

8 класс

Задачи и решения

Данный файл содержит печатные версии задач. Онлайн-версии могут незначительно отличаться в формулировках. В частности, отсюда убраны все рекомендации по вводу ответов в систему.

Задача 1. (2 балла)

Вариант 1. Вася решал приведённое квадратное уравнение с целыми корнями $x_1 = -3$ и x_2 по теореме Виета, но перепутал второй коэффициент и свободный член и получил целые корни $x_3 = -1$ и x_4 .

Найдите x_2 и x_4 .

Ответ: $x_2 = -2$, $x_4 = -5$

Решение: Согласно теореме Виета, для приведённого квадратного уравнения второй коэффициент равен $-(x_1 + x_2)$, а свободный член равен $x_1 x_2$. Из условия, что для второго уравнения эти числа поменялись местами, получаем

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = x_3 x_4 \\ -x_3 - x_4 = x_1 x_2 \end{cases} \quad \text{или, подставив значения корней,} \quad \begin{cases} 3 - x_2 = -x_4 \\ 1 - x_4 = -3x_2 \end{cases}.$$

Отсюда $x_2 = 3 + x_4$, $1 - x_4 = -3(3 + x_4) \Rightarrow 10 = -2x_4 \Rightarrow x_4 = -5 \Rightarrow x_2 = -2$.

Вариант 2. Вася решал приведённое квадратное уравнение с целыми корнями $x_1 = 4$ и x_2 по теореме Виета, но перепутал второй коэффициент и свободный член и получил целые корни $x_3 = 2$ и x_4 .

Найдите x_2 и x_4 . В ответе запишите их в любом порядке через запятую.

Ответ: $x_2 = 0$, $x_4 = -2$

Решение: Согласно теореме Виета, для приведённого квадратного уравнения второй коэффициент равен $-(x_1 + x_2)$, а свободный член равен $x_1 x_2$. Из условия, что для второго уравнения эти числа поменялись местами, получаем

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = x_3 x_4 \\ -x_3 - x_4 = x_1 x_2 \end{cases} \quad \text{или, подставив значения корней,} \quad \begin{cases} -4 - x_2 = 2x_4 \\ -2 - x_4 = 4x_2 \end{cases}.$$

Отсюда $x_2 = -4 - 2x_4$, $-2 - x_4 = 4(-4 - 2x_4) \Rightarrow 14 = -7x_4 \Rightarrow x_4 = -2 \Rightarrow x_2 = 0$.

Вариант 3. Вася решал приведённое квадратное уравнение с целыми корнями $x_1 = 1$ и x_2 по теореме Виета, но перепутал второй коэффициент и свободный член и получил целые корни $x_3 = 3$ и x_4 .

Найдите x_2 и x_4 . В ответе запишите их в любом порядке через запятую.

Ответ: $x_2 = 1$, $x_4 = -4$

Решение: Согласно теореме Виета, для приведённого квадратного уравнения второй коэффициент равен $-(x_1 + x_2)$, а свободный член равен $x_1 x_2$. Из условия, что для второго уравнения эти числа поменялись местами, получаем

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = x_3 x_4 \\ -x_3 - x_4 = x_1 x_2 \end{cases} \quad \text{или, подставив значения корней,} \quad \begin{cases} -1 - x_2 = 3x_4 \\ -3 - x_4 = x_2 \end{cases}.$$

Отсюда $x_2 = -1 - 3x_4$, $-3 - x_4 = -1 - 3x_4 \Rightarrow -2 = -2x_4 \Rightarrow x_4 = 1 \Rightarrow x_2 = -4$.

Задача Вариант 2. (2 балла)

Вариант 1. Сумма трёх чисел равна 0, а их произведение равно 17. Найдите сумму кубов этих трёх чисел.

Ответ: 51

Решение: Воспользуемся известным тождеством $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$. Из него следует, что при $a + b + c = 0$ выполняется равенство $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, откуда немедленно получаем ответ

Вариант 2. Сумма трёх чисел равна 0, а их произведение равно 19. Найдите сумму кубов этих трёх чисел.

Ответ: 57

Решение: Воспользуемся известным тождеством $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$. Из него следует, что при $a + b + c = 0$ выполняется равенство $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, откуда немедленно получаем ответ

Вариант 3. Сумма трёх чисел равна 0, а их произведение равно 23. Найдите сумму кубов этих трёх чисел.

Ответ: 69

Решение: Воспользуемся известным тождеством $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$. Из него следует, что при $a + b + c = 0$ выполняется равенство $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, откуда немедленно получаем ответ

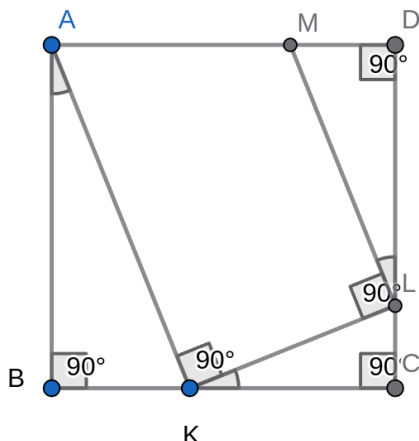
Задача 3. (2 балла)

Вариант 1. $ABCD$ — квадрат со стороной 1728. На отрезке BC взята точка K такая, что $BK = 720$. Перпендикуляр к прямой AK , восстановленный в точке K , пересекает отрезок CD в точке L . Перпендикуляр к прямой KL , восстановленный в точке L , пересекает отрезок AD в точке M .

Найдите длину LM .

Ответ: 1417

Решение:



$\angle LKC = 180^\circ - 90^\circ - \angle AKB = \angle KAB$, поэтому прямоугольные треугольники LKC и KAB подобные. Аналогично подобен им треугольник MLD .

$$\text{Отсюда получаем } LM = \frac{KA \cdot DL}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 + BK^2} \cdot (CD - LC)}{1728} = \frac{\sqrt{1728^2 + 720^2} \cdot (CD - LC)}{1728} = \frac{1872 \cdot (CD - LC)}{1728}.$$

$$\text{Из тех же подобий } LC = \frac{BK \cdot CK}{AB} = \frac{720 \cdot 1008}{1728} = 420, \text{ поэтому } LM = \frac{1872 \cdot 1308}{1728} = 1417.$$

Вариант 2. $ABCD$ — квадрат со стороной 1600. На отрезке BC взята точка K такая, что $BK = 1200$. Перпендикуляр к прямой AK , восстановленный в точке K , пересекает отрезок CD в точке L . Перпендикуляр к прямой KL , восстановленный в точке L , пересекает отрезок AD в точке M .

Найдите длину LM .

Ответ: 1625

Решение:

$\angle LKC = 180^\circ - 90^\circ - \angle AKB = \angle KAB$, поэтому прямоугольные треугольники LKC и KAB подобные. Аналогично подобен им треугольник MLD .

$$\text{Отсюда получаем } LM = \frac{KA \cdot DL}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 + BK^2} \cdot (CD - LC)}{1600} = \frac{\sqrt{1600^2 + 1200^2} \cdot (CD - LC)}{1600} = \frac{2000 \cdot (CD - LC)}{1600}.$$

$$\text{Из тех же подобий } LC = \frac{BK \cdot CK}{AB} = \frac{1200 \cdot 400}{1600} = 300, \text{ поэтому } LM = \frac{2000 \cdot 1300}{1600} = 1625.$$

Вариант 3. $ABCD$ — квадрат со стороной 3375. На отрезке BC взята точка K такая, что $BK = 1800$. Перпендикуляр к прямой AK , восстановленный в точке K , пересекает отрезок CD в точке L . Перпендикуляр к прямой KL , восстановленный в точке L , пересекает отрезок AD в точке M .

Найдите длину LM .

Ответ: 2873

Решение:

$\angle LKC = 180^\circ - 90^\circ - \angle AKB = \angle KAB$, поэтому прямоугольные треугольники LKC и KAB подобные. Аналогично подобен им треугольник MLD .

$$\text{Отсюда получаем } LM = \frac{KA \cdot DL}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 + BK^2} \cdot (CD - LC)}{3375} = \frac{\sqrt{3375^2 + 1800^2} \cdot (CD - LC)}{3375} = \frac{3825 \cdot (CD - LC)}{3375}.$$

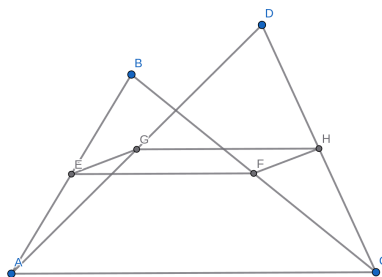
$$\text{Из тех же подобий } LC = \frac{BK \cdot CK}{AB} = \frac{1800 \cdot 1575}{3375} = 840, \text{ поэтому } LM = \frac{3825 \cdot 2535}{3375} = 2873.$$

Задача 4. (3 балла)

Вариант 1. По одну сторону от прямой AC взяты точки B и D . Площади треугольников ABC и ACD равны 30 и 40 соответственно. Найдите площадь четырёхугольника, образованного серединами отрезков AB , BC , CD и AD .

Ответ: 5

Решение:



Заметим, что средние линии EF и GH треугольников ABC и ACD параллельны стороне AC и в два раза короче её. Значит, четырёхугольник $EFHG$ параллелограмм.

Его площадь равна длине EF , умноженной на расстояние между прямыми EF и GH . Это расстояние равно разности между расстояниями от GH и EF до AC , которые составляют половины от высот h_2 и h_1 треугольников ABD и ACD .

$$\text{Значит, } S_{EFHG} = EF \cdot \left(\frac{h_2}{2} - \frac{h_1}{2} \right) = \frac{AC}{2} \cdot \frac{h_2}{2} - \frac{AC}{2} \cdot \frac{h_1}{2} = \frac{S_{ABC}}{2} - \frac{S_{ACD}}{2} = \frac{40 - 30}{2} = 5.$$

Вариант 2. По одну сторону от прямой AC взяты точки B и D . Площади треугольников ABC и ACD равны 40 и 60 соответственно. Найдите площадь четырёхугольника, образованного серединами отрезков AB , BC , CD и AD .

Ответ: 10

Решение: Заметим, что средние линии EF и GH треугольников ABC и ACD параллельны стороне AC и в два раза короче её. Значит, четырёхугольник $EFHG$ параллелограмм.

Его площадь равна длине EF , умноженной на расстояние между прямыми EF и GH . Это расстояние равно разности между расстояниями от GH и EF до AC , которые составляют половины от высот h_2 и h_1 треугольников ABD и ACD .

$$\text{Значит, } S_{EFHG} = EF \cdot \left(\frac{h_2}{2} - \frac{h_1}{2} \right) = \frac{AC}{2} \cdot \frac{h_2}{2} - \frac{AC}{2} \cdot \frac{h_1}{2} = \frac{S_{ABC}}{2} - \frac{S_{ACD}}{2} = \frac{60 - 40}{2} = 10.$$

Вариант 3. По одну сторону от прямой AC взяты точки B и D . Площади треугольников ABC и ACD равны 20 и 24 соответственно. Найдите площадь четырёхугольника, образованного серединами отрезков AB , BC , CD и AD .

Ответ: 2

Решение: Заметим, что средние линии EF и GH треугольников ABC и ACD параллельны стороне AC и в два раза короче её. Значит, четырёхугольник $EFHG$ параллелограмм.

Его площадь равна длине EF , умноженной на расстояние между прямыми EF и GH . Это расстояние равно разности между расстояниями от GH и EF до AC , которые составляют половины от высот h_2 и h_1 треугольников ABD и ACD .

$$\text{Значит, } S_{EFHG} = EF \cdot \left(\frac{h_2}{2} - \frac{h_1}{2} \right) = \frac{AC}{2} \cdot \frac{h_2}{2} - \frac{AC}{2} \cdot \frac{h_1}{2} = \frac{S_{ABC}}{2} - \frac{S_{ACD}}{2} = \frac{24 - 20}{2} = 2.$$

Задача 5. (3 балла)

Вариант 1. Сумма четырёх попарно различных простых чисел равна утроенному произведению двух из них. Какое наименьшее значение может принимать эта сумма?

Ответ: 99

Решение: Если все простые числа нечётные, то их сумма чётна, а утроенное произведение любых двух нечётно, поэтому они не могут быть равны. Значит, одно из простых чисел равно 2, а их общая сумма нечётна. Поэтому произведение двух из них тоже должно быть нечётно, значит, 2 не участвует в этом произведении.

Запишем это в виде формулы: $2 + p + q + r = 3pq$. Умножим это равенство на 3 и перегруппируем слагаемые, добавив в каждую часть по единице: $3r + 7 = 9pq - 3p - 3q + 1$, откуда $(3p - 1)(3q - 1) - 7 = 3r$.

Нам подходит вариант $p = 3$, $q = 11$ или наоборот, тогда $r = 83$, $2 + 3 + 11 + 83 = 3 \cdot 3 \cdot 11 = 99$.

Чтобы доказать, что это наименьший вариант, достаточно перебрать все пары нечётных простых чисел, произведение которых меньше $\frac{99}{3} = 33$.

$p = 3$, $q = 5$: $(3p - 1)(3q - 1) - 7 = 105 = 3 \cdot 35$, но 35 не простое.

$p = 3$, $q = 7$: $(3p - 1)(3q - 1) - 7 = 153 = 3 \cdot 51$, но 51 не простое.

Следующее простое q при $p = 3$ это как раз 11, значит, остальные варианты при $p = 3$ дают ещё большее произведение. Если же оба числа больше трёх, то их произведение хотя бы $5 \cdot 7 = 35$.

Вариант 2. Сумма четырёх попарно различных простых чисел равна произведению двух из них. Какое наименьшее значение может принимать эта сумма?

Ответ: 33

Решение: Если все простые числа нечётные, то их сумма чётна, а утроенное произведение любых двух нечётно, поэтому они не могут быть равны. Значит, одно из простых чисел равно 2, а их общая сумма нечётна. Поэтому произведение двух из них тоже должно быть нечётно, значит, 2 не участвует в этом произведении.

Запишем это в виде формулы: $2 + p + q + r = pq$. Получаем $r + 3 = pq - p - q + 1$, откуда $(p - 1)(q - 1) - 3 = r$.

Нам подходит вариант $p = 3$, $q = 11$ или наоборот, тогда $r = 17$, $2 + 3 + 11 + 17 = 3 \cdot 11 = 33$.

Чтобы доказать, что это наименьший вариант, достаточно перебрать все пары нечётных простых чисел, произведение которых меньше 33.

$p = 3$, $q = 5$: $(p - 1)(q - 1) - 3 = 5$, но то есть $r = p$, что противоречит условию.

$p = 3$, $q = 7$: $(p - 1)(q - 1) - 3 = 9$, но 9 не простое.

Следующее простое q при $p = 3$ это как раз 11, значит, остальные варианты при $p = 3$ дают ещё большее произведение. Если же оба числа больше трёх, то их произведение хотя бы $5 \cdot 7 = 35$.

Вариант 3. Сумма четырёх попарно различных простых чисел равна произведению двух из них, умноженному на 5. Какое наименьшее значение может принимать эта сумма?

Ответ: 165

Решение: Если все простые числа нечётные, то их сумма чётна, а утроенное произведение любых двух нечётно, поэтому они не могут быть равны. Значит, одно из простых чисел равно 2, а их общая сумма нечётна. Поэтому произведение двух из них тоже должно быть нечётно, значит, 2 не участвует в этом произведении.

Запишем это в виде формулы: $2 + p + q + r = 5pq$. Умножим это равенство на 5 и перегруппируем слагаемые, добавив в каждую часть по единице: $5r + 11 = 25pq - 5p - 5q + 1$, откуда $(5p - 1)(5q - 1) - 11 = 5r$.

Нам подходит вариант $p = 3$, $q = 11$ или наоборот, тогда $r = 149$, $2 + 3 + 11 + 149 = 5 \cdot 3 \cdot 11 = 165$.

Чтобы доказать, что это наименьший вариант, достаточно перебрать все пары нечётных простых чисел, произведение которых меньше $\frac{165}{5} = 33$.

$p = 3$, $q = 5$: $(5p - 1)(5q - 1) - 11 = 325 = 5 \cdot 65$, но 65 не простое.

$p = 3$, $q = 7$: $(5p - 1)(5q - 1) - 7 = 465 = 5 \cdot 93$, но 93 не простое.

Следующее простое q при $p = 3$ это как раз 11, значит, остальные варианты при $p = 3$ дают ещё большее произведение. Если же оба числа больше трёх, то их произведение хотя бы $5 \cdot 7 = 35$.

Задача 6. (3 балла)

Вариант 1. В какое наибольшее количество раз произведение восьми подряд идущих чисел может быть больше их наименьшего общего кратного?

Ответ: 5040

Решение: Каждое простое число входит в произведение чисел в суммарное степени вхождения в каждое из них, а в наименьшее общее кратное — в максимальной.

Из восьми подряд идущих чисел на простые числа, большие 7, делится максимум одно из них, значит в НОК и в произведение эти простые числа входят в одной и той же степени.

На простое число 7 делятся максимум два числа. В одно из них 7 входит в первой степени, в другое — в степени больше 1. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная на 1.

На простое число 5 делятся также максимум два числа. В одно из них 5 входит в первой степени, в другое — в степени больше 1. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная на 1.

На простое число 3 делятся максимум три числа. В два из них 3 входит в первой степени, в оставшееся — в степени больше 1. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная на 2.

На простое число 2 делятся ровно 4 числа. Из них ровно 2 делятся на $2 \cdot 2 = 4$, а из них одно делится на какую-то большую степень. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная на 4.

Итого получаем ответ $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040$.

Вариант 2. В какое наибольшее количество раз произведение десяти подряд идущих чисел может быть больше их наименьшего общего кратного?

Ответ: 362880

Решение: Каждое простое число входит в произведение чисел в суммарное степени вхождения в каждое из них, а в наименьшее общее кратное — в максимальной.

Из десяти подряд идущих чисел на простые числа, большие 7, делится максимум одно из них, значит в НОК и в произведение эти простые числа входят в одной и той же степени.

На простое число 7 делятся максимум два числа. В одно из них 7 входит в первой степени, в другое — в степени больше 1. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная на 1.

На простое число 5 делятся также максимум два числа. В одно из них 5 входит в первой степени, в другое — в степени больше 1. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная на 1.

На простое число 3 делятся максимум четыре числа. Из них одно или два делятся на 9 и максимум одно может делиться на какую-то большую степень тройки. Если делящееся на 9 число одно, то в НОК войдёт тройка в той же степени, что и в этом числе, а в произведение — в степени на 3 больше. Если же есть второе число, делящееся на 9, то степень будет больше не на 3, а на 4.

На простое число 2 делятся ровно 5 чисел. Из них два или три делятся на $2 \cdot 2 = 4$, одно или два на $2^3 = 8$ и максимум одно на большую степень двойки. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная максимум на $1 + 1 + 2 + 3 = 7$.

Итого получаем ответ $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 362880$.

Вариант 3. В какое наибольшее количество раз произведение одиннадцати подряд идущих чисел может быть больше их наименьшего общего кратного?

Ответ: 3628800

Решение: Каждое простое число входит в произведение чисел в суммарное степени вхождения в каждое из них, а в наименьшее общее кратное — в максимальной.

Из десяти подряд идущих чисел на простые числа, большие 7, делится максимум одно из них, значит в НОК и в произведение эти простые числа входят в одной и той же степени.

На простое число 7 делятся максимум два числа. В одно из них 7 входит в первой степени, в другое — в степени больше 1. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная на 1.

На простое число 5 делятся также максимум три числа. В два из них 5 входит в первой степени, в оставшееся — в степени больше 1. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная на 1.

На простое число 3 делятся максимум четыре числа. Из них одно или два делятся на 9 и максимум одно может делиться на какую-то большую степень тройки. Если делящееся на 9 число одно, то в НОК войдёт тройка в той же степени, что и в этом числе, а в произведение — в степени на 3 больше. Если же есть второе число, делящее на 9, то степень будет больше не на 3, а на 4.

На простое число 2 делятся пять или шесть чисел. Из них два или три делятся на $2 \cdot 2 = 4$, одно или два на $2^3 = 8$ и максимум одно на большую степень двойки. Значит, в НОК войдёт эта большая степень, а в произведение — она, увеличенная максимум на $1 + 1 + 1 + 2 + 3 = 8$.

Итого получаем ответ $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 = 3628800$.

Задача 7. (4 балла)

Вариант 1. Фокусник раздал зрителям разноцветные шляпы, а затем сказал: «Как бы вы не поменялись шляпами, я смогу выбрать семерых из вас так, что ни один из них не получил шляпу от другого». При каком наименьшем числе зрителей фокусник гарантированно будет прав?

Ответ: 19

Решение: Рассмотрим какого-то одного зрителя. Он отдал шляпу какому-то другому зрителю, тот отдал шляпу третьему и так далее. Продолжая эту последовательность, мы рано или поздно дойдём до человека, который отдал шляпу первому зрителю. Повторив аналогичную процедуру со всеми остальными зрителями, мы обнаружим, что зрители таким образом разбились на циклы.

В семёрке зрителей, которую выбирает фокусник, не может быть двоих, которые являются соседями в одном цикле. Значит, из каждого цикла мы можем взять половину зрителей, округлённую вниз.

Почему нельзя меньше 19?

Если общее число зрителей меньше 19, то их можно разбить на шесть (или меньше) циклов по два или три человека в каждом, ведь любое число имеет вид $3k$, $3k + 2$ или $3k + 1 = 3(k - 1) + 2 + 2$, причём k не больше 6 в первом случае, и не больше 5 во втором и третьем.

Из каждого такого цикла фокусник сможет выбрать максимум одного человека, итого не больше 6.

Почему 19 подходит?

Если зрителей ровно 19 и они разбиваются на 7 или больше циклов, фокусник гарантированно прав. Если же циклов $n < 7$, мы можем выбрать из каждого из них не менее $\frac{l-1}{2}$ человек, где l — длина этого цикла. Просуммировав эти числа, мы получим общую длину всех циклов, то есть 19, делённую на 2, минус $\frac{n}{2}$, что не больше 3. Итого фокусник сможет выбрать не менее $6,5$ человек, то есть не менее 7.

Вариант 2. Фокусник раздал зрителям разноцветные шляпы, а затем сказал: «Как бы вы не поменялись шляпами, я смогу выбрать восьмерых из вас так, что ни один из них не получил шляпу от другого». При каком наименьшем числе зрителей фокусник гарантированно будет прав?

Ответ: 22

Решение: Рассмотрим какого-то одного зрителя. Он отдал шляпу какому-то другому зрителю, тот отдал шляпу третьему и так далее. Продолжая эту последовательность, мы рано или поздно дойдём до человека, который отдал шляпу первому зрителю. Повторив аналогичную процедуру со всеми остальными зрителями, мы обнаружим, что зрители таким образом разбились на циклы.

В семёрке зрителей, которую выбирает фокусник, не может быть двоих, которые являются соседями в одном цикле. Значит, из каждого цикла мы можем взять половину зрителей, округлённую вниз.

Почему нельзя меньше 22?

Если общее число зрителей меньше 22, то их можно разбить на семь (или меньше) циклов по два или три человека в каждом, ведь любое число имеет вид $3k$, $3k + 2$ или $3k + 1 = 3(k - 1) + 2 + 2$, причём k не больше 7 в первом случае, и не больше 6 во втором и третьем.

Из каждого такого цикла фокусник сможет выбрать максимум одного человека, итого не больше 7.

Почему 22 подходит?

Если зрителей ровно 22 и они разбиваются на 8 или больше циклов, фокусник гарантированно прав. Если же циклов $n < 8$, мы можем выбрать из каждого из них не менее $\frac{l-1}{2}$ человек, где l — длина этого цикла. Просуммировав эти числа, мы получим общую длину всех циклов, то есть 22, делённую на 2, минус $\frac{n}{2}$, что не больше 3,5. Итого фокусник сможет выбрать не менее $11 - 3,5 = 7,5$ человек, то есть не менее 8.

Вариант 3. Фокусник раздал зрителям разноцветные шляпы, а затем сказал: «Как бы вы не поменялись шляпами, я смогу выбрать шестерых из вас так, что ни один из них не получил шляпу от другого». При каком наименьшем числе зрителей фокусник гарантированно будет прав?

Ответ: 16

Решение: Рассмотрим какого-то одного зрителя. Он отдал шляпу какому-то другому зрителю, тот отдал шляпу третьему и так далее. Продолжая эту последовательность, мы рано или поздно дойдём до человека, который отдал шляпу первому зрителю. Повторив аналогичную процедуру со всеми остальными зрителями, мы обнаружим, что зрители таким образом разбились на циклы.

В семёрке зрителей, которую выбирает фокусник, не может быть двоих, которые являются соседями в одном цикле. Значит, из каждого цикла мы можем взять половину зрителей, округлённую вниз.

Почему нельзя меньше 16?

Если общее число зрителей меньше 16, то их можно разбить на пять (или меньше) циклов по два или три человека в каждом, ведь любое число имеет вид $3k$, $3k + 2$ или $3k + 1 = 3(k - 1) + 2 + 2$, причём k не больше 5 в первом случае, и не больше 4 во втором и третьем.

Из каждого такого цикла фокусник сможет выбрать максимум одного человека, итого не больше 5.

Почему 16 подходит?

Если зрителей ровно 16 и они разбиваются на 6 или больше циклов, фокусник гарантированно прав. Если же циклов $n < 6$, мы можем выбрать из каждого из них не менее $\frac{l-1}{2}$ человек, где l — длина этого цикла. Просуммировав эти числа, мы получим общую длину всех циклов, то есть 16, делённую на 2, минус $\frac{n}{2}$, что не больше 2,5. Итого фокусник сможет выбрать не менее $8 - 2,5 = 5,5$ человек, то есть не менее 6.

Задача 8. (5 баллов)

Вариант 1. Дети нарисовали мелками на клетчатой доске 1000×1000 по клеточкам 70000 прямоугольников площади 15 каждый. Прямоугольники могут пересекаться и даже совпадать.

Вася посчитал все клетки, каждая из которых находится внутри хотя бы двух из нарисованных прямоугольников. Какое наименьшее число могло у него получиться?

Ответ: 15

Решение:

Пример: все (или почти все) прямоугольники совпадают, остальные клетки покрыты не более, чем один раз.

Оценка: Пусть таких клеток меньше 15. Это значит, что никакие два из них не совпадают. Из клеток, накрытых более чем одним прямоугольником, каждая накрыта не более, чем 60 другими. Действительно, существует четыре вида прямоугольников площади 15: 1×15 , 3×5 , 5×3 , 15×1 . Одну и ту же клетку содержат не больше 15 прямоугольников одного вида.

Итого получаем не более $14 \cdot 60 = 840$ прямоугольников, содержащих эти 14 (или меньше) клеток. Остальные прямоугольники не пересекаются, поэтому их не более, чем $\frac{1000^2}{15} = 66666\frac{2}{3}$.

Значит, суммарное количество прямоугольников меньше 70000. Получаем противоречие, значит, таких клеток не может быть меньше 15.

Вариант 2. Дети нарисовали мелками на клетчатой доске 1000×1000 по клеточкам 50000 прямоугольников площади 21 каждый. Прямоугольники могут пересекаться и даже совпадать.

Вася посчитал все клетки, каждая из которых находится внутри хотя бы двух из нарисованных прямоугольников. Какое наименьшее число могло у него получиться?

Ответ: 21

Решение:

Пример: все (или почти все) прямоугольники совпадают, остальные клетки покрыты не более, чем один раз.

Оценка: Пусть таких клеток меньше 21. Это значит, что никакие два из них не совпадают. Из клеток, накрытых более чем одним прямоугольником, каждая накрыта не более, чем 84 другими. Действительно, существует четыре вида прямоугольников площади 21: 1×21 , 3×7 , 7×3 , 21×1 . Одну и ту же клетку содержат не больше 21 прямоугольников одного вида.

Итого получаем не более $20 \cdot 84 = 1680$ прямоугольников, содержащих эти 20 (или меньше) клеток. Остальные прямоугольники не пересекаются, поэтому их не более, чем $\frac{1000^2}{21} = 47619\frac{1}{21}$.

Значит, суммарное количество прямоугольников меньше 50000. Получаем противоречие, значит, таких клеток не может быть меньше 21.

Вариант 3. Дети нарисовали мелками на клетчатой доске 1000×1000 по клеточкам 35000 прямоугольников площади 35 каждый. Прямоугольники могут пересекаться и даже совпадать.

Вася посчитал все клетки, каждая из которых находится внутри хотя бы двух из нарисованных прямоугольников. Какое наименьшее число могло у него получиться?

Ответ: 35

Решение:

Пример: все (или почти все) прямоугольники совпадают, остальные клетки покрыты не более, чем один раз.

Оценка: Пусть таких клеток меньше 35. Это значит, что никакие два из них не совпадают. Из клеток, накрытых более чем одним прямоугольником, каждая накрыта не более, чем 140 другими. Действительно, существует четыре вида прямоугольников площади 35: 1×35 , 5×7 , 7×5 , 35×1 . Одну и ту же клетку содержат не больше 35 прямоугольников одного вида.

Итого получаем не более $34 \cdot 140 = 4760$ прямоугольников, содержащих эти 34 (или меньше) клеток. Остальные прямоугольники не пересекаются, поэтому их не более, чем $\frac{1000^2}{35} = 28571\frac{3}{7}$.

Значит, суммарное количество прямоугольников меньше 35000. Получаем противоречие, значит, таких клеток не может быть меньше 35.

Замечание Все оценки в этой задаче довольно грубые, поэтому аналогичное утверждение можно доказать и для меньшего числа прямоугольников.