольник, Боб хочет ей помешать.

Кто из них может выиграть вне зависимости от действий соперника?

Ответ: Алиса.

Решение: Приведём выигрышную стратегию для Алисы.

Первым ходом Алиса ломает палочку пополам. У неё получаются две палочки одинаковой длины. Каждым своим следующим ходом Алиса будет добиваться того, чтобы все имеющиеся палочки разбивались на пары палочек одинаковой длины. Для этого она будет брать палочку той же длины, что только что сломал Боб и делить её на две палочки точно так же, как он.

После последнего хода Алисы остаётся 62 пары палочек. Боб своим последним ходом ломает одну из палочек, но 61 пара палочек всё ещё остаётся.

На самом деле, даже двух пар равных палочек достаточо, чтобы получить треугольник. Действительно, рассмотрим пару самых длинных палочек. Мы можем составить треугольник используя эту пару и любую палочку меньшей длины.

Вариант 2. У Алисы и Боба есть палочка длиной один метр. С помощью этой палочки они играют в игру, первой ходит Алиса. В свой ход игрок может сломать одну из имеющихся палочек на две части меньшего размера. Игра заканчивается, когда остаётся ровно 99 палочек.

Алиса хочет, чтобы из каких-то трёх палочек в конце игры можно было составить треугольник, Боб хочет ей помешать.

Кто из них может выиграть вне зависимости от действий соперника?

Ответ: Алиса.

Решение: Приведём выигрышную стратегию для Алисы.

Первым ходом Алиса ломает палочку пополам. У неё получаются две палочки одинаковой длины. Каждым своим следующим ходом Алиса будет добиваться того, чтобы все имеющиеся палочки разбивались на пары палочек одинаковой длины. Для этого она будет брать палочку той же длины, что только что сломал Боб и делить её на две палочки точно так же, как он.

После последнего хода Алисы остаётся 44 пары палочек. Боб своим последним ходом ломает одну из палочек, но 43 пары палочек всё ещё остаётся.

На самом деле, даже двух пар равных палочек достаточо, чтобы получить треугольник. Действительно, рассмотрим пару самых длинных палочек. Мы можем составить треугольник используя эту пару и любую палочку меньшей длины.

Вариант 3. У Алисы и Боба есть палочка длиной один метр. С помощью этой палочки они играют в игру, первой ходит Алиса. В свой ход игрок может сломать одну из имеющихся палочек на две части меньшего размера. Игра заканчивается, когда остаётся ровно 77 палочек.

Алиса хочет, чтобы из каких-то трёх палочек в конце игры можно было составить треугольник, Боб хочет ей помешать.

Кто из них может выиграть вне зависимости от действий соперника?

Ответ: Алиса.

Решение: Приведём выигрышную стратегию для Алисы.

Первым ходом Алиса ломает палочку пополам. У неё получаются две палочки одинаковой длины. Каждым своим следующим ходом Алиса будет добиваться того, чтобы все имеющиеся палочки разбивались на пары палочек одинаковой длины. Для этого она будет брать палочку той же длины, что только что сломал Боб и делить её на две палочки точно так же, как он.

После последнего хода Алисы остаётся 38 пар палочек. Боб своим последним ходом ломает одну из палочек, но 37 пар палочек всё ещё остаётся.

На самом деле, даже двух пар равных палочек достаточо, чтобы получить треугольник. Действительно, рассмотрим пару самых длинных палочек. Мы можем составить треугольник используя эту пару и любую палочку меньшей длины.

Задача 5. (3 балла)

Вариант 1. Клетчатая доска 9×9 раскрашена в два цвета в шахматном порядке. На ней стоят *чётные ладьи* — фигуры, которые бьют по горизонтали и вертикали, но только поля того цвета, на котором находятся. Чётная ладья может бить поля своего цвета сквозь другую чётную ладью, находящуюся на поле другого цвета.

Какое наибольшее количество чётных ладей можно расставить на такой доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 17

Решение: Пронумеруем клетки доски как показано на рисунке:

1	2	1	2	...	1
3	4	3	4	...	3
1	2	1	2	...	1
3	4	3	4	...	3
...	...	...	...	...	...
3	4	3	4	...	3
1	2	1	2	...	1

Таким образом, белые клетки пронумерованы цифрами 1 и 4, а чёрные — цифрами 2 и 3. Можно заметить, что бьют друг друга только чётные ладьи, стоящие на клетках, пронумерованных одной цифрой. Клетки, пронумерованные 1, стоят не пересечении пяти строк и пяти столбцов. На них можно поставить максимум 5 ладей. Клетки, пронумерованные 2, стоят на пересечении пяти строк и четырёх столбцов. На них можно поставить максимум 4 ладьи. Клетки, пронумерованные 3, стоят на пересечении четырёх строк и пяти столбцов. На них можно поставить максимум 4 ладьи. Клетки, пронумерованные 4, стоят на пересечении четырёх строк и четырёх столбцов. На них можно поставить максимум 4 ладьи. Итого максимум 17 ладей.

Пример очевидно следует из оценки. Достаточно расставить ладей на главной диагонали и на диагонали сразу под ней.

Вариант 2. Клетчатая доска 11×11 раскрашена в два цвета в шахматном порядке. На ней стоят *чётные ладьи* — фигуры, которые бьют по горизонтали и вертикали, но только поля того цвета, на котором находятся. Чётная ладья может бить поля своего цвета сквозь другую чётную ладью, находящуюся на поле другого цвета.

Какое наибольшее количество чётных ладей можно расставить на такой доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 21

Решение: Пронумеруем клетки доски как показано на рисунке в вар. 1.

Таким образом, белые клетки пронумерованы цифрами 1 и 4, а чёрные — цифрами 2 и 3. Можно заметить, что бьют друг друга только чётные ладьи, стоящие на клетках, пронумерованных одной цифрой. Клетки, пронумерованные 1, стоят на пересечении шести строк и шести столбцов. На них можно поставить максимум 6 ладей. Клетки, пронумерованные 2, стоят на пересечении шести строк и пяти столбцов. На них можно поставить максимум 5 ладей. Клетки, пронумерованные 3, стоят на пересечении пяти строк и шести столбцов. На них можно поставить максимум 5 ладей. Клетки, пронумерованные 4, стоят на пересечении пяти строк и пяти столбцов. На них можно поставить максимум 5 ладей. Итого максимум 21 ладья.

Пример очевидно следует из оценки. Достаточно расставить ладей на главной диагонали и на диагонали сразу под ней.

Вариант 3. Клетчатая доска 13×13 раскрашена в два цвета в шахматном порядке. На ней стоят *чётные ладьи* — фигуры, которые бьют по горизонтали и вертикали, но только поля того цвета, на котором находятся. Чётная ладья может бить поля своего цвета сквозь другую чётную ладью, находящуюся на поле другого цвета.

Какое наибольшее количество чётных ладей можно расставить на такой доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 25

Решение: Пронумеруем клетки доски как показано на рисунке в вар. 1.

Таким образом, белые клетки пронумерованы цифрами 1 и 4, а чёрные — цифрами 2 и 3. Можно заметить, что бьют друг друга только чётные ладьи, стоящие на клетках, пронумерованных одной цифрой. Клетки, пронумерованные 1, стоят на пересечении семи строк и семи столбцов. На них можно поставить максимум 7 ладей. Клетки, пронумерованные 2, стоят на пересечении семи строк и шести столбцов. На них можно поставить максимум 6 ладей. Клетки, пронумерованные 3, стоят на пересечении шести строк и семи столбцов. На них можно поставить максимум 6 ладей. Клетки, пронумерованные 4, стоят на пересечении шести строк и шести столбцов. На них можно поставить максимум 6 ладей. Итого максимум 25 ладей.

Пример очевидно следует из оценки. Достаточно расставить ладей на главной диагонали и на диагонали сразу под ней.

Задача 6. (4 балла)

Вариант 1. Найдите наибольшее натуральное число, для которого сумма остатка и неполного частного при делении на 19 не больше, чем сумма остатка и неполного частного при делении на 20.

Ответ: $6859 = 19^3$

Решение: Обозначим искомое число за N и запишем формулы для деления с остатком: $N = 19a + b = 20c + d$, где $b < 19$, $d < 20$. Кроме того, по условию должно выполнятся неравенство $a + b \leqslant c + d$.

Случай $a = c = 0$ нам не интересен, так как N получается не больше 18. Заметим, что если $a = c > 0$, то из равенства для N мы получаем, что $b > d$, а из неравенства получаем, что $b \leqslant d$. Значит, $a > c$, откуда $b < d$.

Обозначим $a = c + x$. Тогда получаем $19(c + x) + b = 20c + d$, откуда $d - b = 19x - c$. С другой стороны, из неравенства в условии получаем, что $d - b \geqslant a - c = x$. Из того, что $d \leqslant 19$ и $b \geqslant 0$, получаем, что $x \leqslant d - b \leqslant 19$. Соответственно $c = 19x - (d - b) \leqslant 18(d - b) \leqslant 18 \cdot 19 = 342$.

Значит, $N = 20c + d \leqslant 20 \cdot 342 + 19 = 6859$.

Вариант 2. Найдите наибольшее натуральное число, для которого сумма остатка и неполного частного при делении на 29 не больше, чем сумма остатка и неполного частного при делении на 30.

Ответ: $24389 = 29^3$

Решение: Обозначим искомое число за N и запишем формулы для деления с остатком: $N = 29a + b = 30c + d$, где $b < 29$, $d < 30$. Кроме того, по условию должно выполнятся неравенство $a + b \leqslant c + d$.

Случай $a = c = 0$ нам не интересен, так как N получается не больше 28. Заметим, что если $a = c > 0$, то из равенства для N мы получаем, что $b > d$, а из неравенства получаем, что $b \leqslant d$. Значит, $a > c$, откуда $b < d$.

Обозначим $a = c + x$. Тогда получаем $29(c + x) + b = 30c + d$, откуда $d - b = 29x - c$. С другой стороны, из неравенства в условии получаем, что $d - b \geqslant a - c = x$. Из того, что $d \leqslant 29$ и $b \geqslant 0$, получаем, что $x \leqslant d - b \leqslant 29$. Соответственно $c = 29x - (d - b) \leqslant 28(d - b) \leqslant 28 \cdot 29 = 912$.

Значит, $N = 30c + d \leqslant 30 \cdot 912 + 29 = 24389$.

Вариант 3. Найдите наибольшее натуральное число, для которого сумма остатка и неполного частного при делении на 24 не больше, чем сумма остатка и неполного частного при делении на 25.

Ответ: $13824 = 24^3$

Решение: Обозначим искомое число за N и запишем формулы для деления с остатком: $N = 24a + b = 25c + d$, где $b < 24$, $d < 25$. Кроме того, по условию должно выполнятся неравенство $a + b \leqslant c + d$.

Случай $a = c = 0$ нам не интересен, так как N получается не больше 23. Заметим, что если $a = c > 0$, то из равенства для N мы получаем, что $b > d$, а из неравенства получаем, что $b \leqslant d$. Значит, $a > c$, откуда $b < d$.

Обозначим $a = c + x$. Тогда получаем $24(c + x) + b = 25c + d$, откуда $d - b = 24x - c$. С другой стороны, из неравенства в условии получаем, что $d - b \geqslant a - c = x$. Из того, что $d \leqslant 24$ и $b \geqslant 0$, получаем, что $x \leqslant d - b \leqslant 24$. Соответственно $c = 24x - (d - b) \leqslant 23(d - b) \leqslant 23 \cdot 24 = 552$.

Значит, $N = 25c + d \leqslant 25 \cdot 552 + 24 = 13824$.

Задача 7. (4 балла)

Вариант 1. На Острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут (есть и те, и другие). У каждого из низ ровно четыре друга. Однажды каждый сказал: «Среди моих друзей ровно два рыцаря».

Какое наименьшее и наибольшее количество рыцарей может быть на острове, если там живут всего 32 человека?

Ответ: Наименьшее число 3, наибольшее — 21.

Решение:

Наименьшее число. Оценка: Поскольку и те, и другие присутствуют, есть хотя бы один рыцарь. У него есть ровно двое друзей, поэтому рыцарей минимум трое.

Наименьшее число. Пример: Рассмотрим трёх рыцарей и 29 лжецов. Пусть три рыцаря дружат между собой, у каждого из них есть ещё 2 друга, пусть это будут шестеро различных лжецов. Разобьём их на две тройки и сделаем так, чтобы дружили между собой лжецы из разных троек.

Остальных лжецов посадим за круглый стол и скажем, что каждый лжец должен дружить с двумя следующими и двумя предыдущими по часовой стрелке.

Наибольшее число. Оценка: Пусть рыцарей хотя бы 22. У каждого из них ровно двое знакомых лжецов, итого мы получаем хотя бы 44 знакомства между рыцарями и лжецами. У каждого лжеца не более 4 таких знакомств, значит, лжецов не менее 11 и всего человек не менее 33.

Наибольшее число. Пример: Посадим 21 рыцаря за круглый стол и скажем, пусть каждый дружит с двумя своими соседями. Также занумеруем рыцарей числами от 1 до 21.

Пусть первый лжец дружит с рыцарями 1, 2, 3 и 4, второй — с рыцарями 3, 4, 5, и 6, и т.д., девятый лжец дружит с рыцарями 17, 18, 19, 20. Десятый лжец будет дружит с рыцарями 1, 2 и 21, одиннадцатый — с рыцарями 19, 20 и 21, кроме того эти двое лжецов будут дружить друг с другом.

Вариант 2. На Острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут (есть и те, и другие). У каждого из низ ровно четыре друга. Однажды каждый сказал: «Среди моих друзей ровно два рыцаря».

Какое наименьшее и наибольшее количество рыцарей может быть на острове, если там живут всего 44 человека?

Ответ: Наименьшее число 3, наибольшее — 29.

Решение:

Наименьшее число. Оценка: Поскольку и те, и другие присутствуют, есть хотя бы один рыцарь. У него есть ровно двое друзей, поэтому рыцарей минимум трое.

Наименьшее число. Пример: Рассмотрим трёх рыцарей и 41 лжеца. Пусть три рыцаря дружат между собой, у каждого из них есть ещё 2 друга, пусть это будут шестеро различных лжецов. Разобьём их на две тройки и сделаем так, чтобы дружили между собой лжецы из разных троек.

Остальных лжецов посадим за круглый стол и скажем, что каждый лжец должен дружить с двумя следующими и двумя предыдущими по часовой стрелке.

Наибольшее число. Оценка: Пусть рыцарей хотя бы 30. У каждого из них ровно двое знакомых лжецов, итого мы получаем хотя бы 60 знакомств между рыцарями и лжецами. У каждого лжеца не более 4 таких знакомств, значит, лжецов не менее 15 и всего человек не менее 45.

Наибольшее число. Пример: Посадим 29 рыцарей за круглый стол и скажем, пусть каждый дружит с двумя своими соседями. Также занумеруем рыцарей числами от 1 до 29.

Пусть первый лжец дружит с рыцарями 1, 2, 3 и 4, второй — с рыцарями 3, 4, 5, и 6, и т.д., тринадцатый лжец дружит с рыцарями 25, 26, 27, 28. Десятый лжец будет дружит с рыцарями 1, 2 и 29, одиннадцатый — с рыцарями 27, 28 и 29, кроме того эти двое лжецов будут дружить друг с другом.

Вариант 3. На Острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут (есть и те, и другие). У каждого из низ ровно четыре друга. Однажды каждый сказал: «Среди моих друзей ровно два рыцаря».

Какое наименьшее и наибольшее количество рыцарей может быть на острове, если там живут всего 26 человек?

Ответ: Наименьшее число 3, наибольшее — 17.

Решение:

Наименьшее число. Оценка: Поскольку и те, и другие присутствуют, есть хотя бы один рыцарь. У него есть ровно двое друзей, поэтому рыцарей минимум трое.

Наименьшее число. Пример: Рассмотрим трёх рыцарей и 23 лжецов. Пусть три рыцаря дружат между собой, у каждого из них есть ещё 2 друга, пусть это будут шестеро различных лжецов. Разобьём их на две тройки и сделаем так, чтобы дружили между собой лжецы из разных троек.

Остальных лжецов посадим за круглый стол и скажем, что каждый лжец должен дружить с двумя следующими и двумя предыдущими по часовой стрелке.

Наибольшее число. Оценка: Пусть рыцарей хотя бы 18. У каждого из них ровно двое знакомых лжецов, итого мы получаем хотя бы 36 знакомств между рыцарями и лжецами. У каждого лжеца не более 4 таких знакомств, значит, лжецов не менее 9 и всего человек не менее 27.

Наибольшее число. Пример: Посадим 17 рыцарей за круглый стол и скажем, пусть каждый дружит с двумя своими соседями. Также занумеруем рыцарей числами от 1 до 17.

Пусть первый лжец дружит с рыцарями 1, 2, 3 и 4, второй — с рыцарями 3, 4, 5, и 6, и т.д., седьмой лжец дружит с рыцарями 13, 14, 15, 16. Десятый лжец будет дружит с рыцарями 1, 2 и 17, одиннадцатый — с рыцарями 15, 16 и 17, кроме того эти двое лжецов будут дружить друг с другом.

Задача 8. (5 баллов)

Вариант 1. Натуральные числа a, b и c таковы, что $ab+bc+ac=p$ — простое и b^2+c^2 делится на p. Найдите все возможные значения a, b, c и p.

Ответ: $p=5$, $a=b=1$, $c=2$ или $p=5$, $a=c=1$, $b=2$.

Решение: Заметим, что

$$b^2+p=b^2+ab+bc+ac=(a+b)(b+c), \quad c^2+p=c^2+ab+bc+ac=(a+c)(b+c),$$

откуда, складывая, имеем

$$b^2+c^2+2p=(a+c)(b+c)+(a+b)(b+c)=(b+c)(2a+b+c).$$

Левая часть делится на p, значит, и правая тоже. Так как p — простое, на него делится один из множителей. Это не может быть $b+c$, так как $b+c<ab+bc+ac$. Значит, $2a+b+c$ делится на $ab+bc+ac$.

Если $b\geqslant 2$, получаем $2a\leqslant ab$, $b\leqslant bc$ и $c\leqslant ac$, поэтому сумма $2a+b+c$ не больше суммы $ab+bc+ac$ и может на неё делится только если эти суммы равны, то есть равны соответствующие слагаемые. Значит, $b=2$, $c=1$, $a=1$, $p=ab+bc+ac=5$.

Аналогично разбираемся с $c\geqslant 2$ и находим решение $c=2$, $b=1$, $a=1$, $p=ab+bc+ac=$ $=5$.

Если же $b=c=1$, получаем $b^2+c^2=2$, при этом $p=2a+1\geqslant 3$, значит этот случай невозможен.

Вариант 2. Натуральные числа a, b и c таковы, что $ab+bc+ac=p$ — простое и a^2+c^2 делится на p. Найдите все возможные значения a, b, c и p.

Ответ: $p=5$, $a=b=1$, $c=2$ или $p=5$, , $a=2$, $b=c=1$.

Решение: Заметим, что

$$a^2+p=a^2+ab+bc+ac=(a+b)(a+c), \quad c^2+p=c^2+ab+bc+ac=(a+c)(b+c),$$

откуда, складывая, имеем

$$a^2+c^2+2p=(a+c)(a+b)+(a+c)(b+c)=(a+c)(a+2b+c).$$

Левая часть делится на p, значит, и правая тоже. Так как p — простое, на него делится один из множителей. Это не может быть $a+c$, так как $a+c < ab+bc+ac$. Значит, $a+2b+c$ делится на $ab+bc+ac$.

Если $a \geqslant 2$, получаем $a \leqslant ac$, $2b \leqslant ab$ и $c \leqslant bc$, поэтому сумма $2a+b+c$ не больше суммы $ab+bc+ac$ и может на неё делится только если эти суммы равны, то есть равны соответствующие слагаемые. Значит, $c=1$, $a=2$, $b=1$, $p=ab+bc+ac=5$.

Аналогично разбираемся с $c \geqslant 2$ и находим решение $c=2$, $b=1$, $a=1$, $p=ab+bc+ac==5$.

Если же $a=c=1$, получаем $a^2+c^2=2$, при этом $p=2b+1 \geqslant 3$, значит этот случай невозможен.

Вариант 3. Натуральные числа a, b и c таковы, что $ab+bc+ac=p$ — простое и a^2+b^2 делится на p. Найдите все возможные значения a, b, c и p.

Ответ: $p=5$, $b=c=1$, $a=2$ или $p=5$, $a=c=1$, $b=2$

Решение: Заметим, что

$$a^2+p=a^2+ab+bc+ac=(a+b)(a+c), \quad b^2+p=b^2+ab+bc+ac=(a+b)(b+c),$$

откуда, складывая, имеем

$$a^2+b^2+2p=(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)=(a+b)(a+b+2c).$$

Левая часть делится на p, значит, и правая тоже. Так как p — простое, на него делится один из множителей. Это не может быть $a+b$, так как $a+b < ab+bc+ac$. Значит, $a+b+2c$ делится на $ab+bc+ac$.

Если $b \geqslant 2$, получаем $b \leqslant ab$, $2c \leqslant bc$ и $a \leqslant ac$, поэтому сумма $2c+b+c$ не больше суммы $ab+bc+ac$ и может на неё делится только если эти суммы равны, то есть равны соответствующие слагаемые. Значит, $a=1$, $b=2$, $c=1$, $p=ab+bc+ac=5$.

Аналогично разбираемся с $a \geqslant 2$ и находим решение $a=2$, $b=1$, $c=1$, $p=ab+bc+ac==5$.

Если же $b=c=1$, получаем $a^2+b^2=2$, при этом $p=2c+1 \geqslant 3$, значит этот случай невозможен.

1.2 Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады

1.2.1 Задания для 11 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)
Для какого натурального числа n от 1 до 10100 дробная часть $\sqrt{n}$ наибольшая?
Ответ: 9999

Задача 2. (2 балла)
Даны непрерывные дифференцируемые функции $f(x)$ и $g(x) = e^{7x}f(x)$. $f(0) = 8$, $g'(0) = 9$. Найдите $f'(0)$.
Ответ: -47

Задача 3. (3 балла)
На высоте BH остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и BC в точках K и L соответственно. $BH = 600$, $BK = 480$, $BL = 576$. Найдите KL.
Ответ: 480

Задача 4. (3 балла)
Многочлен $P(x) = x^{100} + 7x^{99} + 39x^{98} + \ldots + 14x^2 + 14x + 7$ имеет 100 различных вещественных корней x_1, x_2, ... x_{100}. Матвей просуммировал числа, обратные их попарным произведениям, т.е. числа вида $\dfrac{1}{x_i x_j}$, где $i < j$. Что у него получилось?
Ответ: 2

Задача 5. (3 балла)
Найдите площадь конечного участка плоскости, ограниченного кривыми $y = 100x^2$, $y = -\dfrac{\sqrt{x}}{10}$ и отрезком, соединяющим точки $(2, 400)$ и $(400, -2)$.
Ответ: 80002

Задача 6. (3 балла)
Сфера S касается всех четырёх боковых граней четырёхугольной пирамиды $ABCDE$, все рёбра которой равны 30, а центр сферы точка O находится на основании пирамиды $ABCD$.
Куб $KLMNPQRT$ таков, что точки K, L, M и N лежат в плоскости $ABCD$, а остальные вершины — на сфере S.
Найдите площадь поверхности куба.
Ответ: 600

Задача 7. (3 балла)
Последовательность a_n такова, что $a_0 = \dfrac{1}{2}$, а каждый следующий член равен целой части суммы величин, обратных предыдущим членам. Найдите a_{500498}.
Ответ: 1000

Задача 8. (3 балла)
Найдите простые числа p и q, удовлетворяющие равенству $p^3 + 110p = q^3 - 4q$.
В ответе укажите число $p \cdot q$.
Ответ: 323

Задача 9. (4 балла)

На карусели три места. Школьники, общим числом 10, хотят покататься на карусели так, чтобы каждые двое прокатились вместе хотя бы по разу. Какое наименьшее число поездок на карусели им потребуется?

Ответ: 17

Задача 10. (4 балла)

Из клетчатой доски 61×61 вырезали клетки, находящиеся на пересечении строк и столбцов с чётными номерами. Какое наибольшее количество уголков из трёх клеток можно одновременно вырезать из оставшейся части?

Ответ: 930

1.2.2 Задания для 10 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

На плоскости даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, длины которых не меньше 3. Известно, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 9$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 6$, $\vec{b} + \vec{c} \parallel \vec{a}$. Какое наибольшее значение может принимать $\vec{b} \cdot \vec{c}$?

Ответ: 6

Задача 2. (2 балла)

В арифметической прогрессии с разностью 198 сумма первых 100 членов равна следующему члену. Чему равен первый член прогрессии?

Ответ: -9700

Задача 3. (3 балла)

Антон нашёл 36 натуральных чисел x, меньших 109 и таких, что $x^{36} - 63$ делится на 109, и посчитал произведение всех найденных чисел. Найдите остаток от деления полученного произведения на 109.

Ответ: 46

Задача 4. (3 балла)

Дан треугольник ABC, $\angle ACB = 79°$, $AC = 5$. На сторонах AB и BC отмечены точки M и N так, что $\angle BAN = 19°$, а $AM = AC$. Найдите периметр треугольника AMC, если известно, что $\angle BMN = 79°$.

Ответ: 15

Задача 5. (3 балла)

На диагонали BD трапеции $ABCD$ как на диаметре, построена окружность. Прямая AB второй раз пересекает эту окружность в точке K. $AB = 625$, $BD = 1000$, $AD = 975$. Найдите KD.

Ответ: 936

Задача 6. (3 балла)

Из клетчатой доски 10×10 вырезали угловой квадрат 5×5. Сколькими способами на оставшейся части доски можно поставить 9 ладей так, чтобы они не били друг друга, но при этом били все остальные клетки.

(Число может быть довольно большим, для вычислений можно использовать калькулятор).

Ответ: 360000

Задача 7. (3 балла)

Натуральные числа a и b не делятся друг на друга и НОК(a, b) имеет ровно 200 натуральных делителей. Какое наибольшее число натуральных делителей может иметь число a?

Ответ: 198

Задача 8. (3 балла)

Два квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $p(x) = f(g(x)) - g(f(x))$ и $q(x) = f(x) + g(x)$ также квадратные трёхчлены. Известно, что $p(0) = 6$, $q(0) = 4$, $f(0) - g(0) = 3$. Найдите $q(4)$.

Ответ: -4

Задача 9. (4 балла)

Школьники учатся в различных кружках. В каждом кружке учатся 9 человек. У любых двух кружков не меньше 3 общих учеников. Каждый школьник учится хотя бы в одном кружке, но ни один школьник не учится больше чем в трёх кружках.

Какое наибольшее число учеников может быть в школе?

Ответ: 21

Задача 10. (4 балла)

Натуральные числа x_1, x_2, x_3, x_4 таковы, что $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4} = \dfrac{1}{2}$. Какое наибольшее значение может принимать сумма $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$?

Ответ: 1859

1.2.3 Задания для 9 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Прямые, заданные уравнениями $y = ax + b$, $y = bx + c$ и $y = cx + a$, образуют три точки пересечения.

Абсциссы двух из них составляют $\dfrac{1}{21}$ и 3. Найдите абсциссу третьей.

Ответ: -7

Задача 2. (2 балла)

Решите уравнение в целых числах: $25m^2 - 80mn + 63n^2 = 0$, где m и n взаимно просты.

В ответе укажите число m.

Если правильных ответов несколько, введите их в любом порядке через запятую.

Ответ: -9, -7, 7, 9

Задача 3. (3 балла)

Внутри квадрата (не в вершинах и не на сторонах) отметили 18 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

Некоторые из них соединили друг с другом и с вершинами квадрата, в результате чего квадрат оказался разбит на треугольники с вершинами в отмеченных точках и вершинах квадрата.

Сколько провели отрезков?

Ответ: 55

Задача 4. (3 балла)

Дан треугольник ABC, $\angle ACB = 79°$, $AC = 5$. На сторонах AB и BC отмечены точки M и N так, что $\angle BAN = 19°$, а $AM = AC$. Найдите периметр треугольника AMC, если известно, что $\angle BMN = 79°$.

Ответ: 15

Задача 5. (3 балла)

На диагонали BD трапеции $ABCD$ как на диаметре, построена окружность. Прямая AB второй раз пересекает эту окружность в точке K. $AB = 50$, $BD = 85$, $AD = 105$. Найдите KD.

Ответ: 84

Задача 6. (3 балла)

Из клетчатой доски 10×10 вырезали угловой квадрат 5×5. Сколькими способами на оставшейся части доски можно поставить 9 ладей так, чтобы они не били друг друга, но при этом били все остальные клетки.

(Число может быть довольно большим, для вычислений можно использовать калькулятор).

Ответ: 360000

Задача 7. (3 балла)

Натуральные числа a и b не делятся друг на друга и НОК(a, b) имеет ровно 200 натуральных делителей. Какое наибольшее число натуральных делителей может иметь число a?

Ответ: 198

Задача 8. (3 балла)

Два квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $p(x) = f(g(x)) - g(f(x))$ и $q(x) = f(x) + g(x)$ также квадратные трёхчлены. Известно, что $p(0) = 6$, $q(0) = 4$, $f(0) - g(0) = 3$. Найдите $q(4)$.

Ответ: -4

Задача 9. (4 балла)

Натуральные числа x_1, x_2, x_3 таковы, что $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{1}{5}$. Какое наибольшее значение может принимать сумма $x_1 + x_2 + x_3$?

Ответ: 967

Задача 10. (4 балла)

В каждом кружке учатся 9 человек. У любых двух кружков не меньше 3 общих учеников. Каждый школьник учится хотя бы в одном кружке, но ни один школьник не учится больше чем в трёх кружках.

Какое наибольшее число учеников может быть в школе?

Ответ: 21

1.2.4 Задания для 8 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Отрезки AC и BD пересекаются в точке X. Оказалось, что $\angle DAC = \angle CBD$ и $AX = BX = 5$. $AC = 9$. Найдите длину отрезка DX.

Ответ: 4

Задача 2. (2 балла)

В каждой клетке квадрата 3×3 стоит рыцарь (который всегда говорит правду) или лжец (который всегда лжёт). Каждый из них сказал: «На соседних клетках стоят хотя бы три лжеца».

Сколько всего на самом деле может быть лжецов?

Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.

Если правильных ответов несколько, введите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 5,8

Задача 3. (3 балла)

Прямые, заданные уравнениями $y = ax + b$, $y = bx + c$ и $y = cx + a$, образуют три точки пересечения.

Абсциссы двух из них составляют $\dfrac{1}{10}$ и 5. Найдите абсциссу третьей.

Ответ:-2

Задача 4. (3 балла)

Решите уравнение в целых числах: $25m^2 - 80mn + 63n^2 = 0$, где m и n взаимно просты. В ответе укажите число m.

Если правильных ответов несколько, введите их в любом порядке через запятую.

Ответ: -9, -7, 7, 9

Задача 5. (3 балла)

Из точки D на стороне $AB = 10$ равностороннего треугольника ABC опустили перпендикуляры DK и DL на стороны AC и BC соответственно. Найдите $CK + CL$.

Ответ: 15

Задача 6. (3 балла)

Три велосипедиста выехали из одной точки на круглой трассе. Андрей и Боря поехали в разные стороны с одинаковой скоростью, а Вова со вчетверо большей скоростью поехал туда же, куда и Андрей.

Вова встретил Борю через 24 минуты. Через сколько минут после этого Вова нагонит Андрея?

Ответ: 16

Задача 7. (3 балла)

Внутри квадрата (не в вершинах и не на сторонах) отметили 8 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

Некоторые из них соединили друг с другом и с вершинами квадрата, в результате чего квадрат оказался разбит на треугольники с вершинами в отмеченных точках и вершинах квадрата.

Сколько провели отрезков?

Ответ: 25

Задача 8. (3 балла)

В таблице 8×8 расставлены натуральные числа так, что суммы чисел в каждой строке одинаковы, а во всех столбцах различны.

Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 96

Задача 9. (4 балла)

Натуральные числа a и b таковы, что НОК$(a, b)+$ НОД$(a, b) = a + b + 14$.

Найдите НОК(a, b). Если возможных вариантов несколько, укажите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 24, 30, 42

Задача 10. (5 баллов)

Натуральные числа x_1, x_2, x_3 таковы, что $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3} = \frac{1}{5}$. Какое наибольшее значение может принимать сумма $x_1 + x_2 + x_3$?

Ответ: 967

1.2.5 Задания для 5-7 классов

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Найдите наименьшее пятизначное натуральное число, которое само не делится на 3, но при этом из него можно вычеркнуть одну цифру так, чтобы полученное число делилось на три.

Числа не могут начинаться на 0, поэтому, если вторая цифра 0, первую вычёркивать нельзя.

Ответ: 10012

Задача 2. (3 балла)

Соседи Вася, Петя и Коля собирали деньги на дорогу, ведущую в их деревню. Они вложили поровну денег, при этом Вася потратил 20% своих денег, Петя 50% своих, а Коля — 75% своих.

Сколько процентов от общей суммы своих денег потратили три соседа вместе?

Ответ: 36

Задача 3. (3 балла)

В каждой клетке квадрата 3×3 стоит рыцарь (который всегда говорит правду) или лжец (который всегда лжёт). Каждый из них сказал: «На соседних клетках стоят хотя бы три лжеца».

Сколько всего на самом деле может быть лжецов?

Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.

Если правильных ответов несколько, введите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 5,8

Задача 4. (3 балла)

У Васи есть электронные часы, которые показывают время в 12-часовом формате (от 01:00 до 12:59, время всегда записывается четырьмя цифрами). В какой-то момент он посмотрел на часы и обнаружил на них четыре разные цифры. В следующий раз он увидел те же самые четыре цифры, но каждая из них теперь оказалась на другом месте. Какое наименьшее число минут могло пройти между этими событиями?

Ответ: 35

Задача 5. (3 балла)

Отрезки AC и BD пересекаются в точке X. Оказалось, что $\angle DAC = \angle CBD$ и $AX = BX = 5$. $AC = 9$. Найдите длину отрезка DX.

Ответ: 4

Задача 6. (3 балла)

Три велосипедиста выехали из одной точки на круглой трассе. Андрей и Боря поехали в разные стороны с одинаковой скоростью, а Вова со вчетверо большей скоростью поехал туда же, куда и Андрей.

Вова встретил Борю через 24 минуты. Через сколько минут после этого Вова нагонит Андрея?

Ответ: 16

Задача 7. (3 балла)

Треугольник составлен из трёх палочек, длины которых — три различных натуральных числа. Вася сломал меньшую из палочек на две различные части натуральной длины и оказалось, что теперь ни из каких трёх из четырёх получившихся палочек треугольник составить нельзя.

Какое наименьшее значение мог принимать периметр исходного треугольника?

Ответ: 13

Задача 8. (3 балла)

В таблице 8×8 расставлены натуральные числа так, что суммы чисел в каждой строке одинаковы, а во всех столбцах различны.

Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 96

Задача 9. (3 балла)

В начале на доске написано число 999 999 999 999. За одну операцию число на доске заменяют на его сумму цифр, увеличенную на 3. Какое число будет на доске через 9 000 001 операцию?

Ответ: 12

Задача 10. (5 баллов)

Натуральные числа a и b таковы, что НОК$(a,b)+$ НОД$(a,b) = a+b+14$.

Найдите НОК(a,b). Если возможных вариантов несколько, укажите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 24, 30, 42

1.3 Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады

1.3.1 Задания для 11 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла) Последовательность удовлетворяет условию $a_n = \log_5 \left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right|$.
Оказалось, что $a_0 = 5$, $a_{500} = 3125$.
Найдите $a_2 + a_3 + \ldots + a_{501}$
Ответ: 4

Задача 2. (2 балла)
Клетки квадрата 100×100 раскрашены в три цвета: синий, белый и красный так, что в каждых двух линиях (строках или столбцах) количество клеток как минимум одного какого-то цвета не совпадает.
Какое наименьшее число красных клеток может быть в этом квадрате?
Ответ: 50

Задача 3. (2 балла)
Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ такой, что $AB = 24$, $BC = 32$, $AA_1 = 40$. Сфера S проходит через точки A и B и касается грани $A_1B_1C_1D_1$ в её центре. Найдите радиус сферы.
Ответ: 25

Задача 4. (3 балла)
У многочлена степени 100 нашлось 100 различных вещественных корней. Их сумма равна 700.
Найдите сумму корней производной этого многочлена.
Ответ: 693

Задача 5. (3 балла)
Вещественные числа x и y таковы, что $\dfrac{\sin x + \sin y}{\sin(x+y)} = \dfrac{5}{12}$.
Найдите $\dfrac{\sin x - \sin y}{\sin(x-y)}$.
Ответ: 2,4

Задача 6. (3 балла)
Точка O — начало координат, также даны точки $A(x;7)$, $C(10;y)$ такие, что $|x| \leqslant 20$ и $|y| \leqslant 14$. Какое наибольшее значение может принимать площадь треугольника OAC?
Ответ: 175

Задача 7. (3 балла)
Непрерывная функция $f(x)$ такова, что $f(\sqrt{x}) + f(\sqrt{y}) = f(\sqrt{x+y})$, $f(1) = 12$.
Найдите $f(2)$.
Ответ: 48

Задача 8. (4 балла)
В деревне живут 200 человек. Житель деревни называется общительным, если он знаком не менее, чем с 10 другими жителями. Однако, никакие двое общительных жителей не знакомы между собой.
Какое наибольшее количество общительных жителей может быть в деревне?
Ответ: 94

Задача 9. (4 балла)

Трапеция $ABCD$ вписана в окружность с центром в точке O, $AD = 10$, $CD = 10$, $BC = 20$. На продолжении отрезка CD за точку D взята точка E. $EO = 14$. Найдите DE.

Ответ: 6

Задача 10. (4 балла)

Решите в натуральных числах уравнение $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 1530$.

В ответе укажите наименьшее возможное значение $x + y + z$.

Ответ: 22

1.3.2 Задания для 10 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Многочлен $P(x)$ со старшим коэффициентом 1 имеет свободный член 48 и 6 различных целых корней. Какое наибольшее значение может принимать его целый корень?

Ответ: 4

Задача 2. (2 балла)

Для вещественного иррационального числа x выполнены равенства $x = a + \sqrt{b}$ и $x^2 = c + \sqrt{d}$, где a, b, c, d натуральные числа. Известно, что $a^2 - b = 10$. Чему равно $c^2 - d$?

Ответ: 100

Задача 3. (3 балла)

В школе учатся 100 мальчиков и некоторое количество девочек, не равное 100. Ни у каких двух ребят одного пола нет одинакового количества друзей среди учеников другого пола.

Сколько может быть пар друзей, состоящих из мальчика и девочки?

Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 4950, 5050

Задача 4. (3 балла)

Найдите количество решений уравнения $xyz = 18000000$ в натуральных числах.

(Решения $1, 1, 18000000$ и $18000000, 1, 1$, например, мы считаем разными).

Ответ: 6048

Задача 5. (3 балла)

В августе школьники из села Интегралово проходили медосмотр. Окулист принимал каждый час 7 человек, и не успел до первого сентября принять 13 человек. ЛОР каждый час принимал по 8 человек и не успел принять 30 человек. Терапевт каждый час принимал по 9 человек и не успел принять 24 человека. Каждый врач отработал целое количество часов, но разные врачи могли отработать разное время.

Какое наименьшее число школьников могло быть в селе?

Ответ: 510

Задача 6. (3 балла)

График дробно-линейной функции $f(x) = \dfrac{ax+b}{16x+d}$ сдвинули на вектор, абсцисса которого равна 2, после чего этот график совпал с графиком обратной дробно-линейной функции, т.е. такой функции $g(x)$, что $f(g(x)) = x$ везде, где эта функция определена.

Найдите $a + d$.

Ответ: 32

Задача 7. (3 балла)

Окружность S_1 с центром в точке O_1 и радиусом 11 касается в точке K окружности S_2 радиуса 14. На общей касательной к этим окружностям, проведённой в точке K, взята точка X. Окружность S_2 пересекает прямую XO_1 в точках A и B, причём A лежит между X и O_1.

Найдите $XO_1 \cdot (BO_1 - AO_1)$.

Ответ: 66

Задача 8. (3 балла)

Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношением $a_n = 2a_{n-1} - 10$ и начальным условием $a_0 = 15$. Найдите $a_{1000} - (a_{999} + ... + a_1 + a_0)$.

Ответ: -9985

Задача 9. (4 балла)

$ABCD$ — трапеция ($AD \parallel BC$). Описанная окружность треугольника BCD пересекает отрезок AD в точке E. Описанная окружность треугольника ABD пересекает продолжение стороны BC за точку B в точке F. H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на AD.

$AD = 31$, $BC = 18$, $BD = 16$, $DH = 11$. Найдите периметр четырёхугольника $AFCE$.

Ответ: 86

Задача 10. (4 балла)

В клетчатом прямоугольнике из 201 строк и 403 столбцов отметили некоторое количество клеток так, чтобы в каждом квадратике 2×2 было не менее одной отмеченной клетки, а в каждой горизонтальной полоске 1×4 — не более одной отмеченной клетки.

Какое наименьшее число клеток могло быть отмечено?

Ответ: 20200

1.3.3 Задания для 9 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (3 балла)

Вещественные числа a, b, c, d таковы, что $a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2 = 125$. Какое наибольшее целое значение может принимать число $ab + bc + cd$?

Ответ: 62

Задача 2. (2 балла)

Две параболы с одинаковым старшим коэффициентом касаются третьей в точках $A(2;10)$ и $B(10;7)$, а также пересекаются в точке C. Найдите её абсциссу.

Ответ: 6

Задача 3. (2 балла)

Для вещественного иррационального числа x выполнены равенства $x = a + \sqrt{b}$ и $x^2 = c + \sqrt{d}$, где a, b, c, d натуральные числа. Известно, что $a^2 - b = 10$. Чему равно $c^2 - d$?

Ответ: 100

Задача 4. (3 балла)

На клетчатой доске 11×11 стоят хромые короли, которые могут ходить на одну клетку по горизонтали или вертикали. В каждой клетке изначально стоит один король.

Вася хочет передвинуть всех королей на клетку $a1$ (в конце и в процессе на одной клетке может стоять уже несколько (любое количество) королей). Какое наименьшее число ходов ему потребуется?

Ответ: 1210

Задача 5. (3 балла)

На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$.

Оказалось, что D — середина AE и $BE = CE = 6$. Найдите DE.

Ответ: 3

Задача 6. (3 балла)

В школе учатся 100 мальчиков и некоторое количество девочек, не равное 100. Ни у каких двух ребят одного пола нет одинакового количества друзей среди учеников другого пола.

Сколько может быть пар друзей, состоящих из мальчика и девочки?

Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 4950, 5050

Задача 7. (3 балла)

Найдите количество решений уравнения $xyz = 18000000$ в натуральных числах.

(Решения $1, 1, 18000000$ и $18000000, 1, 1$, например, мы считаем разными).

Ответ: 6048

Задача 8. (4 балла)

В августе школьники из села Интегралово проходили медосмотр. Окулист принимал каждый час 7 человек, и не успел до первого сентября принять 13 человек. ЛОР каждый час принимал по 8 человек и не успел принять 30 человек. Терапевт каждый час принимал по 9 человек и не успел принять 24 человека. Каждый врач отработал целое количество часов, но разные врачи могли отработать разное время.

Какое наименьшее число школьников могло быть в селе?

Ответ: 510

Задача 9. (4 балла)

Окружность S_1 с центром в точке O_1 и радиусом 11 касается в точке K окружности S_2 радиуса 14. На общей касательной к этим окружностям, проведённой в точке K, взята точка X. Окружность S_2 пересекает прямую XO_1 в точках A и B, причём A лежит между X и O_1.

Найдите $XO_1 \cdot (BO_1 - AO_1)$.

Ответ: 66

Задача 10. (5 баллов)

В клетчатом прямоугольнике из 201 строк и 403 столбцов отметили некоторое количество клеток так, чтобы в каждом квадратике 2×2 было не менее одной отмеченной клетки, а в каждой горизонтальной полоске 1×4 — не более одной отмеченной клетки.

Какое наименьшее число клеток могло быть отмечено?

Ответ: 20200

1.3.4 Задания для 8 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Три натуральных числа a, b и c таковы, что НОД$(a, b) = 2500$, НОД$(a, c) = 200$, НОД$(b, c) = 100$.

Какое наименьшее значение может принимать НОК(a, b, c)?

Ответ: 5000

Задача 2. (2 балла)

Вася нашёл на улице три различные цифры. Из самих цифр он составил простое число, а из отрезков, длины которых равны этим цифрам, составил треугольник.

Какое наименьшее простое число у него могло получиться?

Ответ: 367

Задача 3. (3 балла)

За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут (и те, и другие присутствуют). Всего за столом 40 человек. Каждый из них сообщил, что среди его четырёх ближайших соседей ровно трое рыцарей.

Сколько могло быть рыцарей на самом деле?

Если правильных ответов несколько, запишите их любом порядке через запятую.

Ответ: 32

Задача 4. (3 балла)

Вещественные числа a, b, c, d таковы, что $a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2 = 125$. Какое наибольшее целое значение может принимать число $ab + bc + cd$?

Ответ: 62

Задача 5. (3 балла)

Две параболы с одинаковым старшим коэффициентом касаются третьей в точках $A(2; 10)$ и $B(10; 7)$, а также пересекаются в точке C. Найдите её абсциссу.

Ответ: 6

Задача 6. (3 балла)

На клетчатой доске 11×11 стоят хромые короли, которые могут ходить на одну клетку по горизонтали или вертикали. В каждой клетке изначально стоит один король.

Вася хочет передвинуть всех королей на клетку $a1$ (в конце и в процессе на одной клетке может стоять уже несколько (любое количество) королей). Какое наименьшее число ходов ему потребуется?

Ответ: 1210

Задача 7. (3 балла)

В каждой клетке клетчатого прямоугольника 2×100 стоит натуральное число так, что в каждом прямоугольнике 1×2 или 2×1 сумма чисел не меньше 10, а в каждом прямоугольнике 1×3 — не больше 17. Какова наибольшая возможная сумма чисел во всём прямоугольнике?

Ответ: 1136

Задача 8. (3 балла)

Сколько решений имеет уравнение $x^2 + y^3 = 7n$ в натуральных числах при $x, y \leqslant 700$?

Ответ: 70000

Задача 9. (4 балла)

Три велосипедиста, стартовавшие одновременно, едут с постоянными скоростями по круглой трассе. Через 6 минут после старта первый велосипедист впервые догнал и обогнал (на круг) третьего, а ещё через 4 минуты — второго. Через сколько минут после старта второй велосипедист впервые догонит третьего?

Ответ: 15

Задача 10. (4 балла)

На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$.

Оказалось, что D — середина AE и $BE = CE = 6$. Найдите DE.

Ответ: 3

1.3.5 Задания для 5-7 классов

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Вася, Петя и Коля собирали яблоки. Число яблок, собранных Васей, составляет 20% от числа яблок, собранных Петей и Колей вместе. Число яблок, собранных Петей, составляет одну треть от числа яблок, собранных Васей и Колей вместе.

Сколько процентов от числа яблок, собранных Петей и Васей вместе, составляет число яблок, собранных Колей?

Ответ: 140

Задача 2. (2 балла)

Три натуральных числа a, b и c таковы, что НОД$(a, b) = 2500$, НОД$(a, c) = 200$, НОД$(b, c) = 100$.

Какое наименьшее значение может принимать НОК(a, b, c)?

Ответ: 5000

Задача 3. (2 балла)

Найдите ближайшую дату в будущем, которая будет записываться восемью различными цифрами, среди которых не будет единицы.

День и месяц будем записывать двумя цифрами (формат даты ДД/ММ/ГГГГ).

Ответ: 28.07.3456

Задача 4. (3 балла)

Вася нашёл на улице три различные цифры. Из самих цифр он составил простое число, а из отрезков, длины которых равны этим цифрам, составил треугольник.

Какое наименьшее простое число у него могло получиться?

Ответ: 367

Задача 5. (3 балла)

За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут (и те, и другие присутствуют). Всего за столом 40 человек. Каждый из них сообщил, что среди его четырёх ближайших соседей ровно трое рыцарей.

Сколько могло быть рыцарей на самом деле?

Если правильных ответов несколько, запишите их любом порядке через запятую.

Ответ: 32

Задача 6. (3 балла)

Вещественные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 21$, $a + b + c = 6$, $abc = 2$. Найдите $a^3 + b^3 + c^3$.

Ответ: 87

Задача 7. (4 балла)

На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$.

Оказалось, что D — середина AE и $BE = CE$. Найдите величину угла $\angle BEC$ (в градусах).

Ответ: 120

Задача 8. (4 балла)

В каждой клетке клетчатого прямоугольника 2×100 стоит натуральное число так, что в каждом прямоугольнике 1×2 или 2×1 сумма чисел не меньше 10, а в каждом прямоугольнике 1×3 — не больше 17. Какова наибольшая возможная сумма чисел во всём прямоугольнике?

Ответ: 1136

Задача 9. (4 балла)

Сколько решений имеет уравнение $x^2 + y^3 = 7n$ в натуральных числах при $x, y \leqslant 700$?

Ответ: 70000

Задача 10. (5 баллов)

Три велосипедиста, стартовавшие одновременно, едут с постоянными скоростями по круглой трассе. Через 6 минут после старта первый велосипедист впервые догнал и обогнал (на круг) третьего, а ещё через 4 минуты — второго. Через сколько минут после старта второй велосипедист впервые догонит третьего?

Ответ: 15