Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

7 класс

1 вариант

Решения

1. (1 балл) Существуют ли четыре таких различных делящихся на 3 числа, что сумма любых трёх из них делится на четвёртое?

Ответ: Да, существуют.

Решение:

Например, числа 3, 6, 9 и 18.

Для проверки нам достаточно убедиться, что сумма этих чисел, равная 36, делится на каждое из них.

2. (2 балла) Аня готовила блинчики, рассчитывая, чтобы трём членам ее семьи досталось одинаковое количество блинов. Но что-то пошло не так: каждый третий блин Аня не смогла перевернуть; 40% от блинов, которые Аня смогла перевернуть, пригорели; а $\frac{1}{5}$ от съедобных блинов Аня уронила на пол. Сколько процентов от задуманного количества блинов Аня смогла предложить своей семье?

Ответ: 32%.

Решение:

Всего Ане удалось сохранить $\dfrac{2}{3} \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,32$ от количества блинов.

3. (3 балла) По кругу стоят 20 блюдечек, на них разложены 40 пирожков. За один ход разрешается взять 2 пирожка, лежащие на одном блюдечке, и переложить их на 2 соседних блюдечка. При любом ли начальном расположении пирожков можно добиться того, чтобы на всех блюдечках оказалось поровну пирожков?

Ответ: Нет, не при любом.

Решение:

Раскрасим блюдечки в чёрный и белый цвета так, чтобы каждое чёрное соседствовало с двумя белыми и наоборот.

При выполнении операции, описанной в условии, чётность количества пирожков на чёрных блюдечках не меняется. В требуемой конечной расстановке это количество чётно, значит, если мы выберем начальную расстановку, в которой оно будет нечётно, её невозможно будет привести к нужному виду.

4. (3 балла) Дан треугольник ABC. Точки K, L и M расположили на плоскости так, что треугольники ABK, LBC и AMC оказались равны ABC. Какой знак неравенства следует поставить между полупериметром треугольника KLM и периметром треугольника ABC?

Вершины треугольников указаны в произвольном порядке: например, нельзя утрвеждать, что при равенстве треугольников ABK и LBC точка A соответствует точке L.

Ответ: Периметр ABC не меньше полупериметра KLM.

Решение:

$AK + AM \geqslant KM$ по неравенству треугольника в треугольнике AKM (равенство достигается тогда, когда этот треугольник вырожденный, т.е. точка A лежит на отрезке KM. Аналогично $BL + BK \geqslant KL$ и $CL + CM \geqslant LM$.

Таким образом получаем, что $AK + AM + BK + BL + CL + CM \geqslant KM + KL + LM$.

Из равенства треугольников ABK и ABC и того, что сторона AB — общая, получаем $AK + BK = AC + BC$, аналогично $BL + CL = AB + AC$ и $AM + CM = AB + AC$. Значит, доказаннное выше неравенство можно переписать как $2AB + 2BC + AC \geqslant KM + KL + KM$. Разделив это неравенство на 2, получим, что периметр ABC не меньше полупериметра KLM.

5. (3 балла) В комнате собрались рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут (и те, и другие точно есть). Им задали вопрос: «Сколько лжецов находится в комнате?». На этот вопрос были получены все возможные ответы от 1 до 100 (некоторые, возможно, несколько раз). Сколько на самом деле могло быть лжецов?

Ответ: 99 или 100.

Решение:

Поскольку всего получено 100 разных ответов и один из них точно правильный, остальные 99 ответов неверные. Значит, в комнате минимум 99 лжецов. Больше ста их тоже быть не может, так как верный ответ не превосходит 100.

Давайте теперь убедимся, что оба ответа возможны. Действительно, 99 лжецов бывает, когда комнате 100 человек и все дают разные ответы, а 100 лжецов — когда 101 человек, и какой-то неправильный ответ дают двое.

6. (3 балла) У Васи есть чертёжный инструмент — треугольник с углами 40°, 70° и 70°. Как ему с его помощью построить равносторонний треугольник?

Решение:

Построим два треугольника ABC и ABD с общей стороной AB и углами в точке A по 70°. Затем построим треугольники ACK и ADL с углами в точке A по 40°, отложенными внутрь построенных ранее углов 80°, причём так, что $AK = AL$ а $CK = DL$.

Тогда треугольник AKL будет равнобедренным с $\angle A = 2 \cdot (70^\circ - 40^\circ) = 60^\circ$, т.е. равносторонним.

7. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается выполнять одну из следующих операций:

1) Если в исходном числе есть цифра, не равная 9, имеющая две соседние цифры, большие 0, можно увеличить эту цифру на 1, а соседние уменьшить на 1.

2) Вычесть из любой ненулевой цифры, кроме последней, 1, а к следующей прибавить 3.

3) Уменьшить любую достаточно большую цифру на 7.

Если в результате какой-то из этих операций в числе на одном или нескольких первых местах оказываются нули, они автоматически отбрасываются.

Изначально на доске было записано число из ста восьмёрок. В конце осталось однозначное число. Какое именно?

Ответ: 3

Решение:

Первая операция соответствует вычитанию числа вида $910 \cdot 0$, вторая и третья — вычитанию $70 \cdot 0$. Обе эти операции не меняют остаток от деления исходного числа на 7, так как 91 делится на 7.

$1001 = cdot91$, а $888888 = 888 \cdot 1001$. Значит, для вычисления остатка от деления исходного числа на 7, количество восьмёрок, кратное 6, можно отбросить. Остаётся число $8888 = 8008 + 875 + 5 = 8 \cdot 1001 + 7 \cdot 125 + 5$ даёт остаток 5.

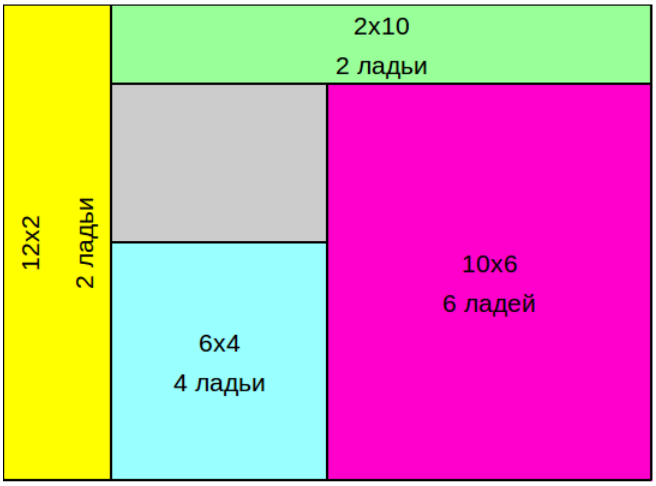
8. (5 баллов) Из клетчатого поля 12×12 вырезали квадрат 4×4, лежащий на пересечении горизонталей с третьей по шестую и таких же вертикалей. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ладей можно расставить на этом поле, если ладьи не бьют через вырезанные клетки?

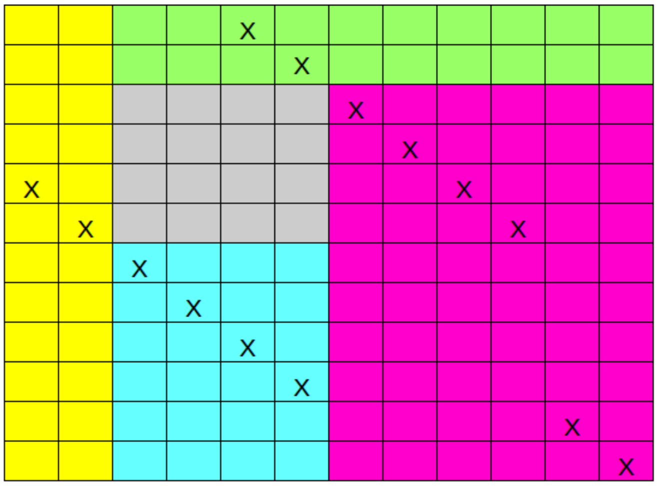
Ответ: 14

Решение:

Доступная часть доски разрезается на следующие четыре области, в каждой из которых может стоять не больше указанного количества ладей (см. левый рисунок), так как в каждом прямоугольнике не может стоять большей ладей, чем длина его меньшей стороны. Значит, общее количество ладей не превосходит 14.

Пример для 14 ладей изображён на правом рисунке.





Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

7 класс

2 вариант

Решения

1. (1 балл) Существуют ли четыре таких различных чётных числа, что сумма любых трёх из них делится на четвёртое?

Ответ: Да, существуют.

Решение:

Например, числа 2, 4, 6 и 12.

Для проверки нам достаточно убедиться, что сумма этих чисел, равная 24, делится на каждое из них.

2. (2 балла) Аня готовила блинчики, рассчитывая, чтобы пяти членам ее семьи досталось одинаковое количество блинов. Но что-то пошло не так: каждый пятый блин Аня не смогла перевернуть; 49% от блинов, которые Аня смогла перевернуть, пригорели; а $\frac{1}{6}$ от съедобных блинов Аня уронила на пол. Сколько процентов от задуманного количества блинов Аня смогла предложить своей семье?

Ответ: 34%.

Решение:

Всего Ане удалось сохранить $0,8 \cdot 0,51 \cdot \dfrac{5}{6} = 0,34$ от количества блинов.

3. (3 балла) По кругу стоят 30 тарелочек, на них разложены 60 булочек. За один ход разрешается взять 2 булочки, лежащие на одной тарелочке, и переложить их на 2 соседних тарелочки. При любом ли начальном расположении булочек можно добиться того, чтобы на всех тарелочках оказалось поровну булочек?

Ответ: Нет, не при любом.

Решение:

Раскрасим тарелочки в чёрный и белый цвета так, чтобы каждая чёрная соседствовало с двумя белыми и наоборот.

При выполнении операции, описанной в условии, чётность количества булочек на чёрных тарелочках не меняется. В требуемой конечной расстановке это количество чётно, значит, если мы выберем начальную расстановку, в которой оно будет нечётно, её невозможно будет привести к нужному виду.

4. (3 балла) Дан треугольник ABC. Точки K, L и M расположили на плоскости так, что треугольники KAM, CLM и KLB оказались равны треугольнику KLM. Какой знак неравенства следует поставить между периметром треугольника KLM и полупериметром треугольника ABC?

Вершины треугольников указаны в произвольном порядке: например, нельзя утрвеждать, что при равенстве треугольников KAM и CLM точка K соответствует точке C.

Ответ: Периметр KLM не меньше полупериметра ABC.

Решение:

$AK+KB \geqslant AB$ по неравенству треугольника в треугольнике ABK (равенство достигается тогда, когда этот треугольник вырожденный, т.е. точка K лежит на отрезке AB. Аналогично $BL + CL \geqslant BC$ и $AM + CM \geqslant AC$.

Таким образом получаем, что $AK+KB+BL+CL+AM+CM \geqslant AB+BC+AC$.

Из равенства треугольников KAM и KLM и того, что сторона KM — общая, получаем $AK + AM = KL + LM$, аналогично $CL + CM = KL + LM$ и $KB + BL = KM + LM$. Значит, доказаннное выше неравенство можно переписать как $2KL + 2KM + 2LM \geqslant AB + BC + AC$. Разделив это неравенство на 2, получим, что периметр KLM не меньше полупериметра ABC.

5. (3 балла) В комнате собрались рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут (и те, и другие точно есть). Им задали вопрос: «Сколько лжецов находится в комнате?». На этот вопрос были получены все возможные ответы от 1 до 200 (некоторые, возможно, несколько раз). Сколько на самом деле могло быть лжецов?

Ответ: 199 или 200.

Решение:

Поскольку всего получено 200 разных ответов и один из них точно правильный, остальные 199 ответов неверные. Значит, в комнате минимум 199 лжецов. Больше двухсот их тоже быть не может, так как верный ответ не превосходит 200.

Давайте теперь убедимся, что оба ответа возможны. Действительно, 199 лжецов бывает, когда комнате 200 человек и все дают разные ответы, а 200 лжецов — когда 201 человек, и какой-то неправильный ответ дают двое.

6. (3 балла) У Васи есть чертёжный инструмент — треугольник с углами 80°, 50° и 50°. Как ему с его помощью построить равносторонний треугольник?

Решение:

Построим два треугольника ABC и ABD с общей стороной AB и углами в точке A по 80°. Затем построим треугольники ACK и ADL с углами в точке A по 50°, отложенными внутрь построенных ранее углов 80°, причём так, что $AK = AL$ а $CK = DL$.

Тогда треугольник AKL будет равнобедренным с $\angle A = 2 \cdot (80^\circ - 50^\circ) = 60^\circ$, т.е. равносторонним.

7. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается выполнять одну из следующих операций:

1) Если в исходном числе есть цифра, не равная 9, имеющая две соседние цифры, большие 0, можно увеличить эту цифру на 1, а соседние уменьшить на 1.

2) Вычесть из любой ненулевой цифры, кроме последней, 1, а к следующей прибавить 3.

3) Уменьшить любую достаточно большую цифру на 7.

Если в результате какой-то из этих операций в числе на одном или нескольких первых местах оказываются нули, они автоматически отбрасываются.

Изначально на доске было записано число из ста девяток. В конце осталось однозначное число. Какое именно?

Ответ: 3

Решение:

Первая операция соответствует вычитанию числа вида $910 \cdot 0$, вторая и третья — вычитанию $70 \cdot 0$. Обе эти операции не меняют остаток от деления исходного числа на 7, так как 91 делится на 7.

$1001 = cdot91$, а $999999 = 999 \cdot 1001$. Значит, для вычисления остатка от деления исходного числа на 7, количество девяток, кратное 6, можно отбросить. Остаётся число $9999 = 9009 + 987 + 3 = 9 \cdot 1001 + 7 \cdot 141 + 3$ даёт остаток 3.

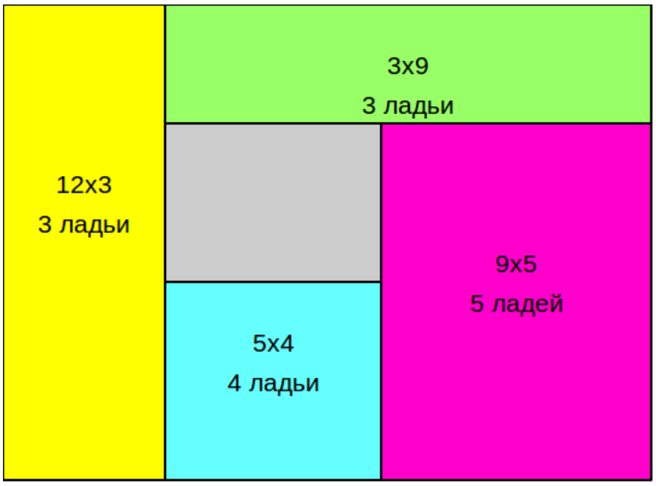
8. (5 баллов) Из клетчатого поля 12×12 вырезали квадрат 4×4, лежащий на пересечении горизонталей с четвёртой по седьмую и таких же вертикалей. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ладей можно расставить на этом поле, если ладьи не бьют через вырезанные клетки?

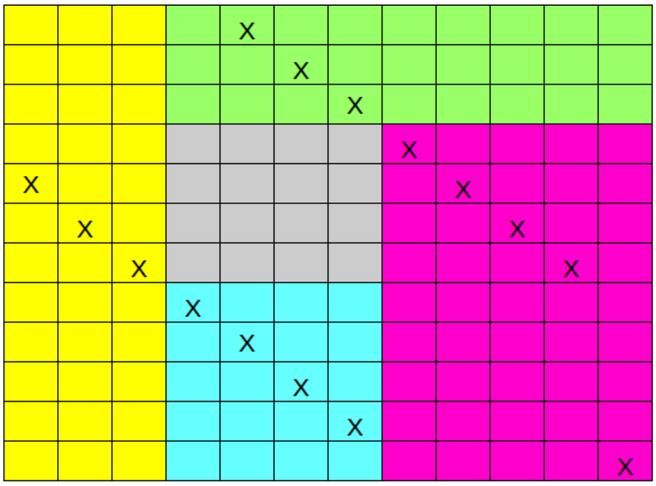
Ответ: 15

Решение:

Доступная часть доски разрезается на следующие четыре области, в каждой из которых может стоять не больше указанного количества ладей (см. левый рисунок), так как в каждом прямоугольнике не может стоять большей ладей, чем длина его меньшей стороны. Значит, общее количество ладей не превосходит 15.

Пример для 15 ладей изображён на правом рисунке.





7 класс, I отборочный тур.

Задача 1. (1 балл)

1. Через точку проведены 100 различных прямых. Известно, что все углы между ними имеют целые значения в градусах. Какое наибольшее значение (в градусах) может принимать угол между двумя соседними прямыми (т. е. угол, внутри которого нет больше ни одной прямой)?

Ответ: 81

2. Через точку проведены 120 различных прямых. Известно, что все углы между ними имеют целые значения в градусах. Какое наибольшее значение (в градусах) может принимать угол между двумя соседними прямыми (т. е. угол, внутри которого нет больше ни одной прямой)?

Ответ: 61

3. Через точку проведены 90 различных прямых. Известно, что все углы между ними имеют целые значения в градусах. Какое наибольшее значение (в градусах) может принимать угол между двумя соседними прямыми (т. е. угол, внутри которого нет больше ни одной прямой)?

Ответ: 91

<u>Примеры записи ответов:</u>
45

Задача 2. (2 балла)

1. У Наташи есть пять отрезков различной длины. Четыре из них имеют длины 5, 6, 8 и 9. Из любых трёх можно составить треугольник. Какие целочисленные значения может принимать длина пятого отрезка? Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 7; 10 || 7, 10 || 10; 7 || 10, 7

2. У Антона есть четыре отрезка различной длины. Три из них имеют длины 4, 5 и 7. Из любых трёх можно составить треугольник. Какие целочисленные значения может принимать длина пятого отрезка? Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 6; 8 || 6, 8 || 8; 6 || 8, 6

3. У Алисы есть шесть отрезков различной длины. Пять из них имеют длины 6, 7, 8, 9 и 11. Из любых трёх можно составить треугольник. Какие целочисленные значения может принимать длина пятого отрезка? Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 12; 10 || 12, 10 || 10; 12 || 10, 12

<u>Примеры записи ответов:</u>
5
5; 9

Задача 3. (2 балла)

1. Два гонщика со скоростями 100 м/с и 40 м/с стартовали одновременно в одном направлении из одного места круглой трассы длины 800 м. Сколько раз гонщики встретились после старта, если оба ехали в течение 200 секунд?

Ответ: 15

2. Два гонщика со скоростями 100 м/с и 60 м/с стартовали одновременно в одном направлении из одного места круглой трассы длины 700 м. Сколько раз гонщики встретились после старта, если оба ехали в течение 280 секунд?

Ответ: 16

3. Два гонщика со скоростями 100 м/с и 70 м/с стартовали одновременно в одном направлении из одного места круглой трассы длины 800 м. Сколько раз гонщики встретились после старта, если оба ехали в течение 320 секунд?

Ответ: 12

Примеры записи ответов:
45

Задача 4 (2 балла).

1. При каких натуральных n число $7n$ - 2 делится на число $3n + 1$? Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 4

2. При каких натуральных n число $11n + 4$ делится на число $5n + 3$? Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 2

3. При каких натуральных n число $5n + 3$ делится на число $2n + 5$? Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 7

Примеры записи ответов:
45

Задача 5. (3 балла)

1. В комнате находятся рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. 10 из них сказали: «В этой комнате рыцарей больше, чем лжецов». 12 сказали «В этой комнате лжецов больше, чем рыцарей». Оставшиеся 22 сказали: «В этой комнате лжецов и рыцарей поровну». Сколько лжецов могло быть в комнате? Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 22, 32 || 32, 22 || 22; 32 || 32; 22

2. В комнате находятся рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. 10 из них сказали: «В этой комнате рыцарей больше, чем лжецов». 15 сказали «В этой комнате лжецов больше, чем рыцарей». Оставшиеся 25 сказали: «В этой комнате лжецов и рыцарей поровну». Сколько лжецов могло быть в комнате? Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 25, 35 || 35, 25 || 25; 35 || 35; 25

3. В комнате находятся рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. 15 из них сказали: «В этой комнате рыцарей больше, чем лжецов». 12 сказали «В этой комнате лжецов больше, чем рыцарей». Оставшиеся 27 сказали: «В этой комнате лжецов и рыцарей поровну». Сколько лжецов могло быть в комнате? Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 27, 42 || 42, 27 || 27; 42 || 42; 27

Примеры записи ответов:
45
45; 60

Задача 6. (3 балла)

1. Вова выписал на доску сумму цифр каждого из чисел от 1 до 600 включительно. Чему равна сумма чисел на доске?

Ответ: 6906

2. Дима выписал на доску сумму цифр каждого из чисел от 1 до 700 включительно. Чему равна сумма чисел на доске?

Ответ: 8407

3. Митя выписал на доску сумму цифр каждого из чисел от 1 до 800 включительно. Чему равна сумма чисел на доске?

Ответ: 10008

Примеры записи ответов:
12345

Задача 7. (3 балла)

1. У Ани было две чашки чая с молоком, объемом V и 2V, процентное содержание молока в которых равно соответственно 15% и 21% объёма. Аня перелила обе эти чашки в одну большую кружку, добавив туда еще 4 ложки молока, в итоге получился раствор с содержанием молока 25%. Какую часть объём ложки составляет от объёма V?

Ответ: 0,06 || 0.06 || 6% || 6/100 || 3/50

2. У Ани было две чашки чая с молоком, объемом V и 2V, процентное содержание молока в которых равно соответственно 16% и 14% объёма. Аня перелила обе эти чашки в одну

большую кружку, добавив туда еще 5 ложек молока, в итоге получился раствор с содержанием молока 20%. Какую часть объём ложки составляет от объёма V?

Ответ: 0,04 || 0.04 || 4% || 1/25 || 4/100

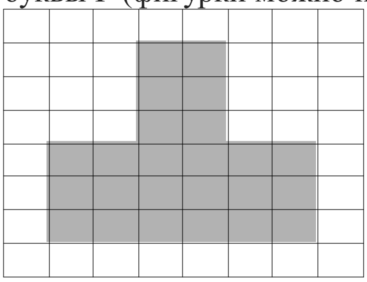
3. У Ани было две чашки чая с молоком, объемом V и 5V, процентное содержание молока в которых равно соответственно 5% и 2% объёма. Аня перелила обе эти чашки в одну большую кружку, добавив туда еще 10 ложек молока, в итоге получился раствор с содержанием молока 10%. Какую часть объём ложки составляет от объёма V?

Ответ: 0,05 || 0.05 || 5% || 1/20 || 5/100

<u>Примеры записи ответов</u>:
0,01
1%
1/100

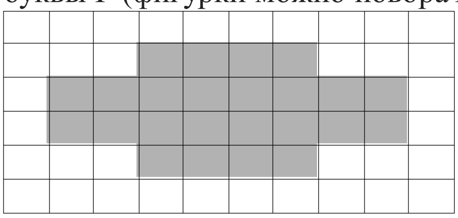
Задача 8. (3 балла)

1. Сколькими способами можно разбить данную фигуру на фигурки из четырёх клеток в виде буквы Г (фигурки можно поворачивать и переворачивать).



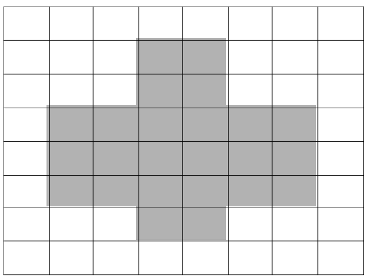
Ответ: 10

2. Сколькими способами можно разбить данную фигуру на фигурки из четырёх клеток в виде буквы Г (фигурки можно поворачивать и переворачивать).



Ответ: 6

3. Сколькими способами можно разбить данную фигуру на фигурки из четырёх клеток в виде буквы Г (фигурки можно поворачивать и переворачивать).



Ответ: 4

<u>Примеры записи ответов:</u>
45

Задача 9. (5 баллов)

1. У Ани есть 4 золотых слитка различных целочисленных весов. Помогите Ане узнать, сколько весит самый тяжёлый слиток, если она помнит несколько попарных сумм весов слитков: 8, 9, 11, 12 и 14.
Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 9

2. У Ани есть 4 золотых слитка различных целочисленных весов. Помогите Ане узнать, сколько весит самый тяжёлый слиток, если она помнит несколько попарных сумм весов слитков: 7, 9, 10, 11, 14.
Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 8

3. У Ани есть 4 золотых слитка различных целочисленных весов Помогите Ане узнать, сколько весит самый тяжёлый слиток, если она помнит несколько попарных сумм весов слитков: 10, 13, 14, 15 и 16. Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 10

<u>Примеры записи ответов:</u>
5
5; 9

Задача 10. (5 баллов)

1. Мальчик Женя живёт в доме, где всего 100 этажей. Между соседними этажами лифт едет 1 секунду. К сожалению, в лифте работают только две кнопки «+11 этажей» и «-7 этажей». Кнопки нажимаются мгновенно.
Какое наименьшее количество секунд займёт у Жени дорога домой с 1 этажа на 25 этаж? (Лифт может поехать только на существующий этаж)

Ответ: 108

2. Мальчик Женя живёт в доме, где всего 100 этажей. Между соседними этажами лифт едет 1 секунду. К сожалению, в лифте работают только две кнопки «+11 этажей» и «-5 этажей». Кнопки нажимаются мгновенно.
Какое наименьшее количество секунд займёт у Жени дорога домой с 1 этажа на 27 этаж? (Лифт может поехать только на существующий этаж)

Ответ: 106

3. Мальчик Женя живёт в доме, где всего 100 этажей. Между соседними этажами лифт едет 1 секунду. К сожалению, в лифте работают только две кнопки «+13 этажей» и «-7 этажей». Кнопки нажимаются мгновенно.
Какое наименьшее количество секунд займёт у Жени дорога домой с 1 этажа на 24 этаж? (Лифт может поехать только на существующий этаж)

Ответ: 107

Примеры записи ответов:
45

II отборочный тур.
7 класс.

Задача 1. (1 балл)

1. У марсианских пауков 100 лапок. На Всемирном Съезде Пауков некоторые пауки поздоровались между собой (пожали друг другу лапки). Оказалось, что пауки, которые хотя бы раз поздоровались, использовали все свои лапки и не здоровались одной лапкой больше, чем с одним пауком. Какое минимальное количество пауков могло прийти?

Ответ: 101

2. У марсианских пауков 200 лапок. На Всемирном Съезде Пауков некоторые пауки поздоровались между собой (пожали друг другу лапки). Оказалось, что пауки, которые хотя бы раз поздоровались, использовали все свои лапки и не здоровались одной лапкой больше, чем с одним пауком. Какое минимальное количество пауков могло прийти?

Ответ: 201

3. У марсианских пауков 300 лапок. На Всемирном Съезде Пауков некоторые пауки поздоровались между собой (пожали друг другу лапки). Оказалось, что пауки, которые хотя бы раз поздоровались, использовали все свои лапки и не здоровались одной лапкой больше, чем с одним пауком. Какое минимальное количество пауков могло прийти?

Ответ: 301

Задача 2. (2 балла)

1. У Ани в комнате живут лягушки и пауки, которых надо кормить сушеными мухами (и те, и другие присутствуют). Каждая лягушка съедает либо 6, либо 7 мух за день, а каждый паук — либо 2, либо 3 мух за день. Аня знает, что если вскроет 4 коробки с мухами, то их точно не хватит, чтобы все поели, а если 5 коробок, то их точно хватит. Сколько у Ани живет лягушек, если в каждой коробке 12 мух?

Ответ: 8

2. У Ани в комнате живут лягушки и пауки, которых надо кормить сушеными мухами (кого-то из них может не быть). Каждая лягушка съедает либо 5, либо 6 мух за день, а каждый паук — либо 2, либо 3 мух за день. Аня знает, что если вскроет 4 коробки с мухами, то их точно не хватит, чтобы все поели, а если 5 коробок, то их точно хватит. Сколько у Ани живет лягушек, если в каждой коробке 11 мух?

Ответ: 9

3. У Ани в комнате живут лягушки и пауки, которых надо кормить сушеными мухами (и те, и другие присутствуют). Каждая лягушка съедает либо 5, либо 6 мух за день, а каждый паук — либо 3, либо 4 мух за день. Аня знает, что если вскроет 4 коробки с мухами, то их точно не хватит, чтобы все поели, а если 5 коробок, то их точно хватит. Сколько у Ани живет лягушек, если в каждой коробке 13 мух?

Ответ: 8

Задача 3. (2 балла)

1. Петя два дня подряд ходил в магазин и оба раза купил булочек ровно на 100 рублей. При этом во второй день булочка стоила на рубль дороже, чем в первый. Булочки всегда стоят целое количество рублей.

Сколько булочек Петя купил за два дня? Если возможных вариантов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов: 10

10; 20

Ответ: 150; 45 || 150; 45; || 150, 45 || 45; 150 || 45, 150 || 45; 150;

2. Петя два дня подряд ходил в магазин и оба раза купил булочек ровно на 84 рубля. При этом во второй день булочка стоила на рубль дороже, чем в первый, а в первый дороже двух рублей. Булочки всегда стоят целое количество рублей.

Сколько булочек Петя купил за два дня? Если возможных вариантов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов:

10

10; 20

Ответ: 26; 49 || 26; 49; || 26, 49 || 49; 26 || 49, 26 || 49; 26;

3. Петя два дня подряд ходил в магазин и оба раза купил булочек ровно на 56 рублей. При этом во второй день булочка стоила на рубль дороже, чем в первый. Булочки всегда стоят целое количество рублей.

Сколько булочек Петя купил за два дня? Если возможных вариантов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов:

10

10; 20

Ответ: 84; 15 || 84; 15; || 84, 15 || 15; 84 || 15, 84 || 15; 84;

Задача 4. (2 балла)

1. На очень длинной дороге устроили забег. 20 бегунов стартовали в разное время, каждый бежал с постоянной скоростью. Забег продолжался, пока каждый бегун не обогнал всех более медленных. Скороси бегунов, стартовавших первым и последним, совпадали, скорости остальных отличались от их скоростей и были различны между собой.

Каким могло быть число обгонов, если в каждом участвовало ровно два человека? В ответе укажите наибольшее и наименьшее возможные числа в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов:

10; 20

Ответ: 18; 171 || 171; 18 || 18, 171 || 171, 18 || 18; 171; || 171; 18

Примеры записи ответов: 10; 20

2. На очень длинной дороге устроили забег. 22 бегуна стартовали в разное время, каждый бежал с постоянной скоростью. Забег продолжался, пока каждый бегун не обогнал всех более медленных. Скороси бегунов, стартовавших первым и последним, совпадали, скорости остальных отличались от их скоростей и были различны между собой.

Каким могло быть число обгонов, если в каждом участвовало ровно два человека? В ответе укажите наибольшее и наименьшее возможные числа в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов:

10; 20

Ответ: 20; 210 || 210; 20 || 20, 210 || 210, 20 || 20; 210; || 210; 20

3. На очень длинной дороге устроили забег. 21 бегун стартовал в разное время, каждый бежал с постоянной скоростью. Забег продолжался, пока каждый бегун не обогнал всех более медленных. Скороси бегунов, стартовавших первым и последним, совпадали, скорости остальных отличались от их скоростей и были различны между собой.

Каким могло быть число обгонов, если в каждом участвовало ровно два человека? В ответе укажите наибольшее и наименьшее возможные числа в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов:

10; 20

Ответ: 19; 190 || 190; 19 || 19, 190 || 190, 19 || 19; 190; || 190; 19

Задача 5. (3 балла)

1. У Васи есть по 10 палочек длины 1, 2 и 3 (все палочки отличаются друг от друга). Сколькими способами Вася может составить треугольник?

Ответ: 2160

2. У Васи есть по 11 палочек длины 2, 3 и 4 (все палочки отличаются друг от друга). Сколькими способами Вася может составить треугольник?

Ответ: 3520

3. У Васи есть по 9 палочек длины 2, 3 и 5 (все палочки отличаются друг от друга). Сколькими способами Вася может составить треугольник?

Ответ: 1872

Задача 6. (3 балла)

1. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (не являющейся серединой ни одной из диагоналей) и делят этот четырёхугольник на четыре равнобедренных треугольника. $BO = 8$, $AB = 5$. Найдите AC.

Ответ: 13

2. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (не являющейся серединой ни одной из диагоналей) и делят этот четырёхугольник на четыре равнобедренных треугольника. $DO = 9$, $AD = 7$. Найдите AC.

Ответ: 16

3. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (не являющейся серединой ни одной из диагоналей) и делят этот четырёхугольник на четыре равнобедренных треугольника. $CO = 9$, $CD = 5$. Найдите BD.

Ответ: 14

Задача 7. (3 балла)

1. На конференции собрались представители рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда лгут (и те, и другие присутствуют). Все присутствующие ответили на вопрос: «Каков процент рыцарей среди участников конференции?». На него были получены ответы 6%, 12%, 18%, ..., 96% (каждый, возможно, несколько раз). Какое наименьшее количество рыцарей могло быть на конференции?

Ответ: 3

2. На конференции собрались представители рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда лгут (и те, и другие присутствуют). Все присутствующие ответили на вопрос: «Каков процент рыцарей среди участников конференции?». На него были получены ответы 8%, 16%, 24%, ..., 96% (каждый, возможно, несколько раз). Какое наименьшее количество рыцарей могло быть на конференции?

Ответ: 2

3. На конференции собрались представители рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда лгут (и те, и другие присутствуют). Все присутствующие ответили на вопрос: «Каков процент рыцарей среди участников конференции?». На него были получены ответы 14%, 28%, 42%, ..., 98% (каждый, возможно, несколько раз). Какое наименьшее количество рыцарей могло быть на конференции?

Ответ: 7

Задача 8. (4 балла)

1. Найдите наименьшее четырёхзначное число без нулей, состоящее из различных цифр, такое, что при вычёркивании из него любой цифры получается число, делящееся на эту цифру.

Ответ: 1326

2. Найдите наименьшее пятизначное число без нулей, состоящее из различных цифр, такое, что при вычёркивании из него любой цифры получается число, делящееся на эту цифру.

Ответ: 12648

3. Найдите наибольшее трёхзначное число без нулей, состоящее из различных цифр, такое, что при вычёркивании из него любой цифры получается число, делящееся на эту цифру.

Ответ: 742

Задача 9. (4 балла)

1. В клетчатом квадрате 10×10 закрасили некоторое количество клеток. Затем в каждой незакрашенной клетке написали количество соседних с ней закрашенных. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел?

Ответ: 180

2. В клетчатом квадрате 11×11 закрасили некоторое количество клеток. Затем в каждой незакрашенной клетке написали количество соседних с ней закрашенных. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел?

Ответ: 220

3. В клетчатом квадрате 9×9 закрасили некоторое количество клеток. Затем в каждой незакрашенной клетке написали количество соседних с ней закрашенных. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел?

Ответ: 144

Задача 10. (5 баллов)

1. Изначально на доске записаны числа 1, 2 и 4. Каждую минуту Антон стирает написанные на доске числа и пишет вместо них их попарные суммы. Через час на доске оказались написаны три огромных числа. Каковы их последние цифры? Перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов:

1; 2; 3

Ответ: 6; 7; 9 || 6; 9; 7 || 7; 9; 6 || 7; 6; 9 || 9; 6; 7 || 9; 7; 6

2. Изначально на доске записаны числа 2, 3 и 4. Каждую минуту Антон стирает написанные на доске числа и пишет вместо них их попарные суммы. Через час на доске оказались написаны три огромных числа. Каковы их последние цифры? Перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов:

1; 2; 3

Ответ: 7; 8; 9 || 7; 9; 8 || 7; 9; 8 || 7; 8; 9 || 9; 7; 8 || 9; 7; 3

3. Изначально на доске записаны числа 2, 3 и 6. Каждую минуту Антон стирает написанные на доске числа и пишет вместо них их попарные суммы. Через час на доске оказались написаны три огромных числа. Каковы их последние цифры? Перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов:

1; 2; 3

Ответ: 8; 7; 1 || 8; 1; 7 || 7; 1; 8 || 7; 8; 1 || 1; 8; 7 || 1; 7; 8

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

8 класс

1 вариант

1. (2 балла) Существует ли прямоугольный параллелепипед с целочисленными сторонами, у которого площадь поверхности численно равна объёму?

Ответ: Да, существует.

Решение: Подходит, например, куб $6 \times 6 \times 6$. И площадь поверхности, и объём численно равны 216.

2. (3 балла) На большем основании AD равнобедренной трапеции $ABCD$ отмечена точка X так, что $AB = AX$. На луче AB выбрана точка E такая, что $DE \parallel BX$. Докажите, что $AD + CE \geqslant BE + ED$.

Решение: $AB = AX$, $DE \parallel BX$, значит, по теореме Фалеса, $AD = AE$. По неравенству треугольника $CE + CD \geqslant DE$, но $CD = AB$, так как трапеция равнобедренная. Исходя из всего вышеперечисленного, $AD + CE = AE + CE = AB + BE + CE \geqslant BE + ED$.

3. (3 балла) Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 20. Биссектриса угла B пересекает прямые AD и CD в точках K и L соответственно. Найдите CL, если известно, что $DK = 4$.

Ответ: 3 или 7

Решение: $\angle ABK = \angle BLC$, как накрест лежащие. Аналогично $\angle CBL = \angle BKA$. Поскольку точки B, K и L лежат на биссектрисе, все эти четыре угла равны.

$\angle BKA = \angle DKL$: в зависимости от того, какая из точек K и L лежит на стороне параллелограмма, а какая — снаружи, это либо один и тот же угол, либо два вертикальных угла. Аналогично $\angle DLK = \angle BLC$, откуда треугольник DLK равнобедренный, $DK = DL = 4$.

Также равнобедренными оказываются треугольники BCL и BAK: $L = BC$ и $AB = AK$. Значит, большая и меньшая стороны параллелограмма отличаются на длину $DK = DL = 4$. Так как периметр параллелограмма равен 20, эти стороны 7 и 3.

$L = BC$, значит, $L = 7$ или $L = 3$, в зависимости от того, является ли BC большей или меньшей стороной параллелограмма, а это в свою очередь зависит от того, какая из точек K и L лежит на стороне параллелограмма, а какая снаружи.

4. (3 балла) Из множества трёхзначных чисел, не содержащих в своей записи цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, выписали на бумагу несколько чисел таким образом, что никакие два числа не могут быть получены друг из друга перестановкой двух рядом стоящих цифр. Какое наибольшее количество таких чисел могло быть написано?

Ответ: 40

Решение:

На то, может быть написано число или нет, влияют только числа, состоящие из того же набора цифр.

Допустим, написано какое-то число АБВ, состоящее из трёх различных цифр. Это значит, что числа БАВ и АВБ уже не могут быть написаны. Среди чисел, состоящих из этих же цифр остались БВА, ВАБ и ВБА. Первые два могут быть записаны вместе, а третье не может быть записано вместе ни с одним из остальных. Значит, среди шести чисел состоящих из цифр А, Б и В могут быть записаны максимум 3. Существует 4 способа выбрать цифры А, Б, В среди 6, 7, 8 и 9. Всего получается максимум 12 чисел.

Среди чисел ААБ, АБА, БАА могут быть записаны максимум 2: ААБ и БАА. Цифра А выбирается 4 способами, цифра Б тремя, значит, получается 24 числа.

И, наконец, все 4 числа, состоящие из трёх одинаковых цифр каждое, могут быть выписаны. Итого получается 40 чисел.

5. (3 балла) Решите уравнение $a + b + \text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b) = 143$.

Ответ: Решений нет

Решение:

Обозначим $d = \text{НОД}(a, b)$. Тогда для каких-то k и l выполняются равенства $a = kd$, $b = ld$, $\text{НОК}(a, b) = kld$. Соответственно, уравнение принимает вид $kd + ld + d + kld = 143$ или $(k+1)(l+1)d = 11 \cdot 13$. Поскольку $k+1$ и $l+1$ больше 1, какое-то из них равно 11, а какое-то равно 13. Следовательно $d = 1$, $a = k$, $b = l$, то есть всего два возможных ответа: $a = 10$, $b = 12$ или наоборот.

Однако, эти числа не взаимно простые ($d \neq 1$), поэтому на самом деле они не подходят.

6. (3 балла) На клетчатой доске 3×3 стоят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый из них сказал: «Среди моих соседей ровно три лжеца». Сколько лжецов на доске?

Соседями считаются люди, находящиеся на клетках, имеющих общую сторону.

Ответ: 5.

Решение: На угловых клетках, очевидно, стоят лжецы: у них просто нет трёх соседей.

Если в центре стоит рыцарь, тогда все люди на боковых клетках также оказываются лжецами. Но в этом случае у рыцаря 4 соседа лжеца, а не три. Получаем противоречие.

Если же в центре лжец, то у людей на боковых клетках оказываются по три соседа лжеца, то есь они рыцари. Теперь проверяем, что человек в центре действительно лжец: у него нет трёх соседей лжецов.

7. (4 балла) По кругу стоят 23 блюдечка, на них разложены 46 пирожков. За один ход разрешается взять 2 пирожка, лежащие на одном блюдечке, и переложить их на 2 соседних блюдечка. При любом ли начальном расположении пирожков можно добиться того, чтобы на всех блюдечках оказалось поровну пирожков?

Ответ: Нет, не при любом.

Решение: Занумеруем блюдечки по порядку числами от 0 до 22. Для каждого пирожка возьмём номер блюдечка, на котором он находится. Заметим, что сумма этих 46 чисел не будет менять свой остаток при делении на 23: один из пирожков всегда передвигается на тарелочку с номером, большим на 1 или с номером, меньшим на 22, а второй — наоборот, с номером, меньшим на 1 или с номером, большим на 22.

В конечной позиции сумма этих чисел даёт фиксированный остаток, а в начальной позиции этот остаток может быть сделан каким угодно: например, мы можем положить все пирожки, кроме одного, на блюдечко с номером 0, а последний положить на блюдечко с каким угодно номером.

Значит, можно добиться того, чтобы в начальной позиции сумма этих пятидесяти чисел давала не тот остаток при делении на 23, который требуется в конечной позиции. Соответственно, получается начальная позиция, из которой невозможно достигнуть требуемой конечной.

8. (4 балла) Десятичную запись четырёхзначного число АБВГ, состоящего из различных цифр, разбили на три части тремя способами, после чего составили три квадратных уравнения $\text{А}x^2 + \text{Б}x + \text{ВГ} = 0$, $\text{А}x^2 + \text{БВ}x + \text{Г} = 0$ и $\text{АБ}x^2 + \text{В}x + \text{Г} = 0$. Оказалось, что все они имеют корни. Найдите все возможные значения АБВГ.

АБ, БВ и ВГ здесь не произведения цифр, а двузначные числа. Не только в записи числа АБВГ, но и в записях этих двухзначных чисел первые цифры не могут быть равны 0.

Ответ: 1920 или 2910.

Решение: Докажем сначала, что $\text{Г} = 0$. Из первого уравнения получаем, что $\text{Б}^2 \geqslant 4 \cdot \text{А} \cdot \text{ВГ}$. Поскольку $\text{Б}^2 \leqslant 81$, получаем, что $\text{ВГ} \leqslant 20$, то есть $\text{Г} = 0$ или $\text{В} = 1$ (так как нулю никакая цифра, кроме Г, не может быть равна).

Если $\text{В} = 1$, из третьего уравнения получаем $1 = \text{В}^2 > 4 \cdot \text{АБ} \cdot \text{Г}$, что возможно только когда правая часть равна 0, то есть когда $\text{Г} = 0$. Это условие обеспечивает наличие корней у второго и третьего уравнений.

Вернёмся к первому уравнению. $\text{ВГ} = 10 \cdot \text{В}$, откуда $81 \geqslant \text{Б}^2 \geqslant 40 \cdot \text{А} \cdot \text{В}$. Поскольку А и В это различные цифры, одна из них равна 1, а вторая — 2. Также мы получаем, что $\text{Б}^2 \geqslant 80$, откуда $\text{Б} = 9$.

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

8 класс

2 вариант

1. (2 балла) Существует ли прямоугольный параллелепипед с целочисленными сторонами, у которого площадь поверхности численно равна сумме длин всех двенадцати рёбер?

Ответ: Да, существует.

Решение: Подходит, например, куб $2 \times 2 \times 2$. И площадь, и сумма длин рёбер составляют 24.

2. (3 балла) На большем основании AD равнобедренной трапеции $ABCD$ отмечена точка K так, что $DK = CD$. На луче DC выбрана точка L такая, что $AL \parallel CK$. Докажите, что $AL + CL \leqslant AD + BL$.

Решение: $DK = CD$, $AL \parallel CK$, значит, по теореме Фалеса, $AD = DL$. По неравенству треугольника $AB + BL \geqslant AL$, но $CD = AB$, так как трапеция равнобедренная. Исходя из всего вышеперечисленного, $AD + BL = DL + BL = CD + CL + BL = AB + BL + CL \geqslant AL + CL$.

3. (3 балла) Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 32. Биссектриса угла C пересекает прямые AD и AB в точках E и F соответственно. Найдите, чем равно BF, если известно, что $AE = 2$.

Ответ: 7 или 9

Решение: $\angle BCE = \angle CED$, как накрест лежащие. Аналогично $\angle BFC = \angle FCD$. Поскольку точки C, E и F лежат на биссектрисе, все эти четыре угла равны.

$\angle BFC = \angle AFE$: в зависимости от того, какая из точек E и F лежит на стороне параллелограмма, а какая — снаружи, это либо один и тот же угол, либо два вертикальных угла. Аналогично $\angle CED = \angle AEF$, откуда треугольник AFE равнобедренный, $AE = AF = 2$.

Также равнобедренными оказываются треугольники FBC и CED: $BF = BC$ и $CD = ED$. Значит, большая и меньшая стороны параллелограмма отличаются на длину $AE = AF = 2$. Так как периметр параллелограмма равен 32, эти стороны 7 и 9.

$BF = BC$, значит, $BF = 7$ или $BF = 9$, в зависимости от того, является ли BC большей или меньшей стороной параллелограмма, а это в свою очередь зависит от того, какая из точек E и F лежит на стороне параллелограмма, а какая снаружи.

4. (3 балла) Из множества трёхзначных чисел, не содержащих в своей записи цифр 0, 6, 7, 8, 9, выписали на бумагу несколько чисел таким образом, что никакие два числа не могут быть получены друг из друга перестановкой двух рядом стоящих цифр. Какое наибольшее количество таких чисел могло быть написано?

Ответ: 75

Решение:

На то, может быть написано число или нет, влияют только числа, состоящие из того же набора цифр.

Допустим, написано какое-то число АБВ, состоящее из трёх различных цифр. Это значит, что числа БАВ и АВБ уже не могут быть написаны. Среди чисел, состоящих из этих же цифр остались БВА, ВАБ и ВБА. Первые два могут быть записаны вместе, а третье не может быть записано вместе ни с одним из остальных. Значит, среди шести чисел состоящих из цифр А, Б и В могут быть записаны максимум 3. Существует 10 способов выбрать цифры А, Б, В среди 1, 2, 3, 4 и 5. Всего получается максимум 30 чисел.

Среди чисел ААБ, АБА, БАА могут быть записаны максимум 2: ААБ и БАА. Цифра А выбирается пятью способами, цифра Б четырьмя, значит, получается 40 чисел.

И, наконец, все 5 чисел, состоящие из трёх одинаковых цифр каждое, могут быть выписаны. Итого получается 75 чисел.

5. (3 балла) Решите уравнение $a + b + \text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b) = 187$.

Ответ: $a = 10$, $b = 16$ или наоборот.

Решение:

Обозначим $d = \text{НОД}(a,b)$. Тогда для каких-то k и l выполняются равенства $a = kd$, $b = ld$, $\text{НОК}(a,b) = kld$. Соответственно, уравнение принимает вид $kd + ld + d + kld = 187$ или $(k+1)(l+1)d = 11 \cdot 17$. Поскольку $k+1$ и $l+1$ больше 1, какое-то из них равно 11, а какое-то равно 17. Следовательно $d = 1$, $a = k$, $b = l$, то есть всего два возможных ответа: $a = 10$, $b = 16$ или наоборот.

Однако, эти числа не взаимно простые ($d \neq 1$), поэтому на самом деле они не подходят.

6. (3 балла) На клетчатой доске 2×4 стоят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый из них сказал: «Среди моих соседей ровно три лжеца». Сколько лжецов на доске?

Соседями считаются люди, находящиеся на клетках, имеющих общую сторону.

Ответ: 6.

Решение: На угловых клетках, очевидно, стоят лжецы: у них просто нет трёх соседей.

Ситуация, когда все люди на доске — лжецы невозможна, так как получается, что четверо из этих лжецов говорят правду.

Значит, есть хотя бы один рыцарь. Тогда все его соседи лжецы, и получается следующая ситуация (точностью до симметрии):

Л	Р	Л	Л
Л	Л	?	Л

На клетке, помеченной вопросиком, может стоять только рыцарь, поскольку все его соседи лжецы. Не забудем проверить, что у его левого и верхнего соседа при это только два соседа лжеца, то есть они действительно говорят неправду.

Таким образом получается 6 лжецов.

7. (4 балла) По кругу стоят 25 тарелочек, на них разложены 50 булочек. За один ход разрешается взять 2 булочки, лежащие на одной тарелочке, и переложить их на 2 соседних тарелочки. При любом ли начальном расположении булочек можно добиться того, чтобы на всех тарелочках оказалось поровну булочек?

Ответ: Нет, не при любом.

Решение: Занумеруем тарелочки по порядку числами от 0 до 24. Для каждой булочки возьмём номер тарелочки, на которой она находится. Заметим, что сумма этих пятидесяти чисел не будет менять свой остаток при делении на 25: одна из булочек всегда передвигается на тарелочку с номером, большим на 1 или с номером, меньшим на 24, а вторая — наоборот, с номером, меньшим на 1 или с номером, большим на 24.

В конечной позиции сумма этих чисел даёт фиксированный остаток, а в начальной позиции этот остаток может быть сделан каким угодно: например, мы можем положить все булочки, кроме одной, на тарелочку с номером 0, а последнюю положить на тарелочку с каким угодно номером.

Значит, можно добиться того, чтобы в начальной позиции сумма этих пятидесяти чисел давала не тот остаток при делении на 25, который требуется в конечной позиции. Соответственно, получается начальная позиция, из которой невозможно достигнуть требуемой конечной.

8. (4 балла) Десятичную запись четырёхзначного число АБВГ, не содержащего девяток, разбили на три части тремя способами, после чего составили три квадратных уравнения $\text{А}x^2 + \text{Б}x + \text{ВГ} = 0$, $\text{А}x^2 + \text{БВ}x + \text{Г} = 0$ и $\text{АБ}x^2 + \text{В}x + \text{Г} = 0$. Оказалось, что все они имеют корни. Найдите все возможные значения АБВГ.

АБ, БВ и ВГ здесь не произведения цифр, а двузначные числа. Не только в записи числа АБВГ, но и в записях этих двухзначных чисел первые цифры не могут быть равны 0.

Ответ: 1710 или 1810.

Решение: Из первого уравнения получаем, что $\text{Б}^2 \geqslant 4 \cdot \text{А} \cdot \text{ВГ}$. Поскольку по условию $\text{Б}^2 \leqslant 64$, получаем, что $\text{ВГ} \leqslant 16$, то есть $\text{В} = 1$ (так как нулю никакая цифра, кроме Г, не может быть равна).

С другой стороны, из третьего уравнения получаем $1 = \text{В}^2 > 4 \cdot \text{АБ} \cdot \text{Г}$, что возможно только когда правая часть равна 0, то есть когда $\text{Г} = 0$. Это условие обеспечивает наличие корней у второго и третьего уравнений.

Вернёмся к первому уравнению: $64 \geqslant \text{Б}^2 \geqslant 40 \cdot \text{А}$. Отсюда А $= 1$, а Б это 7 или 8.

8 класс, I отборочный тур.

Задача 1. (1 балл)

1. У Наташи есть пять отрезков различной длины. Четыре из них имеют длины 5, 6, 8 и 9. Из любых трёх можно составить треугольник. Какие целочисленные значения может принимать длина пятого отрезка? Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 7; 10 || 7, 10 || 10; 7 || 10, 7

2. У Антона есть четыре отрезка различной длины. Три из них имеют длины 4, 5 и 7. Из любых трёх можно составить треугольник. Какие целочисленные значения может принимать длина пятого отрезка? Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 6; 8 || 6, 8 || 8; 6 || 8, 6

3. У Алисы есть шесть отрезков различной длины. Пять из них имеют длины 6, 7, 8, 9 и 11. Из любых трёх можно составить треугольник. Какие целочисленные значения может принимать длина пятого отрезка? Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 12; 10 || 12, 10 || 10; 12 || 10, 12

Примеры записи ответов:
5
5; 9

Задача 2. (2 балла)

1. В комнате находятся рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. 10 из них сказали: «В этой комнате рыцарей больше, чем лжецов». 12 сказали «В этой комнате лжецов больше, чем рыцарей». Оставшиеся 22 сказали: «В этой комнате лжецов и рыцарей поровну». Сколько лжецов могло быть в комнате? Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 22, 32 || 32, 22 || 22; 32 || 32; 22

2. В комнате находятся рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. 10 из них сказали: «В этой комнате рыцарей больше, чем лжецов». 15 сказали «В этой комнате лжецов больше, чем рыцарей». Оставшиеся 25 сказали: «В этой комнате лжецов и рыцарей поровну». Сколько лжецов могло быть в комнате? Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 25, 35 || 35, 25 || 25; 35 || 35; 25

3. В комнате находятся рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. 15 из них сказали: «В этой комнате рыцарей больше, чем лжецов». 12 сказали «В этой комнате лжецов больше, чем рыцарей». Оставшиеся 27 сказали: «В этой комнате лжецов и рыцарей поровну». Сколько лжецов могло быть в комнате? Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 27, 42 || 42, 27 || 27; 42 || 42; 27

Примеры записи ответов:
45
45; 60

Задача 3. (2 балла)

1. В параллелограмме ABCD точка K лежит на стороне AD, а точка L — на стороне BC. Оказалось, что BK — биссектриса угла B, а DL — биссектриса угла D. При этом четырёхугольник BLDK — ромб. AK = 5, BK = 6. Найдите периметр параллелограмма ABCD.

Ответ: 32

2. В параллелограмме ABCD точка K лежит на стороне AB, а точка L — на стороне CD. Оказалось, что CK — биссектриса угла C, а AL — биссектриса угла A. При этом четырёхугольник ALCK — ромб. BK = 4, CK = 5. Найдите периметр параллелограмма ABCD.

Ответ: 26

3. В параллелограмме ABCD точка M лежит на стороне BC, а точка N — на стороне AD. Оказалось, что DM — биссектриса угла D, а BN — биссектриса угла B. При этом четырёхугольник BMDN — ромб. CM = 7, DM = 9. Найдите периметр параллелограмма ABCD.

Ответ: 46

Примеры записи ответов:
45

Задача 4. (2 балла)

1. У Ани было две чашки чая с молоком, объемом V и 2V, процентное содержание молока в которых равно соответственно 15% и 21% объёма. Аня перелила обе эти чашки в одну большую кружку, добавив туда еще 4 ложки молока, в итоге получился раствор с содержанием молока 25%. Какую часть объём ложки составляет от объёма V?

Ответ: 0,06 || 0.06 || 6% || 6/100 || 3/50

2. У Ани было две чашки чая с молоком, объемом V и 2V, процентное содержание молока в которых равно соответственно 16% и 14% объёма. Аня перелила обе эти чашки в одну большую кружку, добавив туда еще 5 ложек молока, в итоге получился раствор с содержанием молока 20%. Какую часть объём ложки составляет от объёма V?

Ответ: 0,04 || 0.04 || 4% || 1/25 || 4/100

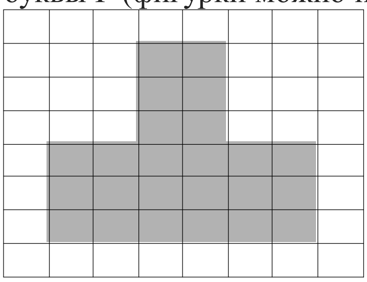
3. У Ани было две чашки чая с молоком, объемом V и 5V, процентное содержание молока в которых равно соответственно 5% и 2% объёма. Аня перелила обе эти чашки в одну большую кружку, добавив туда еще 10 ложек молока, в итоге получился раствор с содержанием молока 10%. Какую часть объём ложки составляет от объёма V?

Ответ: 0,05 || 0.05 || 5% || 1/20 || 5/100

<u>Примеры записи ответов</u>:
0,01
1%
1/100

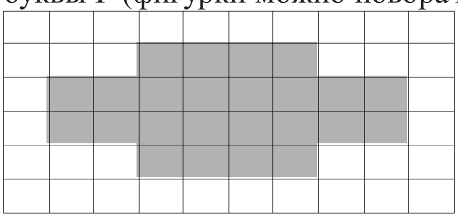
Задача 5. (3 балла)

1. Сколькими способами можно разбить данную фигуру на фигурки из четырёх клеток в виде буквы Г (фигурки можно поворачивать и переворачивать).



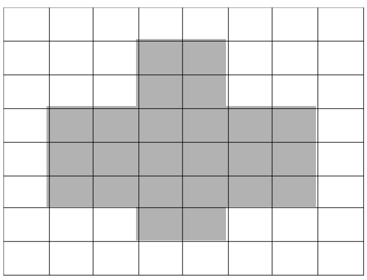
Ответ: 10

2. Сколькими способами можно разбить данную фигуру на фигурки из четырёх клеток в виде буквы Г (фигурки можно поворачивать и переворачивать).



Ответ: 6

3. Сколькими способами можно разбить данную фигуру на фигурки из четырёх клеток в виде буквы Г (фигурки можно поворачивать и переворачивать).



Ответ: 4

<u>Примеры записи ответов:</u>
45

Задача 6. (3 балла)

1. Дан квадрат ABCD со стороной 3. Вершины A, B и C являются серединами отрезков KD, LD и BM соответственно. Найдите площадь треугольника KLM.

Ответ: 27

2. Дан квадрат ABCD со стороной 4. Вершины B, C и D являются серединами отрезков KA, LA и CM соответственно. Найдите площадь треугольника KLM.

Ответ: 48

3. Дан квадрат ABCD со стороной 5. Вершины D, A и B являются серединами отрезков KC, LC и AM соответственно. Найдите площадь треугольника KLM.

Ответ: 75

Примеры записи ответов:
45

Задача 7. (3 балла)

1. На координатной плоскости проведены прямые вида $y = ax + b$ где a и b — натуральные числа от 1 до 9. Среди всех точек пересечения этих прямых выберите точку с наибольшей суммой координат. Ответ запишите в виде $(x; y)$.
Ответ: (8; 73) || (8, 73) || 8; 73 || 8, 73

2. На координатной плоскости проведены прямые вида $y = ax + b$ где a и b — натуральные числа от 1 до 8. Среди всех точек пересечения этих прямых выберите точку с наибольшей суммой координат. Ответ запишите в виде $(x; y)$.

Ответ: (7; 57) || (7, 57) || 7; 57 || 7, 57

3. На координатной плоскости проведены прямые вида $y = ax + b$ где a и b — натуральные числа от 1 до 7. Среди всех точек пересечения этих прямых выберите точку с наибольшей суммой координат. Ответ запишите в виде $(x; y)$.
Ответ: (6; 43) || (6, 43) || 6; 43 || 6, 43

Примеры записи ответов:
(-4; 5)

Задача 8. (4 балла).

1. На доске были написаны числа от 1 до 8. За ход разрешается стереть любые два числа x и y и записать вместо них число $2x + 2y$. После нескольких ходов на доске осталось одно число. Какое самое большое число могло получиться?

Ответ: 2562

2. На доске были написаны числа от 1 до 7. За ход разрешается стереть любые два числа x и y и записать вместо них число $2x + 2y$. После нескольких ходов на доске осталось одно число. Какое самое большое число могло получиться?

Ответ: 1090

3. На доске были написаны числа от 1 до 6. За ход разрешается стереть любые два числа x и y и записать вместо них число $3x + 3y$. После нескольких ходов на доске осталось одно число. Какое самое большое число могло получиться?

Ответ: 3099

Примеры записи ответов:
45

Задача 9. (4 балла)

1. Дан правильный 10-угольник. Сколькими способами в нём можно провести 3 диагонали, так, чтобы каждые две из них пересекались (внутри 10-угольника)?

Ответ: 210

2. Дан правильный 9-угольник. Сколькими способами в нём можно провести 3 диагонали, так, чтобы каждые две из них пересекались (внутри 9-угольника)?

Ответ: 84

3. Дан правильный 11-угольник. Сколькими способами в нём можно провести 3 диагонали, так, чтобы каждые две из них пересекались (внутри 11-угольника)?

Ответ: 462

Примеры записи ответов:
45

Задача 10. (4 баллов)

1. Мальчик Женя живёт в доме, где всего 100 этажей. Между соседними этажами лифт едет 1 секунду. К сожалению, в лифте работают только две кнопки «+11 этажей» и «-7 этажей». Кнопки нажимаются мгновенно.
Какое наименьшее количество секунд займёт у Жени дорога домой с 1 этажа на 25 этаж? (Лифт может поехать только на существующий этаж)

Ответ: 108

2. Мальчик Женя живёт в доме, где всего 100 этажей. Между соседними этажами лифт едет 1 секунду. К сожалению, в лифте работают только две кнопки «+11 этажей» и «-5 этажей». Кнопки нажимаются мгновенно.
Какое наименьшее количество секунд займёт у Жени дорога домой с 1 этажа на 27 этаж? (Лифт может поехать только на существующий этаж)

Ответ: 106

3. Мальчик Женя живёт в доме, где всего 100 этажей. Между соседними этажами лифт едет 1 секунду. К сожалению, в лифте работают только две кнопки «+13 этажей» и «-7 этажей». Кнопки нажимаются мгновенно.

Какое наименьшее количество секунд займёт у Жени дорога домой с 1 этажа на 24 этаж? (Лифт может поехать только на существующий этаж)

Ответ: 107

Примеры записи ответов:
45

II отборочный тур.
8 класс.

Задача 1. (2 балла)

1. У Ани в комнате живут лягушки и пауки, которых надо кормить сушеными мухами (и те, и другие присутствуют). Каждая лягушка съедает либо 6, либо 7 мух за день, а каждый паук — либо 2, либо 3 мух за день. Аня знает, что если вскроет 4 коробки с мухами, то их точно не хватит, чтобы все поели, а если 5 коробок, то их точно хватит. Сколько у Ани живет лягушек, если в каждой коробке 12 мух?

Ответ: 8

2. У Ани в комнате живут лягушки и пауки, которых надо кормить сушеными мухами (кого-то из них может не быть). Каждая лягушка съедает либо 5, либо 6 мух за день, а каждый паук — либо 2, либо 3 мух за день. Аня знает, что если вскроет 4 коробки с мухами, то их точно не хватит, чтобы все поели, а если 5 коробок, то их точно хватит. Сколько у Ани живет лягушек, если в каждой коробке 11 мух?

Ответ: 9

3. У Ани в комнате живут лягушки и пауки, которых надо кормить сушеными мухами (и те, и другие присутствуют). Каждая лягушка съедает либо 5, либо 6 мух за день, а каждый паук — либо 3, либо 4 мух за день. Аня знает, что если вскроет 4 коробки с мухами, то их точно не хватит, чтобы все поели, а если 5 коробок, то их точно хватит. Сколько у Ани живет лягушек, если в каждой коробке 13 мух?

Ответ: 8

Задача 2. (2 балла)

1. У Васи есть по 10 палочек длины 1, 2 и 3 (все палочки отличаются друг от друга). Сколькими способами Вася может составить треугольник?

Ответ: 2160

2. У Васи есть по 11 палочек длины 2, 3 и 4 (все палочки отличаются друг от друга). Сколькими способами Вася может составить треугольник?

Ответ: 3520

3. У Васи есть по 9 палочек длины 2, 3 и 5 (все палочки отличаются друг от друга). Сколькими способами Вася может составить треугольник?

Ответ: 1872

Задача 3. (2 балла)

1. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (не являющейся серединой ни одной из диагоналей) и делят этот четырёхугольник на четыре равнобедренных треугольника. $BO = 8$, $AB = 5$. Найдите AC.

Ответ: 13

2. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (не являющейся серединой ни одной из диагоналей) и делят этот четырёхугольник на четыре равнобедренных треугольника. $DO = 9$, $AD = 7$. Найдите AC.

Ответ: 16

3. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (не являющейся серединой ни одной из диагоналей) и делят этот четырёхугольник на четыре равнобедренных треугольника. $CO = 9$, $CD = 5$. Найдите BD.

Ответ: 14

Задача 4. (2 балла)

1. Сумма кубов двух целых чисел равна 737. Найдите сумму самих чисел.

Ответ: 11

2. Сумма кубов двух целых чисел равна 637. Найдите сумму самих чисел.

Ответ: 13

3. Сумма кубов двух целых чисел равна 539. Найдите сумму самих чисел.

Ответ: 11

Задача 5. (3 балла)

1. Сколько целых точек находится внутри и на границе ромба с вершинами в точках с координатами $(0, \pm 10)$ и $(\pm 20, 0)$?

Ответ: 421

2. Сколько целых точек находится внутри и на границе ромба с вершинами в точках с координатами $(0, \pm 20)$ и $(\pm 15, 0)$?

Ответ: 611

3. Сколько целых точек находится внутри и на границе ромба с вершинами в точках с координатами $(0, \pm 15)$ и $(\pm 10, 0)$?

Ответ: 311

Задача 6. (3 балла)

1. Дана трапеция $ABCD$ с большим основанием $AD = 10$. Точки E и F лежат на AD таким образом, что BE параллельно CD, а CF параллельно AB. Найдите, чему равно CD, если известно, что $AE = 3$, $OE = 8$, где O — точка пересечения BE и CF.

Ответ: 6

2. Дана трапеция $ABCD$ с большим основанием $AD = 20$. Точки E и F лежат на AD таким образом, что BE параллельно CD, а CF параллельно AB. Найдите, чему равно CD, если известно, что $AE = 4$, $OE = 9$, где O — точка пересечения BE и CF.

Ответ: 3

3. Дана трапеция $ABCD$ с большим основанием $AD = 30$. Точки E и F лежат на AD таким образом, что BE параллельно CD, а CF параллельно AB. Найдите, чему равно CD, если известно, что $AE = 8$, $OE = 21$, где O — точка пересечения BE и CF.

Ответ: 12

Задача 7. (3 балла)

1. На листочке написаны все возможные квадратные уравнения вида $x^2 - ax - b$, где числа a и b — натуральные числа, не превосходящие 10. Найдите сумму всех корней всех этих уравнений. (Если число является корнем нескольких уравнений, посчитаем его столько же раз, корнем скольких уравнений оно является)

Ответ: 550

2. На листочке написаны все возможные квадратные уравнения вида $x^2 - ax - b$, где числа a и b — натуральные числа, не превосходящие 11. Найдите сумму всех корней всех этих уравнений. (Если число является корнем нескольких уравнений, посчитаем его столько же раз, корнем скольких уравнений оно является)

Ответ: 726

3. На листочке написаны все возможные квадратные уравнения вида $x^2 - ax - b$, где числа a и b — натуральные числа, не превосходящие 9. Найдите сумму всех корней всех этих уравнений. (Если число является корнем нескольких уравнений, посчитаем его столько же раз, корнем скольких уравнений оно является)

Ответ: 405

Задача 8. (3 балла)

1. Найдите наименьшее четырёхзначное число без нулей, состоящее из различных цифр, такое, что при вычёркивании из него любой цифры получается число, делящееся на эту цифру.

Ответ: 1326

2. Найдите наименьшее пятизначное число без нулей, состоящее из различных цифр, такое, что при вычёркивании из него любой цифры получается число, делящееся на эту цифру.

Ответ: 12648

3. Найдите наибольшее трёхзначное число без нулей, состоящее из различных цифр, такое, что при вычёркивании из него любой цифры получается число, делящееся на эту цифру.

Ответ: 742

Задача 9. (3 балла)

1. В клетчатом квадрате 10×10 закрасили некоторое количество клеток. Затем в каждой незакрашенной клетке написали количество соседних с ней закрашенных. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел?

Ответ: 180

2. В клетчатом квадрате 11×11 закрасили некоторое количество клеток. Затем в каждой незакрашенной клетке написали количество соседних с ней закрашенных. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел?

Ответ: 220

3. В клетчатом квадрате 9×9 закрасили некоторое количество клеток. Затем в каждой незакрашенной клетке написали количество соседних с ней закрашенных. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел?

Ответ: 144

Задача 10. (5 баллов)

1. Изначально на доске записаны числа 1, 2 и 4. Каждую минуту Антон стирает написанные на доске числа и пишет вместо них их попарные суммы. Через час на доске оказались написаны три огромных числа. Каковы их последние цифры? Перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов:

1; 2; 3

Ответ: 6; 7; 9 || 6; 9; 7 || 7; 9; 6 || 7; 6; 9 || 9; 6; 7 || 9; 7; 6

2. Изначально на доске записаны числа 2, 3 и 4. Каждую минуту Антон стирает написанные на доске числа и пишет вместо них их попарные суммы. Через час на доске оказались написаны три огромных числа. Каковы их последние цифры? Перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов:

1; 2; 3

Ответ: 7; 8; 9 || 7; 9; 8 || 7; 9; 8 || 7; 8; 9 || 9; 7; 8 || 9; 7; 3

3. Изначально на доске записаны числа 2, 3 и 6. Каждую минуту Антон стирает написанные на доске числа и пишет вместо них их попарные суммы. Через час на доске оказались написаны три огромных числа. Каковы их последние цифры? Перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов:

1; 2; 3

Ответ: 8; 7; 1 || 8; 1; 7 || 7; 1; 8 || 7; 8; 1 || 1; 8; 7 || 1; 7; 8

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

9 класс

1 вариант

Решения

1. (2 балла) Среди шести различных квадратных трёхчленов, отличающихся перестановкой коэффициентов, какое наибольшее количество может не иметь корней?

Ответ: 6

Решение:

Рассмотим, например, коэффициенты 1000, 1001, 1002. Квадрат любого из них, очевидно, меньше учетверённого произведения двух других, поэтому все дискриминанты будут отрицательны.

2. (3 балла) На клетчатой доске 10×10 расположены 400 фишек. Соседними будем называть во-первых клетки, имеющие общую сторону, а во-вторых, две крайние клетки одной вертикали или горизонтали. Таким образом, у каждой клетки будет ровно 4 соседних.

За один ход разрешается взять 4 фишки, лежащие на одной клетке, и переложить их на 4 соседние клетки. При любой ли начальной расстановке фишек можно добиться того, чтобы на всех клетках оказалось поровну фишек?

Ответ: Нет, не при любой.

Решение: Раскрасим доску в шахматном порядке. Количество фишек на чёрных клетках изменяется каждый раз на 4, то есть, в частности, не меняет свою чётность. В конце количество фишек на чёрных клетках должно быть чётно, значит, если в начале их количество нечётно, то ничего не получится.

Также для этой задачи подходят более сложные решения, аналогичные решениям задачи номер 5 десятого класса.

3. (3 балла) Равносторонние треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ со стороной 10 вписаны в одну и ту же окружность так, что точка A_1 лежит на дуге BC, а точка B_1 лежит на дуге AC. Найдите $AA_1^2+BC_1^2+CB_1^2$.

Ответ: 200

Решение:

Заметим, что дуги AB_1, BA_1 и CC_1 равны. Обозначим их градусную меру за 2α. Тогда длины дуг $AC_1 = BB_1 = CA_1 = 120^\circ - 2\alpha$.

По теореме синусов в треугольнике ACA_1 получаем $\dfrac{AA_1}{\sin ACA_1} = \dfrac{AC}{AA_1C}$, откуда $AA_1 = \dfrac{12\sin(60^\circ + \alpha)}{\sin 60^\circ}$.

Аналогично $BB_1 = \dfrac{10\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin 60^\circ}$ и $CC_1 = \dfrac{12\sin\alpha}{\sin 60^\circ}$.

$AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2 = \dfrac{10^2}{\sin^2 60^\circ}\left(\sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ - \alpha) + \sin^2\alpha\right) =$

$= \dfrac{200}{3}\cdot\left(\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \dfrac{1}{2}\sin\alpha\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \dfrac{1}{2}\sin\alpha\right)^2 + \sin^2\alpha\right) =$

$= \dfrac{200}{3}(3\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha) = 200.$

4. (3 балла) Докажите, что в прямоугольном треугольнике площадь не превосходит квадрата периметра, разделённого на 23.

Решение:

Пусть стороны треугольника имеют длины x и y. Тогда периметр $P = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$. По неравенствам о средних получаем $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 2\sqrt{xy} + \sqrt{2}\sqrt{xy}$. Так как площадь $S = \frac{xy}{2}$, мы плолучаем $P \geqslant (2 + \sqrt{2})xy$, откуда $P^2 \geqslant (6 + 4\sqrt{2})xy = (12 + 8\sqrt{2})S > 23S$.

5. (3 балла) Решите уравнение $x^2 + 3y^2 = 2^z$ в натуральных числах.

Ответ: $x = y = 2^n$, $z = 2n + 2$, где n — целое неотрицательное число.

Решение:

Заметим, что 2^z при натуральны всегда чётно, поэтому x и y одной чётности.

Рассмотрим сначала случай, когда оба эти числа нечётны. В таком случае сумма их квадратов даёт остаток 4 при делении на 8. Это значит, что $2^z = 4$, то есть $x = y = 1$, $z = 2$.

Если же x и y чётны, то x^2 и y^2 делятся на 4. Сократим каждое слагаемое на 4, получим уравнением в натуральных числах $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 2^{z-2}$.

Сокращая на 4 мы рано или поздно приходим к первой ситуации, когда x и y нечётны. Значит, общее решение имеет вид $x = y = 2^n$, $z = 2n + 2$.

6. (4 балла) Даны три окружности радиусов 3, 4 и 5, попарно касающиеся друг друга в точках A, B и C. Найдите сумму расстояний от центра описанной окружности треугольника ABC до его сторон.

Ответ: $\dfrac{5}{\sqrt{14}} + \dfrac{5}{\sqrt{21}} + \dfrac{5}{\sqrt{30}}$.

Решение:

Введём следующие обозначения: у первой окружности: центр — точка O_1, радиус равен a; у второй окружности: центр — точка O_2, радиус равен b; у третьей окружности: центр — точка O_3, радиус равен c. Так как точки A, B, C являются точками касания двух окружностей из трех, то эти точки лежат на отрезках O_1O_2, O_1O_3, O_2O_3. Не теряя общности, можно считать, что точка A лежит на отрезке O_2O_3, точка B — на O_1O_3, точка C — на O_1O_2. Центр описанной окружности треугольника ABC обозначим за O.

Стороны треугольника $O_1O_2O_3$ равны 7, 8 и 9. Точки A, B и C делят стороны треугольника $O_1O_2O_3$ так же, как должны делить точки касания вписанной окружности, значит, это они и есть. Таким образом, описанная окружность треугольника ABC — это вписанная окружность треугольника $O_1O_2O_3$. Посчитаем её радиус, поделив площадь треугольника $O_1O_2O_3$, вычисленную по формуле Герона, на её полупериметр: $r = \dfrac{\sqrt{12 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}}{12} = \sqrt{5}$.

Треугольники O_1BC и OBC равнобедренные с основанием BC, точки O и O_1 лежат не серединном перпендикуляре к BC. Тогда по теореме Пифагора получаем $OO_1 = \sqrt{BO^2 + BO_1^2} = \sqrt{5 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Обозначим середину BC за M_1. В прямоугольном треугольнике OBO_1 эта точка — основание высоты, опущенной из прямого угла, откуда $O_1M_1 = \dfrac{BO_1^2}{OO_1} = \dfrac{9}{\sqrt{14}}$, соответственно, $OM_1 = OO_1 - O_1M_1 =$ $= \sqrt{14} - \dfrac{9}{\sqrt{14}} = \dfrac{5}{\sqrt{14}}$.

Аналогично находим $OO_2 = \sqrt{5 + 4^2} = \sqrt{21}$, а $OM_2 = \dfrac{5}{\sqrt{21}}$; $OO_3 =$ $\sqrt{5 + 5^2} = \sqrt{30}$, а $OM_2 = \dfrac{5}{\sqrt{30}}$.

7. (4 балла) На плоскости дан набор точек, известно что любые три можно параллельным переносом переместить в квадрат с вершинами $(0,2)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ и $(-2,0)$. Тогда можно одним параллельным переносом переместить туда сразу все.

Решение:

Введём систему координат, в которой оси абсцисс и ординат будут под углом 45° к текущим, а начало координат будет в той же точке. Вершины квадрата в этой системе будут иметь координаты $(\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{2})$.

Рассмотрим самую левую точку (т.е. точку с самой маленькой абсциссой) и самую правую. Проведём через них вертикальные прямые. Расстояние между этими прямыми не больше $2\sqrt{2}$, иначе две крайние точки нельзя переместить в указанный квадрат. Затем проведём горизонтальные прямые через самую верхнюю и самую нижнюю точки. Аналогично расстояние между ними не больше$2\sqrt{2}$.

Эти четыре прямые образуют квадрат со сторонами, параллельными (новым) осям координат, размеры которого не превосходят соответствующих размеров квадрата из условия. Значит, этот квадрат. вместе со всеми лежащими в нём точками, можно переместить в квадрат из условия.

8. (4 балла) На 23 февраля мальчику Жене подарили шоколадку размером 3×3, на каждом кусочке которой нарисована картинка, каждая картинка встречается всего один раз. За каждый ход Женя может откусить один кусочек, у которого не более трех общих сторон с другими, ещё не съеденными, кусочками. Сколькими способами Женя может съесть свою шоколадку?

Ответ: $\dfrac{4}{5}\cdot 9! = 290304$.

Решение:

Если бы у Жени не было бы ограничения, он мог бы есть кусочки в любом порядке и у него было бы $9! = 362880$ способов.

Не подходят те способы, в которых центральная клетка съедена раньше любой из соседних с ней четырёх. Поскольку из этих пяти клеток для каждой равное количество вариантов в которых она находится раньше других, нам не подходит каждый пятый вариант. Отстаётся $\dfrac{4}{5}\cdot 9! = 290304$.

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

9 класс

2 вариант

Решения

1. (2 балла) Среди шести различных квадратных трёхчленов, отличающихся перестановкой коэффициентов, какое наибольшее количество может иметь по два различных корня?

Ответ: 6

Решение: Возьмём, например, коэффициенты, -5, 1, 2.

Если число -5 это старший коэффициент или свободный член, уравнение очевидно имеет два корня разных знаков.

Для случая, когда -5 — второй коэффициент, посчитаем дискриминант: $5^2 - 1 \cdot 2 = 23 > 0$.

2. (3 балла) На клетчатой доске 8×8 расположены 256 фишек. Соседними будем называть во-первых клетки, имеющие общую сторону, а во-вторых, две крайние клетки одной вертикали или горизонтали. Таким образом, у каждой клетки будет ровно 4 соседних.

За один ход разрешается взять 4 фишки, лежащие на одной клетке, и переложить их на 4 соседние клетки. При любой ли начальной расстановке фишек можно добиться того, чтобы на всех клетках оказалось поровну фишек?

Ответ: Нет, не при любой.

Решение: Раскрасим доску в шахматном порядке. Количество фишек на чёрных клетках изменяется каждый раз на 4, то есть, в частности, не меняет свою чётность. В конце количество фишек на чёрных клетках должно быть чётно, значит, если в начале их количество нечётно, то ничего не получится.

Также для этой задачи подходят более сложные решения, аналогичные решениям задачи номер 5 десятого класса.

3. (3 балла) Равносторонние треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ со стороной 12 вписаны в окружность S так, что точка A лежит на дуге B_1C_1, а точка B лежит на дуге A_1B_1. Найдите $AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2$.

Ответ: 288

Решение:

Заметим, что дуги AB_1, BA_1 и CC_1 равны. Обозначим их градусную меру за 2α. Тогда длины дуг $AC_1 = BB_1 = CA_1 = 120^\circ - 2\alpha$.

По теореме синусов в треугольнике ACA_1 получаем $\dfrac{AA_1}{\sin ACA_1} = \dfrac{AC}{AA_1C}$, откуда $AA_1 = \dfrac{12\sin(60^\circ+\alpha)}{\sin 60^\circ}$.

Аналогично $BB_1 = \dfrac{12\sin(60^\circ-\alpha)}{\sin 60^\circ}$ и $CC_1 = \dfrac{12\sin\alpha}{\sin 60^\circ}$.

$$AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2 = \frac{12^2}{\sin^2 60^\circ}\left(\sin^2(60^\circ+\alpha)+\sin^2(60^\circ-\alpha)+\sin^2\alpha\right) =$$
$$= 96\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2+\sin^2\alpha\right) =$$
$$= 96(3\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha) = 288.$$

4. (3 балла) Докажите, что в прямоугольном треугольнике площадь не превосходит квадрата полупериметра, разделённого на 5 с половиной.

Решение:

Пусть стороны треугольника имеют длины x и y. Тогда полупериметр $p = \dfrac{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}{2}$. По неравенствам о средних получаем $\dfrac{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}{2} \geqslant \sqrt{xy}+\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{2}}$. Так как площадь $S = \frac{xy}{2}$, мы получаем $p \geqslant \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)xy$, откуда $p^2 \geqslant \left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}\right)xy = (3+2\sqrt{2})S > 5,5S$.

5. (3 балла) Решите уравнение $x^2+y^2 = 2^z$ в натуральных числах.

Ответ: $x = y = 2^n$, $z = 2n+1$, где n — целое неотрицательное число.

Решение:

Заметим, что 2^z при натуральны всегда чётно, поэтому x и y одной чётности.

Рассмотрим сначала случай, когда оба эти числа нечётны. В таком случае сумма их квадратов даёт остаток 2 при делении на 4. Это значит, что $2^z = 2$, то есть $x = y = z = 1$.

Если же x и y чётны, то x^2 и y^2 делятся на 4, откуда 2^z делится на 4. Сократим каждое слагаемое на 4, получим уравнением в натуральных числах $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 2^{z-2}$.

Сокращая на 4 мы рано или поздно приходим к первой ситуации, когда x и y нечётны. Значит, общее решение имеет вид $x = y = 2^n$, $z = 2n + 1$.

6. (4 балла) Даны три окружности радиусов 3, 5 и 7, попарно касающиеся друг друга в точках A, B и C. Найдите сумму расстояний от центра описанной окружности треугольника ABC до его сторон.

Ответ: $\dfrac{7}{4} + \dfrac{7}{3\sqrt{6}} + \dfrac{7}{\sqrt{30}}$.

Решение:

Введём следующие обозначения: у первой окружности: центр — точка O_1, радиус равен a; у второй окружности: центр — точка O_2, радиус равен b; у третьей окружности: центр — точка O_3, радиус равен c. Так как точки A, B, C являются точками касания двух окружностей из трех, то эти точки лежат на отрезках O_1O_2, O_1O_3, O_2O_3. Не теряя общности, можно считать, что точка A лежит на отрезке O_2O_3, точка B — на O_1O_3, точка C — на O_1O_2. Центр описанной окружности треугольника ABC обозначим за O.

Стороны треугольника $O_1O_2O_3$ равны 8, 10 и 12. Точки A, B и C делят стороны треугольника $O_1O_2O_3$ так же, как должны делить точки касания вписанной окружности, значит, это они и есть. Таким образом, описанная окружность треугольника ABC — это вписанная окружность треугольника $O_1O_2O_3$. Посчитаем её радиус, поделив площадь треугольника $O_1O_2O_3$, вычисленную по формуле Герона, на её полупериметр: $r = \dfrac{\sqrt{15 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}}{15} = \sqrt{7}$.

Треугольники O_1BC и OBC равнобедренные с основанием BC, точки O и O_1 лежат не серединном перпендикуляре к ВС. Тогда по теореме Пифагора получаем $OO_1 = \sqrt{BO^2 + BO_1^2} = \sqrt{7 + 3^2} = \sqrt{16} = 4$.

Обозначим середину BC за M_1. В прямоугольном треугольнике OBO_1 эта точка — основание высоты, опущенной из прямого угла, откуда $O_1M_1 = \dfrac{BO_1^2}{OO_1} = \dfrac{9}{4}$, соответственно, $OM_1 = OO_1 - O_1M_1 = = 4 - \dfrac{9}{4} = \dfrac{7}{4}$.

Аналогично находим $OO_2 = \sqrt{5 + 5^2} = \sqrt{30}$, а $OM_2 = \dfrac{7}{\sqrt{30}}$;

$OO_3 = \sqrt{5+7^2} = \sqrt{54}$, а $OM_2 = \dfrac{7}{\sqrt{54}} = \dfrac{7}{3\sqrt{6}}$.

7. (4 балла) На плоскости дан набор точек, известно что любые три можно параллельным переносом переместить в прямоугольник с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$ и $(1,2)$. Тогда можно одним параллельным переносом переместить туда сразу все.

Решение:

Рассмотрим самую левую точку (т.е. точку с самой маленькой абсциссой) и самую правую. Проведём через них вертикальные прямые. Расстояние между этими прямыми не больше 2, иначе 2 крайние точки нельзя переместить в указанный прямоугольник. Затем проведём горизонтальные прямые через самую верхнюю и самую нижнюю точки. Аналогично расстояние между ними не больше 1.

Эти четыре прямые образуют прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, размеры которого не превосходят соответствующих размеров прямоугольника из условия. Значит, этот прямоугольник. вместе со всеми лежащими в нём точками, можно переместить в прямоугольник из условия.

8. (4 балла) На 23 февраля мальчику Жене подарили шоколадку размером 2×4, на каждом кусочке которой нарисована картинка, каждая картинка встречается всего один раз. За каждый ход Женя может откусить один кусочек, у которого не более двух общих сторон с другими, ещё не съеденными, кусочками. Сколькими способами Женя может съесть свою шоколадку?

Ответ: 6720.

Решение:

Первой обязательно съедается угловая клетка (4 способа). После этого есть 4 варианта:

1) Второй съедается соседняя угловая клетка (1 способ). Остаётся прямоугольник 2×3. Из него первой съедается снова угловая клетка (4 способа). После этого остаётся одна недоступная для съедения клетка.

1.1) Четвёртой съедается единственная клетка, не соседняя с недоступной (1 способ). Далее съедается клетка, соседняя с недоступной (3 способа). Остальные 3 клетки съедаются в любом порядке (3! способов). Итого $4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3! = 288$ способов.

1.2) Четвёртой съедается клетка, соседняя с недоступной (3 способа). Остальные 4 клетки съедаются в любом порядке (4! способов). Итого $4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4! = 1152$ способа.

Итого в сумме 1440 способов для случай 1).

2) Второй съедается соседняя неугловая клетка (1 способ). После этого остаётся одна недоступная для съедения клетка, у которой три соседних.

2.1) Третьей съедается одна из трёх клеток рядом с недоступной (3 способа). Далее становятся доступными все клетки, которые можно съесть 5! способами. Итого $4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5! = 1440$.

2.2) Третьей съедается клетка, не соседняя с недоступной (2 способа).

2.2.1) Четвёртой съедается одна из трёх клеток рядом с недоступной (3 способа). Далее становятся доступными все клетки, которые можно съесть 4! способами. Итого $4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4! = 576$ способов.

2.2.2) Четвёртой съедается клетка, не соседняя с недоступной (1 способ). Затем съедается одна из клеток, соседних с недоступной (3 способа). Далее становятся доступными все клетки, которые можно съесть 3! способами. Итого $4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3! = 144$ способа.

Итого в сумме 2160 способов для случа 2).

3) Второй съедается угловая клетка на той же длинной стороне, что и уже съеденная. После этого остаётся две недоступные для съедения клетки, у которой три соседних. Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю 1). В итоге те же самые 1440 способов.

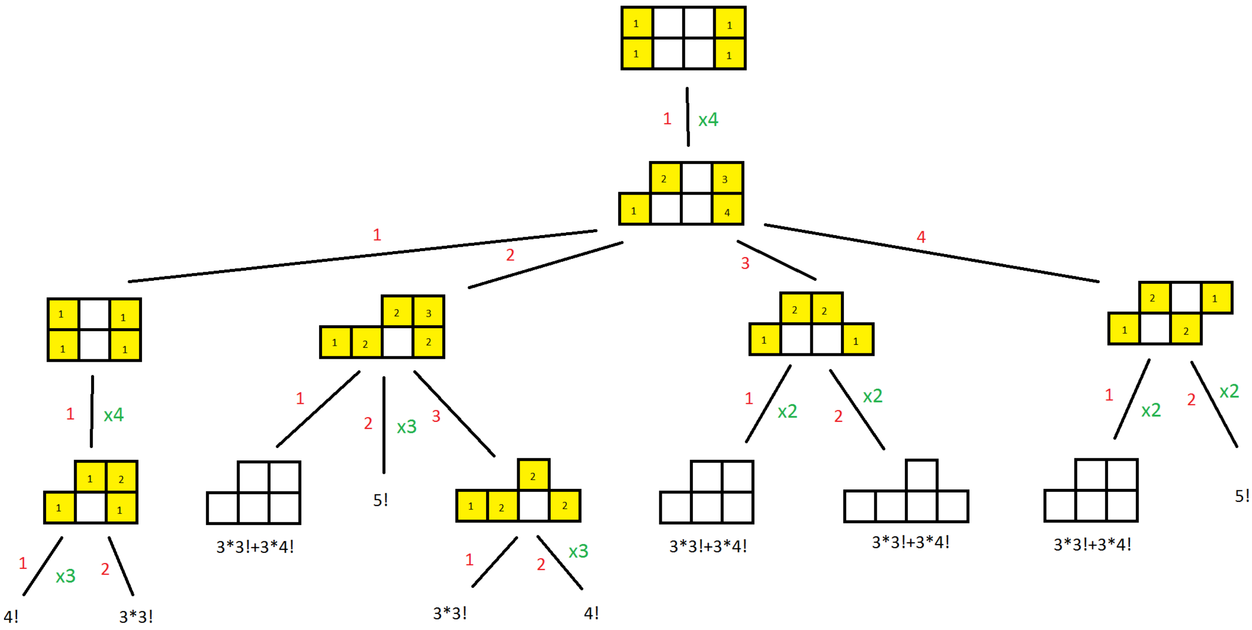
4) Второй съедается клетка, противоположная съеденной (1 способов).

4.1)Если после этого мы съедаем угловую клетку, у нас остаётся фигура, та же, что и в случае 1), съесть которую $cdot3 \cdot 4! + cdot3 \cdot 3!$ способов. Это число надо умножить на 8 и получается 720 способов.

4.2) Если съедается не угловая клетка, все клетки становятся доступны, и их можно съесть 5! способами. Итого $4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5! = 960$ способов.

Всего для варианта 4) получается 1680 способов.

Итого 6720 способов.



4*(4*(3*4!+3*3!)+(90+3*5!+(3*3!+3*4!))+(2*90+2*90)+(2*90+2*5!)) =1440+2160+1440+1680=6720

9 класс, I отборочный тур.

Задача 1. (1 балл)

1. Из отрезков с длинами $4a$, $4a + 9$ и a^2 можно составить треугольник. Найдите все возможные значения *a.*
Ответ запишите в виде промежутка (квадратные скобки означают, что граница входит в множество решений неравенства, круглые — что не входит).

Ответ: (3; 9)

2. Из отрезков с длинами $3a$, $3a + 16$ и a^2 можно составить треугольник. Найдите все возможные значения *a.*
Ответ запишите в виде промежутка (квадратные скобки означают, что граница входит в множество решений неравенства, круглые — что не входит).

Ответ: (4; 8)

3. Из отрезков с длинами $12a$, $12a + 25$ и a^2 можно составить треугольник. Найдите все возможные значения *a.*
Ответ запишите в виде промежутка (квадратные скобки означают, что граница входит в множество решений неравенства, круглые — что не входит).

Ответ: (5; 25)

Примеры записи ответов:
[-4; 5)
(-4; 5]
(-4; 5)
[-4; 5]

Задача 2. (2 балла).

1. В стране Самолётии 20 городов, некоторые города соединены двусторонними авиарейсами. При этом, между любыми двумя городами существует только один разумный авиамаршрут (т. е. маршрут, на котором не надо пользоваться одним и тем же авиарейсом в разных направлениях).
Для каждого из городов вычислили авиарасстояние до столицы. Оно рассчитывается как минимальное количество рейсов, необходимое, чтобы долететь из этого города до столицы.
Для каждых двух городов A и B, соединённых авиарейсом, стоимость билета из города A в город B (также как и обратного) в тугриках равна наибольшему из авиарасстояний от A и B до столицы. В частности, билет до столицы из любого соединённого с ней прямым рейсом города стоит 1 тугрик; все остальные рейсы, вылетающие из этих городов, стоят 2 тугрика и так далее.
Вася много путешествовал по Самолётии (не только на самолётах) и в конце года оказалось, что он ровно по разу воспользовался каждым из авиарейсов (то есть, для каждых двух городов A и B, соединённых прямым авиарейсом, он слетал либо из A в B, либо из B в A, причём только в одну их сторон). Какое наибольшее количество тугриков он мог потратить на авиаперелёты?

Ответ: 190

2. В стране Аэродромии 30 городов, некоторые города соединены двусторонними авиарейсами. При этом, между любыми двумя городами существует только один разумный авиамаршрут (т. е. маршрут, на котором не надо пользоваться одним и тем же авиарейсом в разных направлениях).
Для каждого из городов вычислили авиарасстояние до столицы. Оно рассчитывается как минимальное количество рейсов, необходимое, чтобы долететь из этого города до столицы.
Для каждых двух городов A и B, соединённых авиарейсом, стоимость билета из города A в город B (также как и обратного) в фартингах равна наибольшему из авиарасстояний от A и B до столицы. В частности, билет до столицы из любого соединённого с ней прямым рейсом города стоит 1 фартинг; все остальные рейсы, вылетающие из этих городов, стоят 2 фартинга и так далее.
Коля много путешествовал по Аэродромии (не только на самолётах) и в конце года оказалось, что он ровно по разу воспользовался каждым из авиарейсов (то есть, для каждых двух городов A и B, соединённых прямым авиарейсом, он слетал либо из A в B, либо из B в A, причём только в одну их сторон). Какое наибольшее количество фартингов он мог потратить на авиаперелёты?

Ответ: 435

3. В стране Авиании 40 городов, некоторые города соединены двусторонними авиарейсами. При этом, между любыми двумя городами существует только один разумный авиамаршрут (т. е. маршрут, на котором не надо пользоваться одним и тем же авиарейсом в разных направлениях).
Для каждого из городов вычислили авиарасстояние до столицы. Оно рассчитывается как минимальное количество рейсов, необходимое, чтобы долететь из этого города до столицы.
Для каждых двух городов A и B, соединённых авиарейсом, стоимость билета из города A в город B (также как и обратного) в марках равна наибольшему из авиарасстояний от A и B до столицы. В частности, билет до столицы из любого соединённого с ней прямым рейсом города стоит 1 марку; все остальные рейсы, вылетающие из этих городов, стоят 2 марки и так далее.
Петя много путешествовал по Авиании (не только на самолётах) и в конце года оказалось, что он ровно по разу воспользовался каждым из авиарейсов (то есть, для каждых двух городов A и B, соединённых прямым авиарейсом, он слетал либо из A в B, либо из B в A, причём только в одну их сторон). Какое наибольшее количество марок он мог потратить на авиаперелёты?

Ответ: 780.

Примеры записи ответов:
45

Задача 3. (2 балла)

1. На координатной плоскости проведены прямые вида $y = ax + b$ где a и b — натуральные числа от 1 до 9. Среди всех точек пересечения этих прямых выберите точку с наибольшей суммой координат. Ответ запишите в виде (x; y).
Ответ: (8; 73) || (8, 73) || 8; 73 || 8, 73

2. На координатной плоскости проведены прямые вида $y = ax + b$ где a и b — натуральные числа от 1 до 8. Среди всех точек пересечения этих прямых выберите точку с наибольшей суммой координат. Ответ запишите в виде (x; y).

Ответ: (7; 57) || (7, 57) || 7; 57 || 7, 57

3. На координатной плоскости проведены прямые вида $y = ax + b$ где a и b — натуральные числа от 1 до 7. Среди всех точек пересечения этих прямых выберите точку с наибольшей суммой координат. Ответ запишите в виде (x; y).
Ответ: (6; 43) || (6, 43) || 6; 43 || 6, 43

Примеры записи ответов:
(-4; 5)

Задача 4. (3 балла).

1. На доске были написаны числа от 1 до 8. За ход разрешается стереть любые два числа x и y и записать вместо них число $2x + 2y$. После нескольких ходов на доске осталось одно число. Какое самое большое число могло получиться?

Ответ: 2562

2. На доске были написаны числа от 1 до 7. За ход разрешается стереть любые два числа x и y и записать вместо них число $2x + 2y$. После нескольких ходов на доске осталось одно число. Какое самое большое число могло получиться?

Ответ: 1090

3. На доске были написаны числа от 1 до 6. За ход разрешается стереть любые два числа x и y и записать вместо них число $3x + 3y$. После нескольких ходов на доске осталось одно число. Какое самое большое число могло получиться?

Ответ: 3099

Примеры записи ответов:
45

Задача 5. (3 балла)

1. Дан правильный 10-угольник. Сколькими способами в нём можно провести 3 диагонали, так, чтобы каждые две из них пересекались (внутри 10-угольника)?

Ответ: 210

2. Дан правильный 9-угольник. Сколькими способами в нём можно провести 3 диагонали, так, чтобы каждые две из них пересекались (внутри 9-угольника)?

Ответ: 84

3. Дан правильный 11-угольник. Сколькими способами в нём можно провести 3 диагонали, так, чтобы каждые две из них пересекались (внутри 11-угольника)?

Ответ: 462

Примеры записи ответов:
45

Задача 6 (3 балла).

1. Известно, что натуральное число *n* делится на 3 и на 4. Найдите все такие возможные *n*, если известно, что количество всех его делителей (включая 1 и *n*) равно 15 ? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 144, 324 || 144; 324 || 324; 144 || 324, 144

2. Известно, что натуральное число *n* делится на 3 и на 4. Найдите все такие возможные *n*, если известно, что количество всех его делителей (включая 1 и *n*) равно 21 ? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 576, 2916 || 576; 2916 || 2916, 576 || 2916; 576

3. Известно, что натуральное число *n* делится на 3 и на 4. Найдите все такие возможные *n*, если известно, что количество всех его делителей (включая 1 и *n*) равно 22 ? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 3072

Примеры записи ответов:
45
45; 456

Задача 7 (3 балла).

1. При каких натуральных *x* и *y* значение выражения $4x+\frac{169}{x}+9y+\frac{625}{y}$ наименьшее? В ответе укажите *x* и *y* в правильном порядке через точку с запятой.

Ответ: 7, 8 || 7; 8 || (7, 8) || (7; 8)

2. При каких натуральных *x* и *y* значение выражения
$4x+\frac{289}{x}+16y+\frac{529}{y}$ наименьшее?
В ответе укажите *x* и *y* в правильном порядке через точку с запятой.

Ответ: 9, 6 || 9; 6 || (9, 6) || (9; 6)

3. При каких натуральных x и y значение выражения
$25x + \frac{484}{x} + 4y + \frac{225}{y}$ наименьшее?
В ответе укажите x и y в правильном порядке через точку с запятой.

Ответ: 4, 8 || 4; 8 || (4, 8) || (4; 8)

Примеры записи ответов:
(1; 2)
1; 2

Задача 4 (4 балла).

1. Известно, что квадратное уравнение Аx^2 + Бx + В = 0, где А, Б и В — какие-то цифры, имеет корень -3/2. На какое число большее 1 точно делится трёхзначное число АБВ (то есть число, состоящее из цифр А, Б и В в таком порядке)?

Ответ: 23

2. Известно, что квадратное уравнение Аx^2 + Бx + В = 0, где А, Б и В — какие-то цифры, имеет корень -3. На какое число большее 1 точно делится трёхзначное число АБВ (то есть число, состоящее из цифр А, Б и В в таком порядке)?

Ответ: 13

3. Известно, что квадратное уравнение Аx^2 + Бx + В = 0, где А, Б и В — какие-то цифры, имеет корень -7. На какое число большее 1 точно делится трёхзначное число АБВ (то есть число, состоящее из цифр А, Б и В в таком порядке)?

Ответ: 17

Примеры записи ответов:
45

Задача 9 (4 балла).

1. ABCD — равнобедренная трапеция, AB = CD = 49, BC = 84, AD = 140. BCDE также равнобедренная трапеция. Найдите AE. (Точки A и E не совпадают)
Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 136.

2. ABCD — равнобедренная трапеция, AB = CD = 121, BC = 176, AD = 220. BCDE также равнобедренная трапеция. Найдите AE. (Точки A и E не совпадают)
Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 84.

3. ABCD — равнобедренная трапеция, AB = CD = 25, BC = 40, AD = 60. BCDE также равнобедренная трапеция. Найдите AE. (Точки A и E не совпадают)
Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 44.

Примеры записи ответов:
45
45; 56

Задача 10 (4 балла).

1. Из точки A проведены две касательные к окружности. Расстояние от точки A до точки касания равно 13, а расстояние между точками касания равно 24. Найдите наибольшее возможное расстояние от точки A до точки на окружности.

Ответ: 65

2. Из точки A проведены две касательные к окружности. Расстояние от точки A до точки касания равно 10, а расстояние между точками касания равно 12. Найдите наибольшее возможное расстояние от точки A до точки на окружности.

Ответ: 20

3. Из точки A проведены две касательные к окружности. Расстояние от точки A до точки касания равно 10, а расстояние между точками касания равно 16. Найдите наибольшее возможное расстояние от точки A до точки на окружности.

Ответ: 30

Примеры записи ответов:
45

II отборочный тур.
9 класс.

Задача 1. (1 балл)

1. Сумма кубов двух целых чисел равна 737. Найдите сумму самих чисел.

Ответ: 11

2. Сумма кубов двух целых чисел равна 637. Найдите сумму самих чисел.

Ответ: 13

3. Сумма кубов двух целых чисел равна 539. Найдите сумму самих чисел.

Ответ: 11

Задача 2. (2 балла)

1. Сколько целых точек находится внутри и на границе ромба с вершинами в точках с координатами $(0, \pm 10)$ и $(\pm 20, 0)$?

Ответ: 421

2. Сколько целых точек находится внутри и на границе ромба с вершинами в точках с координатами $(0, \pm 20)$ и $(\pm 15, 0)$?

Ответ: 611

3. Сколько целых точек находится внутри и на границе ромба с вершинами в точках с координатами $(0, \pm 15)$ и $(\pm 10, 0)$?

Ответ: 311

Задача 3. (2 балла)

1. Дана трапеция $ABCD$ с большим основанием $AD = 10$. Точки E и F лежат на AD таким образом, что BE параллельно CD, а CF параллельно AB. Найдите, чему равно CD, если известно, что $AE = 3$, $OE = 8$, где O — точка пересечения BE и CF.

Ответ: 6

2. Дана трапеция $ABCD$ с большим основанием $AD = 20$. Точки E и F лежат на AD таким образом, что BE параллельно CD, а CF параллельно AB. Найдите, чему равно CD, если известно, что $AE = 4$, $OE = 9$, где O — точка пересечения BE и CF.

Ответ: 3

3. Дана трапеция $ABCD$ с большим основанием $AD = 30$. Точки E и F лежат на AD таким образом, что BE параллельно CD, а CF параллельно AB. Найдите, чему равно CD, если известно, что $AE = 8$, $OE = 21$, где O — точка пересечения BE и CF.

Ответ: 12

Задача 4. (2 балла)

1. На листочке написаны все возможные квадратные уравнения вида $x^2 - ax - b$, где числа a и b — натуральные числа, не превосходящие 10. Найдите сумму всех корней всех этих уравнений. (Если число является корнем нескольких уравнений, посчитаем его столько же раз, корнем скольких уравнений оно является)

Ответ: 550

2. На листочке написаны все возможные квадратные уравнения вида $x^2 - ax - b$, где числа a и b — натуральные числа, не превосходящие 11. Найдите сумму всех корней всех этих уравнений. (Если число является корнем нескольких уравнений, посчитаем его столько же раз, корнем скольких уравнений оно является)

Ответ: 726

3. На листочке написаны все возможные квадратные уравнения вида $x^2 - ax - b$, где числа a и b — натуральные числа, не превосходящие 9. Найдите сумму всех корней всех этих уравнений. (Если число является корнем нескольких уравнений, посчитаем его столько же раз, корнем скольких уравнений оно является)

Ответ: 405

Задача 5. (2 балла)

1. Одна из сторон треугольника равна $10\sqrt{6} - 20$, а два его угла равны 30 и 45 градусам. Чему может быть равна наименьшая сторона треугольника? Найдите все возможные значения. В ответе укажите их сумму.

Ответ: 10

2. Одна из сторон треугольника равна $8\sqrt{6} - 16$, а два его угла равны 30 и 45 градусам. Чему может быть равна наименьшая сторона треугольника? Найдите все возможные значения. В ответе укажите их сумму.

Ответ: 8

3. Одна из сторон треугольника равна $6\sqrt{6} - 12$, а два его угла равны 30 и 45 градусам. Чему может быть равна наименьшая сторона треугольника? Найдите все возможные значения. В ответе укажите их сумму.

Ответ: 6

Задача 6. (3 балла)

1. Квадратное уравнение $x^2 - 10x + a$ имеет корни x_2 и x_4. Квадратное уравнение $x^2 - 4x + b$ имеет корни x_1 и x_3. При это $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Чему может равняться суммарная длина промежутков, на которых выполняется неравенство $(x^2 - 10x + a)(x^2 - 4x + b) \leqslant 0$? Если возможных ответов несколько, укажите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 6

2. Квадратное уравнение $x^2 - 5x + a$ имеет корни x_2 и x_4. Квадратное уравнение $x^2 + 2x + b$ имеет корни x_1 и x_3. При это $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Чему может равняться суммарная длина промежутков, на которых выполняется неравенство $(x^2 - 5x + a)(x^2 + 2x + b) \leqslant 0$? Если возможных ответов несколько, укажите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 7

3. Квадратное уравнение $x^2 - 3x + a$ имеет корни x_1 и x_3. Квадратное уравнение $x^2 - 8x + b$ имеет корни x_2 и x_4. При это $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Чему может равняться суммарная длина промежутков, на которых выполняется неравенство $(x^2 - 3x + a)(x^2 - 8x + b) \leqslant 0$? Если возможных ответов несколько, укажите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 5

Задача 7. (3 балла)

1. Женя нарисовал на плоскости несколько различных прямых. Сколько Женя нарисовал прямых, если известно, что они разделили плоскость на 211 частей? В ответе укажите наименьшее и наибольшее возможные значения в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 20; 210 || 210; 20 || 20, 210 || 210, 20 || 20; 210; || 210; 20

2. Женя нарисовал на плоскости несколько различных прямых. Сколько Женя нарисовал прямых, если известно, что они разделили плоскость на 326 частей? В ответе укажите наименьшее и наибольшее возможные значения в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 25; 325 || 325; 25 || 25, 325 || 325, 25 || 25; 325; || 325; 25

3. Женя нарисовал на плоскости несколько различных прямых. Сколько Женя нарисовал прямых, если известно, что они разделили плоскость на 466 частей? В ответе укажите наименьшее и наибольшее возможные значения в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 30; 465 || 465; 30 || 30, 465 || 465, 30 || 30; 465; || 465; 30

Задача 8. (5 баллов)

1. Сколькими способами прямоугольник 3×20 можно разрезать на квадратики 2×2 и полоски 1×4 ?

Ответ: 571

2. Сколькими способами прямоугольник 3×24 можно разрезать га квадратики 2×2 и полоски 1×4 ?

Ответ: 2131

3. Сколькими способами прямоугольник 3×28 можно разрезать на квадратики 2×2 и полоски 1×4 ?

Ответ: 9573

Задача 9. (5 баллов)

1. Сколько существует попарно неравных прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами у которых отношение площади к полупериметру равно 625?

Ответ: 5

2. Сколько существует попарно неравных прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами у которых отношение площади к полупериметру равно 343?

Ответ: 4

3. Сколько существует попарно неравных прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами у которых отношение площади к полупериметру равно 243?

Ответ: 6

Задача 10. (5 баллов)

1. Паук сплёл паутину, которая состоит из оси абсцисс, оси ординат, а так же следующих кривых: $y = x$, $y = -x$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 16$. За день во все узлы попались мухи. Паук сидит в точке (0,0) и собирается съесть всех мух. Какое минимальное расстояние пройдет паук, пока не закончит есть?

Ответ не округляйте. Для записи числа π используйте русскую букву п или английскую p.

Примеры записи ответа:

3p+10

1.5п+7.5

Ответ: 5p+23 || 23+5p || 5п+23 || 23+5п || 5*p+23 || 23+5*p || 5*п+23 || 23+5*п || p*5+23 || п*5+23

2. Паук сплёл паутину, которая состоит из оси абсцисс, оси ординат, а так же следующих кривых: $y = x$, $y = -x$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 + y^2 = 49$. За день во все узлы попались мухи. Паук сидит в точке (0,0) и собирается съесть всех мух. Какое минимальное расстояние пройдет паук, пока не закончит есть?

Ответ не округляйте. Для записи числа π используйте русскую букву п или английскую p.

Примеры записи ответа:

3p+10

1.5п+7.5

Ответ: 9p+39 || 39+9p || 9п+39 || 39+9п || 9*p+39 || 39+9*p || 9*п+39 || 39+9*п || p*9+39 || п*9+39

3. Паук сплёл паутину, которая состоит из оси абсцисс, оси ординат, а так же следующих кривых: $y = x$, $y = -x$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 49$, $x^2 + y^2 = 81$. За день во все узлы попались мухи. Паук сидит в точке (0,0) и собирается съесть всех мух. Какое минимальное расстояние пройдет паук, пока не закончит есть?

Ответ не округляйте. Для записи числа π используйте русскую букву п или английскую p.

Примеры записи ответа:

3p+10

1.5п+7.5

Ответ: 12p+47 || 47+12p || 12п+47 || 47+12п || 12*p+47 || 47+12*p || 12*п+47 || 47+12*п || p*12+47 || п*12+47

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

10 класс

1 вариант

Решения

1. (2 балла) Числовая последовательность задана условием $x_{n+1} = 3x_n + 4x_{n-1}$. Может ли она быть периодической, но не постоянной?

Ответ: Да, может.

Решение: Например, последовательность $(-1)^n$.

2. (2 балла) Точка M лежит на стороне правильного шестиугольника со стороной 10. Найдите сумму расстояний от точки M до прямых, содержащих остальные стороны шестиугольника.

Ответ: $30\sqrt{3}$.

Решение: Расстояние от точки на стороне до противоположной стороны равно расстоянию между этими сторонами и, следовательно, расстоянию между двума вершинами шестиугольника, расположенными через одну. Это расстояние, очевидно, равно $2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = 10\sqrt{3}$.

Также, если из нашей точки опустить перпендикуляры на прямые, содержащие две противоположные стороны шестиугольника, они образуют один отрезок, и его длина также будет равна расстоянию между этими прямыми, то есть $10\sqrt{3}$. Таким образом, мы получаем ответ $30\sqrt{3}$.

3. (2 балла) Для любого ли квадратного трёхчлена $f(x)$ существуют различные числа a, b, c и d такие, что $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = d$ и $f(d) = a$?

Ответ: Нет, не для любого.

Решение: Контрпримером является, в частности, $y = x^2$.

Во-первых, ни одно из чисел a, b, c и d не может быть отрицательным, т.к. отрицательные числа не бывают значениями данного трёхчлена.

Во-вторых, числа 0 и 1 также не подходят, так как $f(x)$ не переводит ни одно их наших чисел в себя.

Допустим, $a > 1$. Тогда $b = a^2 > a > 1$, аналогично $a > b > c > d > a$. Получаем противоречие.

Если же $a < 1$, те же самые неравенства получаются в обратную сторону. Снова противоречие.

Таким образом, для данного трёхчлена не подходят никакие числа.

4. (3 балла) На доске было записано 15 различных нецелых чисел. Для каждого числа x из этих пятнадцати Вася выписал себе в тетрадку отдельно $[x]$ и $\dfrac{1}{\{x\}}$. Какое наименьшее количество различных чисел могло получиться у Васи?

$[x]$ и $\{x\}$ обозначают соответственно целую и дробную часть числа x.

Ответ: 4.

Решение:

Пусть получилось всего не более, чем 3 числа. Тогда у исходных чисел могут быть максимум 3 различных целых и 3 различных дробных части, т.е. всего получается не более $3 \cdot 3 = 9$ вариантов исходных чисел.

Пример для 4 чисел строится как угодно: берём любые 4 натуральных числа, и для каждых a и b (включая одинаковые) строим число $a + \dfrac{1}{b}$. Получается 16 различных исходных чисел, любое из них можно выкинуть.

5. (3 балла) Пусть p, q и r — нечётные простые числа. Докажите, что $p^3+q^3+3pqr \neq r^3$.

Решение:

Пусть это $p^3+q^3+3pqr-r^3=0$. Разложим его на множители. Получится $(p+q-r)(p^2+q^2+r^2+pr+qr-pq)=(p+q-r)\cdot\frac{1}{2}\cdot((p-q)^2+(p+r)^2+(q+r)^2)$.

Вторая скобка всегда положительна, значит, первая равна 0, откуда $r=p+q$, что невозможно при нечётных числах p, q и r.

6. (4 балла) Даны три окружности радиусов 2, 3 и 5, попарно касающиеся друг друга в точках A, B и C внешним образом. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Ответ: $\dfrac{9-\sqrt{21}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{9\sqrt{7}-7\sqrt{3}}{14}$

Решение:

Введём следующие обозначения: у первой окружности: центр — точка O_1, радиус равен a; у второй окружности: центр — точка O_2, радиус равен b; у третьей окружности: центр — точка O_3, радиус равен c. Так как точки A, B, C являются точками касания двух окружностей из трех, то эти точки лежат на отрезках O_1O_2, O_1O_3, O_2O_3. Не теряя общности, можно считать, что точка A лежит на отрезке O_2O_3, точка B — на O_1O_3, точка C — на O_1O_2. Тогда по теореме косинусов для треугольника $O_1O_2O_3$.

$$\cos(O_2O_1O_3)=\frac{(a+b)^2+(a+c)^2-(b+c)^2}{2(a+b)(a+c)}=1-\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}.$$

Аналогично, для двух других углов:

$$\cos(O_1O_2O_3)=1-\frac{2ac}{(a+b)(b+c)};$$

$$\cos(O_2O_3O_1)=1-\frac{2ab}{(a+c)(b+c)}.$$

Обозначим за d следующее выражение: $d=\dfrac{\sqrt{abc}}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)}}$.

По теореме косинусов из треугольника O_1BC:

$$BC=\sqrt{2a^2-2a^2\left(1-\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}\right)}=\sqrt{\frac{4a^2bc}{(a+b)(a+c)}}=2\sqrt{a}\sqrt{b+c}\cdot d.$$

Аналогично по теореме косинусов для треугольников O_2AC и O_3AB:
$AC=2\sqrt{b}\sqrt{a+c}\cdot d$ и $AB=2\sqrt{c}\sqrt{a+b}\cdot d$.
Тогда по формуле Герона, где S — площадь треугольника ABC:

$$S^2=d^4(\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})\cdot(-\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})\cdot$$
$$\cdot(\sqrt{a}\sqrt{b+c}-\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})\cdot(\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}-\sqrt{c}\sqrt{a+b})=$$
$$=d^4(-a(b+c)+(\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})^2)(a(b+c)-(\sqrt{b}\sqrt{a+c}-\sqrt{c}\sqrt{a+b})^2)=$$
$$=d^4(2bc+2\sqrt{b}\sqrt{a+c}\sqrt{c}\sqrt{a+b})(-2bc+2\sqrt{b}\sqrt{a+c}\sqrt{c}\sqrt{a+b})$$
$$=d^4(4bc(a+b)(a+c)-4b^2c^2)=d^4 4bc((a+b)(a+c)-bc)=d^4 4abc(a+b+c)$$

Тогда $S=2d^2\sqrt{abc}\sqrt{a+b+c}$.

Значит, радиус вписанной окружности можно вычислить по следующей формуле, где r — радиус вписанной окружности ABC, p — полупериметр треугольника ABC:

$$r=\frac{S}{p}=\frac{2d^2\sqrt{abc}\sqrt{a+b+c}}{d(\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})}=$$
$$=\frac{2abc\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)}(\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})}.$$

Подставим значения радиусов окружностей из условия и получим, что радиус вписанной окружности треугольника ABC следующий:

$$r = \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot\sqrt{2+3+5}}{\sqrt{5\cdot 7\cdot 8}(\sqrt{2}\sqrt{8}+\sqrt{3}\sqrt{7}+\sqrt{5}\sqrt{5})} = \frac{30}{\sqrt{7}(9+\sqrt{21})} = \frac{9-\sqrt{21}}{2\sqrt{7}} = \frac{9\sqrt{7}-7\sqrt{3}}{14}.$$

7. (4 балла) Найдите, чему может быть равно $x+y$, если известно, что $x^3-6x^2+15x=12$ и $y^3-6y^2+15y=16$.

Ответ: 4.

Решение:

Обозначим $u=x-2$ и $v=y-2$. Тогда исходные уравнения превратятся в $u^3+3u=-2$ и $v^3+3v=2$. Сложив эти уравнения, получаем $(u+v)(u^2-uv+v^2+3)=0$. Вторая скобка всегда положительна, значит первая равна нулю, откуда $x+y=u+v+4=4$..

8. (5 баллов) На клетчатой доске 9×9 расположены 324 фишки. Соседними будем называть во-первых клетки, имеющие общую сторону, а во-вторых, две крайние клетки одной вертикали или горизонтали. Таким образом, у каждой клетки будет ровно 4 соседних.

За один ход разрешается взять 4 фишки, лежащие на одной клетке, и переложить их на 4 соседние клетки. При любой ли начальной расстановке фишек можно добиться того, чтобы на всех клетках оказалось поровну фишек.

Ответ: Не при любой.

Решение 1:

Пронумеруем строки и столбцы числами от 0 до 10. Номера строки и столбца, в которых стоит фишка, будем называть её координатами.

Заметим, что при данной операции не меняется остаток от деления суммы всех координат всех фишек на 11. Изначально этот остаток можно сделать любым, например, можно все фишки собрать в клетке $(0,0)$ а одну поставить в клетку с любыми нужными координатами. В требуемой же конечной этот остаток фиксирован. Значит, можно подобрать начальную ситуацию, где этот остаток другой, и её свести к требуемой не получится.

Решение 2:

Давайте заметим, что чётность количества фишек на главной диагонали не меняется: каждый раз либо с числом этих фишек ничего не происходит, либо оно увеличивается на 2, либо уменьшается на 4.

В то же время в начальной ситуации количество фишек на диагонали может быть любым, в том числе нечётным.

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

10 класс

2 вариант

Решения

1. (2 балла) Числовая последовательность задана условием $x_{n+1} = 2x_n + 3x_{n-1}$. Может ли она быть периодической, но не постоянной?

Ответ: Да, может.

Решение: Например, последовательность $(-1)^n$.

2. (2 балла) Точка M лежит на стороне правильного шестиугольника со стороной 12. Найдите сумму расстояний от точки M до прямых, содержащих остальные стороны шестиугольника.

Ответ: $36\sqrt{3}$.

Решение: Расстояние от точки на стороне до противоположной стороны равно расстоянию между этими сторонами и, следовательно, расстоянию между двума вершинами шестиугольника, расположенными через одну. Это расстояние, очевидно, равно $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = 12\sqrt{3}$.

Также, если из нашей точки опустить перпендикуляры на прямые, содержащие две противоположные стороны шестиугольника, они образуют один отрезок, и его длина также будет равна расстоянию между этими прямыми, то есть $12\sqrt{3}$. Таким образом, мы получаем ответ $36\sqrt{3}$.

3. (2 балла) Для любого ли квадратного трёхчлена $f(x)$ существуют различные числа a, b и c, что $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$?

Ответ: Нет, не для любого.

Решение: Контрпримером является, в частности, $y = x^2$.

Во-первых, ни одно из чисел a, b, и c не может быть отрицательным, т.к. отрицательные числа не бывают значениями данного трёхчлена.

Во-вторых, числа 0 и 1 также не подходят, так как $f(x)$ не переводит ни одно их наших чисел в себя.

Допустим, $a > 1$. Тогда $b = a^2 > a > 1$, аналогично $a > b > c > a$. Получаем противоречие.

Если же $a < 1$, те же самые неравенства получаются в обратную сторону. Снова противоречие.

Таким образом, для данного трёхчлена не подходят никакие числа.

4. (3 балла) На доске было записано 20 различных нецелых чисел. Для каждого числа x из этих двадцати Вася выписал себе в тетрадку отдельно $[x]$ и $\frac{1}{\{x\}}$. Какое наименьшее количество различных чисел могло получиться у Васи?

$[x]$ и $\{x\}$ обозначают соответственно целую и дробную часть числа x.

Ответ: 5.

Решение:

Пусть получилось всего не более, чем 4 числа. Тогда у исходных чисел могут быть максимум 4 различных целых и 4 различных дробных части, т.е. всего получается не более $4 \cdot 4 = 16$ вариантов исходных чисел.

Пример для 5 чисел строится как угодно: например, берём любые 5 натуральных чисел, и для каждых различных a и b строим число $a + \frac{1}{b}$.

5. (3 балла) Пусть p, q и r — различные простые числа и $p^3+q^3+3pqr=r^3$. Докажите, что наименьшее из этих трёх чисел равно 2.

Решение:

Разложим выражение $p^3+q^3+3pqr-r^3$ на множители. Получится $(p+q-r)(p^2+q^2+r^2+pr+qr-pq)=(p+q-r)\cdot\frac{1}{2}\cdot((p-q)^2+(p+r)^2+(q+r)^2)$.

Вторая скобка всегда положительна, значит, первая равна 0, откуда $r=p+q$. Следовательно, p или q это 2.

6. (4 балла) Даны три окружности радиусов 1, 2 и 3, попарно касающиеся друг друга в точках A, B и C внешним образом. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Ответ: $\dfrac{(-30+15\sqrt{2}+6\sqrt{5}+3\sqrt{10}))}{30}$.

Решение:

Введём следующие обозначения: у первой окружности: центр — точка O_1, радиус равен a; у второй окружности: центр — точка O_2, радиус равен b; у третьей окружности: центр — точка O_3, радиус равен c. Так как точки A, B, C являются точками касания двух окружностей из трех, то эти точки лежат на отрезках O_1O_2, O_1O_3, O_2O_3. Не теряя общности, можно считать, что точка A лежит на отрезке O_2O_3, точка B — на O_1O_3, точка C — на O_1O_2. Тогда по теореме косинусов для треугольника $O_1O_2O_3$.

$$\cos(O_2O_1O_3)=\frac{(a+b)^2+(a+c)^2-(b+c)^2}{2(a+b)(a+c)}=1-\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}.$$

Аналогично, для двух других углов:

$$\cos(O_1O_2O_3)=1-\frac{2ac}{(a+b)(b+c)};$$

$$\cos(O_2O_3O_1)=1-\frac{2ab}{(a+c)(b+c)}.$$

Обозначим за d следующее выражение: $d=\dfrac{\sqrt{abc}}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)}}$.

По теореме косинусов из треугольника O_1BC:

$$BC=\sqrt{2a^2-2a^2\left(1-\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}\right)}=\sqrt{\frac{4a^2bc}{(a+b)(a+c)}}=2\sqrt{a}\sqrt{b+c}\cdot d.$$

Аналогично по теореме косинусов для треугольников O_2AC и O_3AB:
$AC=2\sqrt{b}\sqrt{a+c}\cdot d$ и $AB=2\sqrt{c}\sqrt{a+b}\cdot d$.
Тогда по формуле Герона, где S — площадь треугольника ABC:

$$\begin{aligned}S^2&=d^4(\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})\cdot(-\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})\cdot\\&\cdot(\sqrt{a}\sqrt{b+c}-\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})\cdot(\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}-\sqrt{c}\sqrt{a+b})=\\&=d^4(-a(b+c)+(\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})^2)(a(b+c)-(\sqrt{b}\sqrt{a+c}-\sqrt{c}\sqrt{a+b})^2)=\\&=d^4(2bc+2\sqrt{b}\sqrt{a+c}\sqrt{c}\sqrt{a+b})(-2bc+2\sqrt{b}\sqrt{a+c}\sqrt{c}\sqrt{a+b})\\&=d^4(4bc(a+b)(a+c)-4b^2c^2)=d^44bc((a+b)(a+c)-bc)=d^44abc(a+b+c)\end{aligned}$$

Тогда $S=2d^2\sqrt{abc}\sqrt{a+b+c}$.

Значит, радиус вписанной окружности можно вычислить по следующей формуле, где r — радиус вписанной окружности ABC, p — полупериметр треугольника ABC:

$$r=\frac{S}{p}=\frac{2d^2\sqrt{abc}\sqrt{a+b+c}}{d(\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})}=$$

$$=\frac{2abc\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)}(\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})}.$$

Подставим значения радиусов окружностей из условия и получим, что радиус вписанной окружности треугольника ABC следующий:

$$r = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{1+2+3}}{\sqrt{3 \cdot 4 \cdot 5}(\sqrt{1}\sqrt{5}+\sqrt{2}\sqrt{4}+\sqrt{3}\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}+2\sqrt{2}+3)} = \frac{(-30+15\sqrt{2}+6\sqrt{5}+3\sqrt{10}))}{30}.$$

7. (4 балла) Найдите, чему может быть равно $x+y$, если известно, что $x^3+6x^2+16x=-15$ и $y^3+6y^2+16y=-17$.

Ответ: -4

Решение: Обозначим $u = x+2$ и $v = y+2$. Тогда исходные уравнения превратятся в $u^3+4u=1$ и $v^3+4v=-1$. Сложив эти уравнения, получаем $(u+v)(u^2-uv+v^2+4)=0$. Вторая скобка всегда положительна, значит первая равна нулю, откуда $x+y=u+v-4=-4$.

8. (5 баллов) На клетчатой доске 11×11 расположены 484 фишки. Соседними будем называть во-первых клетки, имеющие общую сторону, а во-вторых, две крайние клетки одной вертикали или горизонтали. Таким образом, у каждой клетки будет ровно 4 соседних.

За один ход разрешается взять 4 фишки, лежащие на одной клетке, и переложить их на 4 соседние клетки. При любой ли начальной расстановке фишек можно добиться того, чтобы на всех клетках оказалось поровну фишек.

Ответ: Не при любой.

Решение 1:

Пронумеруем строки и столбцы числами от 0 до 10. Номера строки и столбца, в которых стоит фишка, будем называть её координатами.

Заметим, что при данной операции не меняется остаток от деления суммы всех координат всех фишек на 11. Изначально этот остаток можно сделать любым, например, можно все фишки собрать в клетке $(0,0)$ а одну поставить в клетку с любыми нужными координатами. В требуемой же конечной этот остаток фиксирован. Значит, можно подобрать начальную ситуацию, где этот остаток другой, и её свести к требуемой не получится.

Решение 2:

Давайте заметим, что чётность количества фишек на главной диагонали не меняется: каждый раз либо с числом этих фишек ничего не происходит, либо оно увеличивается на 2, либо уменьшается на 4.

В то же время в начальной ситуации количество фишек на диагонали может быть любым, в том числе нечётным.

10 класс. I отборочный тур.

Задача 1 (2 балла).

1. На листке бумаги нарисовали квадрат со стороной 1, рядом с ним нарисовали квадрат со стороной 2, рядом с ними нарисовали квадрат со стороной 3 и т.д. Оказалось, что площадь всей получившейся фигуры равна 338350. Какое количество квадратов было нарисовано?

Ответ: 100

2. На листке бумаги нарисовали квадрат со стороной 1, рядом с ним нарисовали квадрат со стороной 2, рядом с ними нарисовали квадрат со стороной 3 и т.д. Оказалось, что площадь всей получившейся фигуры равна 1136275. Какое количество квадратов было нарисовано?

Ответ: 150

3. На листке бумаги нарисовали квадрат со стороной 1, рядом с ним нарисовали квадрат со стороной 2, рядом с ними нарисовали квадрат со стороной 3 и т.д. Оказалось, что площадь всей получившейся фигуры равна 42925. Какое количество квадратов было нарисовано?

Ответ: 50

Примеры записи ответов:
45

Задача 2. (2 балла).

1. В стране Самолётии 20 городов, некоторые города соединены двусторонними авиарейсами. При этом, между любыми двумя городами существует только один разумный авиамаршрут (т. е. маршрут, на котором не надо пользоваться одним и тем же авиарейсом в разных направлениях).
Для каждого из городов вычислили авиарасстояние до столицы. Оно рассчитывается как минимальное количество рейсов, необходимое, чтобы долететь из этого города до столицы. Для каждых двух городов A и B, соединённых авиарейсом, стоимость билета из города A в город B (также как и обратного) в тугриках равна наибольшему из авиарасстояний от A и B до столицы. В частности, билет до столицы из любого соединённого с ней прямым рейсом города стоит 1 тугрик; все остальные рейсы, вылетающие из этих городов, стоят 2 тугрика и так далее.
Вася много путешествовал по Самолётии (не только на самолётах) и в конце года оказалось, что он ровно по разу воспользовался каждым из авиарейсов (то есть, для каждых двух городов A и B, соединённых прямым авиарейсом, он слетал либо из A в B, либо из B в A, причём только в одну их сторон). Какое наибольшее количество тугриков он мог потратить на авиаперелёты?

Ответ: 190

2. В стране Аэродромии 30 городов, некоторые города соединены двусторонними авиарейсами. При этом, между любыми двумя городами существует только один разумный авиамаршрут (т. е. маршрут, на котором не надо пользоваться одним и тем же авиарейсом в разных направлениях).

Для каждого из городов вычислили авиарасстояние до столицы. Оно рассчитывается как минимальное количество рейсов, необходимое, чтобы долететь из этого города до столицы. Для каждых двух городов А и В, соединённых авиарейсом, стоимость билета из города А в город В (также как и обратного) в фартингах равна наибольшему из авиарасстояний от А и В до столицы. В частности, билет до столицы из любого соединённого с ней прямым рейсом города стоит 1 фартинг; все остальные рейсы, вылетающие из этих городов, стоят 2 фартинга и так далее.
Коля много путешествовал по Аэродромии (не только на самолётах) и в конце года оказалось, что он ровно по разу воспользовался каждым из авиарейсов (то есть, для каждых двух городов А и В, соединённых прямым авиарейсом, он слетал либо из А в В, либо из В в А, причём только в одну их сторон). Какое наибольшее количество фартингов он мог потратить на авиаперелёты?

Ответ: 435

3. В стране Авиании 40 городов, некоторые города соединены двусторонними авиарейсами. При этом, между любыми двумя городами существует только один разумный авиамаршрут (т. е. маршрут, на котором не надо пользоваться одним и тем же авиарейсом в разных направлениях).
Для каждого из городов вычислили авиарасстояние до столицы. Оно рассчитывается как минимальное количество рейсов, необходимое, чтобы долететь из этого города до столицы. Для каждых двух городов А и В, соединённых авиарейсом, стоимость билета из города А в город В (также как и обратного) в марках равна наибольшему из авиарасстояний от А и В до столицы. В частности, билет до столицы из любого соединённого с ней прямым рейсом города стоит 1 марку; все остальные рейсы, вылетающие из этих городов, стоят 2 марки и так далее.
Петя много путешествовал по Авиании (не только на самолётах) и в конце года оказалось, что он ровно по разу воспользовался каждым из авиарейсов (то есть, для каждых двух городов А и В, соединённых прямым авиарейсом, он слетал либо из А в В, либо из В в А, причём только в одну их сторон). Какое наибольшее количество марок он мог потратить на авиаперелёты?

Ответ: 780.

Примеры записи ответов:
45

Задача 3 (3 балла).

1. При каких натуральных x и y значение выражения $4x+\frac{169}{x}+9y+\frac{625}{y}$ наименьшее? В ответе укажите x и y в правильном порядке через точку с запятой.

Ответ: 7, 8 || 7; 8 || (7, 8) || (7; 8)

2. При каких натуральных x и y значение выражения $4x+\frac{289}{x}+16y+\frac{529}{y}$ наименьшее? В ответе укажите x и y в правильном порядке через точку с запятой.

Ответ: 9, 6 || 9; 6 || (9, 6) || (9; 6)

3. При каких натуральных x и y значение выражения $25x+\frac{484}{x}+4y+\frac{225}{y}$ наименьшее? В ответе укажите x и y в правильном порядке через точку с запятой.

Ответ: 4, 8 || 4; 8 || (4, 8) || (4; 8)

Примеры записи ответов:
(1; 2)
1; 2

Задача 4 (3 балла).

1. Известно, что квадратное уравнение $Аx^2 + Бx + В = 0$, где А, Б и В — какие-то цифры, имеет корень -3/2. На какое число большее 1 точно делится трёхзначное число АБВ (то есть число, состоящее из цифр А, Б и В в таком порядке)?

Ответ: 23

2. Известно, что квадратное уравнение $Аx^2 + Бx + В = 0$, где А, Б и В — какие-то цифры, имеет корень -3. На какое число большее 1 точно делится трёхзначное число АБВ (то есть число, состоящее из цифр А, Б и В в таком порядке)?

Ответ: 13

3. Известно, что квадратное уравнение $Аx^2 + Бx + В = 0$, где А, Б и В — какие-то цифры, имеет корень -7. На какое число большее 1 точно делится трёхзначное число АБВ (то есть число, состоящее из цифр А, Б и В в таком порядке)?

Ответ: 17

Примеры записи ответов:
45

Задача 5 (3 балла).

1. Известно, что натуральное число n делится на 3 и на 4. Найдите все такие возможные n, если известно, что количество всех его делителей (включая 1 и n) равно 15 ? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 144, 324 || 144; 324 || 324; 144 || 324, 144

2. Известно, что натуральное число n делится на 3 и на 4. Найдите все такие возможные n, если известно, что количество всех его делителей (включая 1 и n) равно 21 ? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 576, 2916 || 576; 2916 || 2916, 576 || 2916; 576

3. Известно, что натуральное число n делится на 3 и на 4. Найдите все такие возможные n, если известно, что количество всех его делителей (включая 1 и n) равно 22 ? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 3072

Примеры записи ответов:
45
45; 456

Задача 6 (3 балла).

1. ABCD — равнобедренная трапеция, AB = CD = 49, BC = 84, AD = 140. BCDE также равнобедренная трапеция. Найдите AE. (Точки A и E не совпадают)
Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 136.

2. ABCD — равнобедренная трапеция, AB = CD = 121, BC = 176, AD = 220. BCDE также равнобедренная трапеция. Найдите AE. (Точки A и E не совпадают)
Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 84.

3. ABCD — равнобедренная трапеция, AB = CD = 25, BC = 40, AD = 60. BCDE также равнобедренная трапеция. Найдите AE. (Точки A и E не совпадают)
Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 44.

Примеры записи ответов:
45
45; 56

Задача 7 (3 балла).

1. Дана арифметическая прогрессия a_n с разностью 2 и первым членом $a_1 = 9$. При каком n выполнено следующее равенство: $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=21$?

Ответ: 1009.

2. Дана арифметическая прогрессия a_n с разностью 2 и первым членом $a_1 = 4$. При каком n выполнено следующее равенство: $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=22$?

Ответ: 1057.

3. Дана арифметическая прогрессия a_n с разностью 2 и первым членом $a_1 = 1$. При каком n выполнено следующее равенство: $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=23$?

Ответ: 1105

Примеры записи ответов:
45

Задача 8 (3 балла).

1. Пусть $f(x)=\frac{2\cdot 9^x}{9^x+3}$. Найдите сумму $f(0)+f\left(\frac{1}{2017}\right)+\ldots f\left(\frac{2016}{2017}\right)+f(1)$.

Ответ: 2018

2. Пусть $f(x)=\frac{16^x}{16^x+4}$. Найдите сумму $f(0)+f\left(\frac{1}{2017}\right)+\ldots f\left(\frac{2016}{2017}\right)+f(1)$.

Ответ: 1009

3. Пусть $f(x)=\frac{3\cdot 4^x}{4^x+2}$. Найдите сумму $f(0)+f\left(\frac{1}{2017}\right)+\ldots f\left(\frac{2016}{2017}\right)+f(1)$.

Ответ: 3027

Примеры записи ответов:
45

Задача 9 (4 балла).

1. Из точки A проведены две касательные к окружности. Расстояние от точки A до точки касания равно 13, а расстояние между точками касания равно 24. Найдите наибольшее возможное расстояние от точки A до точки на окружности.

Ответ: 65

2. Из точки A проведены две касательные к окружности. Расстояние от точки A до точки касания равно 10, а расстояние между точками касания равно 12. Найдите наибольшее возможное расстояние от точки A до точки на окружности.

Ответ: 20

3. Из точки A проведены две касательные к окружности. Расстояние от точки A до точки касания равно 10, а расстояние между точками касания равно 16. Найдите наибольшее возможное расстояние от точки A до точки на окружности.

Ответ: 30

Примеры записи ответов:

Задача 10 (5 баллов).

1. График дробно-линейной функции $\frac{3x-3}{x-2}$ повернули вокруг некоторой точки на какой-то угол, в результате чего получился график дробно-линейной функции $\frac{-x+a}{2x-4}$. Чему может быть равно a? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -4, 8 || -4; 8 || 8; -4 || 8, -4

2. График дробно-линейной функции $\frac{5x-7}{x-2}$ повернули вокруг некоторой точки на какой-то угол, в результате чего получился график дробно-линейной функции $\frac{-12x+a}{3x+1}$. Чему может быть равно a? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 5, -13 || 5; -13 || -13; 5 || -13, 5

3. График дробно-линейной функции $\frac{3x-11}{x-3}$ повернули вокруг некоторой точки на какой-то угол, в результате чего получился график дробно-линейной функции $\frac{12x-a}{4x-1}$. Чему может быть равно a? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -5; 11 || -5, 11 || 11; -5 || 11, -5

<u>Примеры записи ответов:</u>
-1
-1; 2

Задача 1. (2 балла)

1. Одна из сторон треугольника равна $10\sqrt{6}-20$, а два его угла равны 30 и 45 градусам. Чему может быть равна наименьшая сторона треугольника? Найдите все возможные значения. В ответе укажите их сумму.

Ответ: 10

2. Одна из сторон треугольника равна $8\sqrt{6}-16$, а два его угла равны 30 и 45 градусам. Чему может быть равна наименьшая сторона треугольника? Найдите все возможные значения. В ответе укажите их сумму.

Ответ: 8

3. Одна из сторон треугольника равна $6\sqrt{6}-12$, а два его угла равны 30 и 45 градусам. Чему может быть равна наименьшая сторона треугольника? Найдите все возможные значения. В ответе укажите их сумму.

Ответ: 6

Задача 2. (2 балла)

1. Дана дробно-линейная функция $f(x)=\dfrac{3x-2}{x-2}$. Найдите квадрат наименьшего расстояния между точками на разных ветвях графика этой функции.

Ответ: 32

2. Дана дробно-линейная функция $f(x)=\dfrac{5x+4}{x-1}$. Найдите квадрат наименьшего расстояния между точками на разных ветвях графика этой функции.

Ответ: 72

3. Дана дробно-линейная функция $f(x)=\dfrac{2x+27}{x+1}$. Найдите квадрат наименьшего расстояния между точками на разных ветвях графика этой функции.

Ответ: 200

Задача 3. (3 балла)

1. Последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет соотношению $x_{n+1}=\sqrt{3}x_n-x_{n-1}$. При этом $x_0=-2$, $x_1=\sqrt{3}$. Найдите x_{2000}.

Ответ: -5.

2. Последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет соотношению $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}$. При этом $x_1=-2$, $x_2=3$. Найдите x_{2016}.

Ответ: -5.

3. Последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет соотношению $x_{n+1}=\sqrt{2}x_n-x_{n-1}$. При этом $x_0=-3$, $x_1=2\sqrt{2}$. Найдите x_{2222}.

Ответ: -7.

Задача 4. (3 балла)

1. Квадратное уравнение $x^2-10x+a$ имеет корни x_2 и x_4. Квадратное уравнение x^2-4x+b имеет корни x_1 и x_3. При это $x_1<x_2<x_3<x_4$. Чему может равняться суммарная длина промежутков, на которых выполняется неравенство $(x^2-10x+a)(x^2-4x+b)\leqslant 0$? Если возможных ответов несколько, укажите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 6

2. Квадратное уравнение x^2-5x+a имеет корни x_2 и x_4. Квадратное уравнение x^2+2x+b имеет корни x_1 и x_3. При это $x_1<x_2<x_3<x_4$. Чему может равняться суммарная длина промежутков, на которых выполняется неравенство $(x^2-5x+a)(x^2+2x+b)\leqslant 0$? Если возможных ответов несколько, укажите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 7

3. Квадратное уравнение x^2-3x+a имеет корни x_1 и x_3. Квадратное уравнение x^2-8+b имеет корни x_2 и x_4. При это $x_1<x_2<x_3<x_4$. Чему может равняться суммарная длина промежутков, на которых выполняется неравенство $(x^2-3x+a)(x^2-8x+b)\leqslant 0$? Если возможных ответов несколько, укажите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 5

Задача 5. (3 балла)

1. У приведённого многочлена четвёртой степени ровно четыре различных корня, образующих геометрическую прогрессию. Коэффициент многочлена при x равен 6, свободный член равен 9. Чему может быть равен коэффициент при x^3? Если возможных ответов несколько, укажите их в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответа:

1.5

15

1; 5

Ответ: -2; 2 || 2; -2 || 2, -2 || -2, 2 || +2; -2 || -2; +2

2. У приведённого многочлена четвёртой степени ровно четыре различных корня, образующих геометрическую прогрессию. Коэффициент многочлена при x^3 равен 2, свободный член равен 25. Чему может быть равен коэффициент при x? Если возможных ответов несколько, укажите их в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответа:

1.5

15

1; 5

Ответ: -10; 10 || 10; -10 || 10, -10 || -10, 10 || +10; -10 || -10; +10

3. У приведённого многочлена четвёртой степени ровно четыре различных корня, образующих геометрическую прогрессию. Коэффициент многочлена при x^3 равен $2\sqrt{3}$, коэффициент при x равен 6. Чему может быть равен свободный член? Если возможных ответов несколько, укажите их в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответа:

1.5

15

1; 5

Ответ: 3

Задача 6. (3 балла)

1. Женя нарисовал на плоскости несколько различных прямых. Сколько Женя нарисовал прямых, если известно, что они разделили плоскость на 211 частей? В ответе укажите наименьшее и наибольшее возможные значения в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 20; 210 || 210; 20 || 20, 210 || 210, 20 || 20; 210; || 210; 20

2. Женя нарисовал на плоскости несколько различных прямых. Сколько Женя нарисовал прямых, если известно, что они разделили плоскость на 326 частей? В ответе укажите наименьшее и наибольшее возможные значения в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 25; 325 || 325; 25 || 25, 325 || 325, 25 || 25; 325; || 325; 25

3. Женя нарисовал на плоскости несколько различных прямых. Сколько Женя нарисовал прямых, если известно, что они разделили плоскость на 466 частей? В ответе укажите наименьшее и наибольшее возможные значения в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 30; 465 || 465; 30 || 30, 465 || 465, 30 || 30; 465; || 465; 30

Задача 7. (4 балла)

1. На боковых сторонах трапеции AB и CD, как на диаметрах, построены две окружности, пересекающиеся в точках K и L. Прямая KL пересекает основание BC в точке X. Прямая ВС вторично пересекает окружность, построенную на AB, как на диаметре, в точке Y. $AB = 23$, $BC = 3$, $CD = 22$, $AD = 12$.

Найдите XY.

Ответ: 8

2. На боковых сторонах трапеции AB и CD, как на диаметрах, построены две окружности, пересекающиеся в точках K и L. Прямая KL пересекает основание BC в точке X. Прямая ВС вторично пересекает окружность, построенную на AB, как на диаметре, в точке Y. $AB = 17$, $BC = 4$, $CD = 13$, $AD = 16$.

Найдите XY.

Ответ: 12

3. На боковых сторонах трапеции AB и CD, как на диаметрах, построены две окружности, пересекающиеся в точках K и L. Прямая KL пересекает основание BC в точке X. Прямая ВС вторично пересекает окружность, построенную на AB, как на диаметре, в точке Y. $AB = 31$, $BC = 5$, $CD = 29$, $AD = 25$.

Найдите XY.

Ответ: 15

Задача 8. (4 балла)

1. Сколькими способами прямоугольник 3×20 можно разрезать на квадратики 2×2 и полоски 1×4 ?

Ответ: 571

2. Сколькими способами прямоугольник 3×24 можно разрезать га квадратики 2×2 и полоски 1×4 ?

Ответ: 2131

3. Сколькими способами прямоугольник 3×28 можно разрезать на квадратики 2×2 и полоски 1×4 ?

Ответ: 9573

Задача 9. (4 балла)

1. Сколько существует попарно неравных прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами у которых отношение площади к полупериметру равно 625?

Ответ: 5

2. Сколько существует попарно неравных прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами у которых отношение площади к полупериметру равно 343?

Ответ: 4

3. Сколько существует попарно неравных прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами у которых отношение площади к полупериметру равно 243?

Ответ: 6

Задача 10. (5 баллов)

1. Паук сплёл паутину, которая состоит из оси абсцисс, оси ординат, а так же следующих кривых: $y = x$, $y = -x$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 16$. За день во все узлы попались мухи. Паук сидит в точке (0,0) и собирается съесть всех мух. Какое минимальное расстояние пройдет паук, пока не закончит есть?

Ответ не округляйте. Для записи числа π используйте русскую букву п или английскую p.

Примеры записи ответа:

3p+10

1.5п+7.5

Ответ: 5p+23 || 23+5p || 5п+23 || 23+5п || 5*p+23 || 23+5*p || 5*п+23 || 23+5*п || p*5+23 || п*5+23

2. Паук сплёл паутину, которая состоит из оси абсцисс, оси ординат, а так же следующих кривых: $y = x$, $y = -x$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 + y^2 = 49$. За день во все узлы попались мухи. Паук сидит в точке (0,0) и собирается съесть всех мух. Какое минимальное расстояние пройдет паук, пока не закончит есть?

Ответ не округляйте. Для записи числа π используйте русскую букву п или английскую p.

Примеры записи ответа:

3p+10

1.5п+7.5

Ответ: 9p+39 || 39+9p || 9п+39 || 39+9п || 9*p+39 || 39+9*p || 9*п+39 || 39+9*п || p*9+39 || п*9+39

3. Паук сплёл паутину, которая состоит из оси абсцисс, оси ординат, а так же следующих кривых: $y = x$, $y = -x$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 49$, $x^2 + y^2 = 81$. За день во все узлы попались мухи. Паук сидит в точке (0,0) и собирается съесть всех мух. Какое минимальное расстояние пройдет паук, пока не закончит есть?

Ответ не округляйте. Для записи числа π используйте русскую букву п или английскую p.

Примеры записи ответа:

3p+10

1.5п+7.5

Ответ: 12p+47 || 47+12p || 12п+47 || 47+12п || 12*p+47 || 47+12*p || 12*п+47 || 47+12*п || p*12+47 || п*12+47

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

11 класс

1 вариант

1. (2 балла) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 16$ и $BC = 10$ окружности, построенные на сторонах AB, BC и CD как на диаметрах, пересекаются в одной точке. Длина диагонали AC равна 10. Найдите длину BD.

Ответ: Ответ: 24

Решение:

Обозначим точку пересечения трех окружностей за O. Тогда так как окружности построены на сторонах трапеции AB, BC и CD как на диаметрах, то углы $\angle AOB$, $\angle BOC$ и $\angle COD$ — прямые, следовательно, точки A, O, C лежат на одной прямой и точки B, O, D лежат на одной прямой, то есть O — точка пересечения диагоналей трапеции.

Обозначим середины сторон AB, BC и CD за K, L и M соответственно. Так как KL и LM — средние линии в треугольниках ABC и BCD, $KL \parallel AC$ и $LM \parallel BD$. Значит, $KL \perp LM$, то есть треугольник KLM — прямоугольный. Кроме того, $KL = \dfrac{AC}{2} = 5$, а $KM = \dfrac{AD+BC}{2} = 13$, значит, по теореме Пифагора, $LM = 12$. Отсюда $BD = 2LM = 24$.

Вместо рассуждений со средними линиями можно рассмотреть треугольники BOC и AOD, которые подобны с коэффициентом $10 : 16 = 5 : 8$. Так как $AC = 10$, то $OC = \dfrac{5}{13}AC = \dfrac{50}{13}$. По теореме Пифагора в треугольнике BOC находим $OB = \sqrt{10^2 - \dfrac{2500}{169}} = \dfrac{120}{13}$. Отсюда $BD = \dfrac{13}{5}OB = \dfrac{13}{5} \cdot \dfrac{120}{13} = 24$.

2. (3 балла) В равногранном тетраэдре отметили основания и середины всех четырёх его медиан. Каждое основание медианы тетраэдра соединили с серединами трёх остальных. Докажите, что получившийся многогранник — прямоугольный параллелепипед.

Решение: Обозначим радиус-векторы вершин тетраэдра за $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Тогда основания медиан задаются формулой $\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$ и аналогичными ей, а середины медиан формулой $\dfrac{\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}+\vec{d}}{2} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+3\vec{d}}{6}$ и аналогичными ей.

Вычитая один радиус-вектор из другого, получаем векторы рёбер получившегося многогранника $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}{6}$ и аналогичные ему. При этом каждый такой вектор мы получаем два раза, т.е. всего 6 различных векторов. Кроме того, вместо с вектором $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}{6}$ мы также получаем и противоположный ему вектор $\dfrac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}}{6}$, который ему коллинеарен. Таким образом, мы уже доказали, что наш многогранник параллелепипед.

Умножив длины всех векторов на 6, понимаем, что нам достаточно доказать взаимную перпендикулярность трёх векторов: $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}$, $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}$ и $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}$. Рассмотрим первые два вектора. Введём дополнительные обозначения $\vec{a}-\vec{c}=\vec{x}$ и $\vec{b}-\vec{d}=\vec{y}$. Тогда нам нужно доказать, что $\vec{x}-\vec{y} \perp \vec{x}+\vec{y}$, то есть, что скалярное произведение этих векторов равно 0. Их скалярное произведение это $\vec{x}^2-\vec{y}^2$, а равенство его нулю равносильно равенству $\vec{x}^2$ и $\vec{y}^2$, то есть равенству длин $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Но это равенство означает, что два противоположных ребра тетраэдра равны, что следует из равногранности тетраэдра. Перпендикулярность остальных пар векторов доказывается аналогично.

3. (3 балла) Найдите расстояние между кривыми $y = e^{3x+5}$ и $y = (\ln x - 5)/3$.

Ответ: $\sqrt{2}(2+\dfrac{\ln 3}{3})$.

Решение: Расстояние между графиками функций равно расстоянию между их ближайшими точками. Заметим, что функции, между графиками которых требуется найти расстояние, являются обратными друг к другу, а их графики симметричны относительно прямой $y = x$ и, кроме того, находятся по разные стороны от неё.

Если мы найдём на графике функции $y = e^{3x+5}$ точку A, ближайшую к прямой $y = x$, то точка A', симметричная ей, очевидно, будет ближайшей к этой прямой на графике функции $y = (\ln x - 5)/3$. Если провести через эти точки прямые, параллельные прямой $y = x$, графики обеих функций окажутся вне полосы, ограниченной этими прямыми, значит, расстояние между любыми двумя точками на этих графиках не меньше расстояния между этими прямыми. С другой стороны, расстояние между этими прямыми равно расстоянию между точками A и A', значит, AA' и есть искомое расстояние.

Пусть координаты точки A это $(x; e^{3x+5})$, тогда A' имеет координаты $(e^{3x+5}; x)$ и расстояние между ними

$$\rho(x) = \sqrt{(x - e^{3x+5})^2 + (e^{3x+5} - x)^2} = \sqrt{2(e^{3x+5} - x)^2} = \sqrt{2}|e^{3x+5} - x|$$

Рассмотрим функцию $f(x) = e^{3x+5} - x$ и найдем ее минимум с помощью производной: $f'(x) = 3e^{3x+5} - 1$. Приравнивая эту производную к нулю в точке x_0, мы получаем $x_0 = \dfrac{-\ln 3 - 5}{3}$.

Тогда при $x < x_0$ функция $f(x)$ убывает, а при $x > x_0$ — возрастает, следовательно в точке x_0 функция $f(x)$ достигает минимума.

$f(x_0) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\ln 3 + 5}{3} > 0$, следовательно $f(x) > 0$ при $x \in R$.

Таким образом, $\rho(x) = \sqrt{2}(e^{3x+5} - x)$.

Заметим, что $\rho(x)$ отличается от $f(x)$ домножением на $\sqrt{2}$, следовательно, минимум функции достигается в той же точке, что и минимум функции $f(x)$. Таким образом, минимальное расстояние равно: $\sqrt{2}\left(2 + \dfrac{\ln 3}{3}\right)$.

4. (3 балла) В некоторой стране 450 городов и 6 авиакомпаний. Каждые два города соединены рейсами одной из шести авиакомпаний. Можно ли утверждать, что найдётся авиакомпания и больше 150 городов, между любыми двумя из которых можно добраться рейсами этой авиакомпании (возможно, с пересадками)?

Ответ: Нет, это не обязательно верно.

Решение: Построим контрпример. Разобьём города на 6 групп по 75 городов. Назовём эти группы A, B, C, D, E, F.

Внутри каждой группы соединим города рейсами компании номер 1.

Компания номер 2 будет соединять города группы A с городами группы B, C с D, а E с F.

Компания номер 3 будет соединять города группы A с городами группы D, B с E, а C с F.

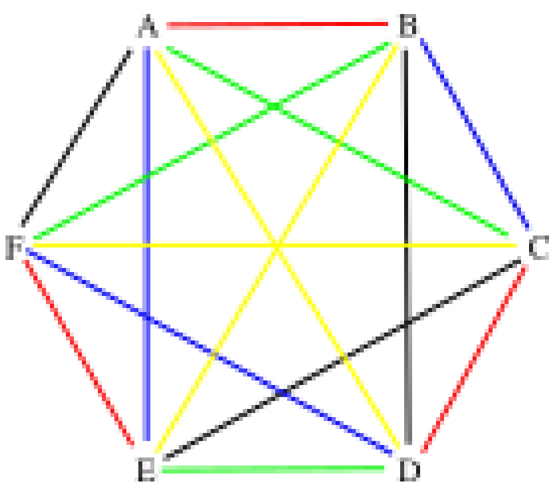
Компания номер 4 будет соединять города группы A с городами группы C, B с F, а D с E.

Компания номер 5 будет соединять города группы A с городами группы E, B с C, а D с F.

Компания номер 6 будет соединять города группы A с городами группы F, B с D, а C с E.

Таким образом, рейсы компании номер 1 связывают по 75 городов, а рейсы остальных компаний ровно по 150.

Это построение схематично изображено на рисунке. Разные компании обозначены разными цветами.



Данный контрпример, разумеется, не единственный.

5. (3 балла) Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $4f(x+y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 12$.

Ответ: $f(x) = 4\cdot 3^x$.

Решение:

Вначале докажем, что $f(x) \geqslant 0$. Действительно, $4f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0$.

Подставив в условие задачи $x = y = 0$, получаем $4f(0) = f(0)\cdot f(0)$ откуда $f(0) = 0$ или $f(0) = 4$. Если $f(0) = 0$, то $4f(x+0) = f(x)f(0)$, откуда $f(x) = 0$ для любого x, что неверно. Следовательно, $f(0) = 4$.

Подставляя $y = 1$, получаем $4f(x+1) = f(x)\cdot f(1)$, то есть $f(x+1) = 3f(x)$. Отсюда для любого натурального n находим $f(n) = f(0)3^n = 4\cdot 3^n$.

Также легко по индукции доказать формулу $f(x_1+x_2+...+x_n) = \frac{1}{4^{n-1}}f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)$, откуда, в частности, $f(1) = f\left(\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4^{n-1}}(f(\frac{1}{n}))^n$. Значит, $f\left(\frac{1}{n}\right)^n = 3\cdot 4^n$, откуда $f\left(\frac{1}{n}\right) = 4\cdot 3^{\frac{1}{n}}$ для всех натуральных n.

Отсюда $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4^{m-1}}(f(\frac{1}{n}))^m = \frac{1}{4^{m-1}}4^m\cdot 3^{\frac{m}{n}} = 4\cdot 3^{\frac{m}{n}}$ для натуральных m и n.

Теперь разберёмся с отрицательными дробями: $4f(0) = 4f\left(\frac{m}{n}-\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right)f\left(-\frac{m}{n}\right)$, откуда $f\left(-\frac{m}{n}\right) = 4\cdot 3^{-\frac{m}{n}}$.

Таким образом, функция $f(x) = 4\cdot 3^x$ для всех рациональных чисел. Функция в правой части равенства также непрерывна, а если две функции совпадают для всех рациональных чисел, то они совпадают на всей вещественной оси.

6. (3 балла) Пусть x, y, z и t — неотрицательные числа, такие что $x+y+z+t = 5$. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{z^2+y^2}+\sqrt{z^2+t^2}+\sqrt{t^2+9} \geqslant 10$$

.

Решение:

Рассмотрим на плоскости следующие точки: $A(0,0)$; $B(x,1)$; $C(x+y,1+x)$; $D(x+y+z,1+x+y)$; $E(x+y+z+t,1+x+y+z)$; $F(x+y+z+t+3,1+x+y+z+t)$. Тогда длина ломаной $ABCDEF$ совпадает с выражением, которое требуется оценить. По неравенству треугольника длина ломаной $ABCDEF$ не меньше длины отрезка AF. С учетом того, что $x+y+z+t = 5$, координаты точки F это $(8,6)$ а длина отрезка $AF = 10$.

7. (4 балла) Решите уравнение:

$$\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin 2017x = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos 2017x.$$

Ответ:

1) $x = \dfrac{\pi k}{1009}$, $k \in \mathbb{Z}$, k не делится на 1009.

2) $x = \dfrac{\pi + 4\pi k}{4036}, k \in \mathbb{Z}$.

Решение:

Докажем сначала следующие формулы по индукции в случае, если $\sin x \neq 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x} = \frac{\sin(nx)\cos(nx)}{\sin x}$$

Первая формула. База $n = 1$: $\sin x = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x}$ — верное утверждение.

Переход: предположим, что утверждение верно для некоторого n, докажем, что оно верно и для $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin((2k-1)x) = \sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)x) + \sin((2n+1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} + \sin((2n+1)x) =$$

$$= \frac{\sin^2(nx) + \sin(2nx + x)\sin x}{\sin x} = \frac{\sin^2(nx) + \sin(2nx)\cos x \sin x + \cos(2nx)\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2(nx) + 2\sin(nx)\cos(nx)\cos x \sin x + (\cos^2(nx) - \sin^2(nx))\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2(nx)\cos^2 x + 2\sin(nx)\cos(nx)\cos x \sin x + \cos^2(nx)\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{(\sin(nx)\cos(x) + \cos nx \sin x)^2}{\sin x} = \frac{\sin^2((n+1)x)}{\sin x}.$$

Вторая формула. База $n = 1$: $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$ — верное утверждение.

Переход: предположим, что утверждение верно для некоторого n, докажем, что оно верно и для $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \cos((2k-1)x) = \sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x) + \cos((2n+1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x} + \cos((2n+1)x) =$$

$$= \frac{\sin(2nx) + 2\cos(2nx + x)\sin x}{2\sin x} = \frac{\sin(2nx) + 2\cos(2nx)\cos x \sin x - 2\sin(2nx)\sin^2 x}{2\sin x} =$$

$$= \frac{\sin(2nx)(1 - 2\sin^2 x) + \cos(2nx)\sin 2x}{2\sin x} = \frac{\sin(2nx)\cos(2x) + \cos(2nx)\sin 2x}{2\sin x} = \frac{\sin(2(n+1)x)}{2\sin x}.$$

Разберём сначала случай $\sin x = 0$. В этом случае левая часть уравнения превращается в 0, а правая это 1009 или -1009, то есть числа $x = \pi k$ при целых k не являются решениями задачи.

Воспользовавшись доказанными выше формулами, превратим исходное уравнение в $\dfrac{\sin^2 1009x}{\sin x} = \dfrac{\sin 1009x \cos 1009x}{\sin x}$, откуда $\sin 1009x = 0$ или $\sin 1009x = \cos 1009x$.

В первом случае получаем $1009x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, откуда $x = \dfrac{\pi k}{1009}, k \in \mathbb{Z}$. При этом, так как $\sin x \neq 0$, число k не делится на 1009.

Во втором случае получаем $1009x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, откуда $x = \dfrac{\pi + 4\pi k}{4036}, k \in \mathbb{Z}$. Для таких чисел $\sin x \neq 0$, поэтому из этого множества решений никакие числа исключать не приходится.

8. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается делать следующую операцию: стирать две соседние цифры, сумма которых не превосходит 9, и записывать эту сумму на их место. Изначально было написано 200-значное число $12341234\ldots1234$. С числом на доске проделывали указанную операцию до тех пор, пока это не стало невозможно. Какое наибольшее число могло оказаться на доске в результате?

Ответ:

$64\ldots64$ — 100-значное число.

Решение:

Сумма цифр исходного числа $(1+2+3+4)\cdot 50 = 500$. Сумма цифр конечного числа такая же.

Разобъём цифры конечного числа на пары: первую со второй, третью с четвёртой, и т.д. Последняя цифра может остаться без пары. В каждой паре сумма цифр не меньше десяти, откуда в числе не может быть больше 100 цифр. Поскольку 100-значные числа превосходят все числа с меньшим количеством знаков, ответ в первую очередь стоит искать среди них.

Если в числе ровно 100 цифр, и сумма цифр в какой-то паре больше 10, то общая сумма цифр больше 500. Значит, в каждом 100-значном числе, которое может у нас получиться, сумма цифр в каждой паре ровно 10.

Обратите внимание: утверждение о том, что в каждом таком числе сумма соседних цифр равна 10 вообще говоря, неверно: может получиться, например, число $376464\ldots64$, в котором это условие нарушается.

В каждой паре нам необходимо максимизировать первую цифру и минимизировать вторую. Поскольку каждая пара цифр получается указанными в условии операциями из 1234, вторая цифра не меньше 4 и наибольший вариант для каждой пары это 64, откуда мы получаем ответ.

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

11 класс

2 вариант

1. (2 балла) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 12$ и $BC = 8$ окружности, построенные на сторонах AB, BC и CD как на диаметрах, пересекаются в одной точке. Длина диагонали AC равна 12. Найдите длину BD.

Ответ: Ответ: 16

Решение:

Обозначим точку пересечения трех окружностей за O. Тогда так как окружности построены на сторонах трапеции AB, BC и CD как на диаметрах, то углы $\angle AOB$, $\angle BOC$ и $\angle COD$ — прямые, следовательно, точки A, O, C лежат на одной прямой и точки B, O, D лежат на одной прямой, то есть O — точка пересечения диагоналей трапеции.

Обозначим середины сторон AB, BC и CD за K, L и M соответственно. Так как KL и LM — средние линии в треугольниках ABC и BCD, $KL \parallel AC$ и $LM \parallel BD$. Значит, $KL \perp LM$, то есть треугольник KLM — прямоугольный. Кроме того, $KL = \dfrac{AC}{2} = 6$, а $KM = \dfrac{AD+BC}{2} = 10$, значит, по теореме Пифагора, $LM = 8$. Отсюда $BD = 2LM = 16$.

Вместо рассуждений со средними линиями можно рассмотреть треугольники BOC и AOD, которые подобны с коэффициентом $8 : 12 = 2 : 3$. Так как $AC = 12$, то $OC = \dfrac{2}{5}AC = \dfrac{24}{5}$. По теореме Пифагора в треугольнике BOC находим $OB = \sqrt{8^2 - \dfrac{24^2}{5^2}} = \dfrac{32}{5}$. Отсюда $BD = \dfrac{5}{2}OB = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{32}{5} = 16$.

2. (3 балла) В ортоцентрическом тетраэдре отметили основания и середины всех четырёх его медиан. Каждое основание медианы тетраэдра соединили с серединами трёх остальных. Докажите, что в получившемся многограннике все рёбра имеют равную длину.

Решение: Обозначим радиус-векторы вершин тетраэдра за $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Тогда основания медиан задаются формулой $\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$ и аналогичными ей, а середины медиан формулой $\dfrac{\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}+\vec{d}}{2} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+3\vec{d}}{6}$ и аналогичными ей.

Вычитая один радиус-вектор из другого, получаем векторы рёбер получившегося многогранника $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}{6}$ и аналогичные ему. При этом каждый такой вектор мы получаем два раза, т.е. всего 6 различных векторов. Кроме того, вместо с вектором $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}{6}$ мы также получаем и противоположный ему вектор $\dfrac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}}{6}$, который имеет ту же длину. Умножив длины всех векторов на 6, понимаем, что нам достаточно доказать равенства $|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}| = |\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}| = |\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}|$.

Также введём обозначения $\vec{a}-\vec{c} = \vec{x}$ и $\vec{b}-\vec{d} = \vec{y}$. Эти векторы соответствуют двум противоположным рёбрам тетраэдра. Поскольку тетраэдр ортоцентрический, эти рёбра перпендикулярны, то есть $\vec{x}\vec{y} = 0$. Отсюда получаем $\vec{x}^2 - 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}^2 = \vec{x}^2 + 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}^2$, что означает, что $|\vec{x}-\vec{y}| = |\vec{x}+\vec{y}|$. Вспоминая, что такое $\vec{x}$ и $\vec{y}$, получаем $|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}| = |\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}|$. Аналогично можно получить, что эти модули равны также и $|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}|$, что и требовалось доказать.

3. (3 балла) Найдите расстояние между кривыми $y = e^{3x+7}$ и $y = (\ln x - 7)/3$.

Решение: Расстояние между графиками функций равно расстоянию между их ближайшими точками. Заметим, что функции, между графиками которых требуется найти расстояние, являются обратными друг к другу, а их графики симметричны относительно прямой $y = x$ и, кроме того, находятся по разные стороны от неё.

Если мы найдём на графике функции $y = e^{3x+7}$ точку A, ближайшую к прямой $y = x$, то точка A', симметричная ей, очевидно, будет ближайшей к этой прямой на графике функции

$y = (\ln x - 7)/3$. Если провести через эти точки прямые, параллельные прямой $y = x$, графики обеих функций окажутся вне полосы, ограниченной этими прямыми, значит, расстояние между любыми двумя точками на этих графиках не меньше расстояния между этими прямыми. С другой стороны, расстояние между этими прямыми равно расстоянию между точками A и A', значит, AA' и есть искомое расстояние.

Пусть координаты точки A это $(x; e^{3x+7})$, тогда A' имеет координаты $(e^{3x+7}; x)$ и расстояние между ними

$$\rho(x) = \sqrt{(x - e^{3x+7})^2 + (e^{3x+7} - x)^2} = \sqrt{2(e^{3x+7} - x)^2} = \sqrt{2}|e^{3x+7} - x|$$

Рассмотрим функцию $f(x) = e^{3x+7} - x$ и найдем ее минимум с помощью производной: $f'(x) = 3e^{3x+7} - 1$. Приравнивая эту производную к нулю в точке x_0, мы получаем $x_0 = \dfrac{-\ln 3 - 7}{3}$.

Тогда при $x < x_0$ функция $f(x)$ убывает, а при $x > x_0$ — возрастает, следовательно в точке x_0 функция $f(x)$ достигает минимума.

$f(x_0) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\ln 3 + 7}{3} > 0$, следовательно $f(x) > 0$ при $x \in R$.

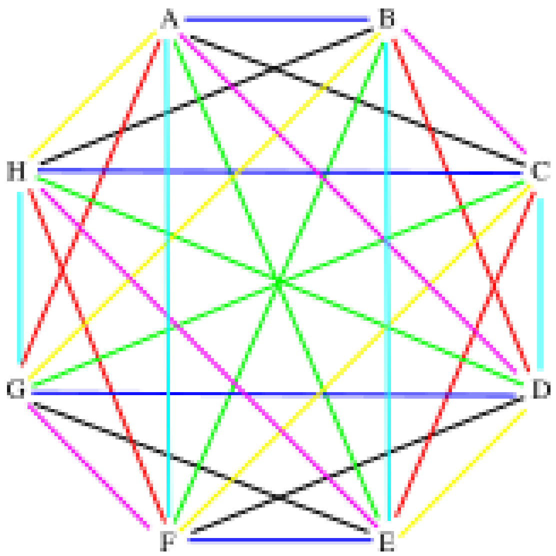
Таким образом, $\rho(x) = \sqrt{2}(e^{3x+7} - x)$.

Заметим, что $\rho(x)$ отличается от $f(x)$ домножением на $\sqrt{2}$, следовательно, минимум функции достигается в той же точке, что и минимум функции $f(x)$. Таким образом, минимальное расстояние равно: $\sqrt{2}\left(\dfrac{8 + \ln 3}{3}\right)$.

4. (3 балла) В некоторой стране 200 городов и 8 авиакомпаний. Каждые два города соединены рейсами одной из восьми авиакомпаний. Можно ли утверждать, что найдётся авиакомпания и больше 50 городов, между любыми двумя из которых можно добраться рейсами этой авиакомпании (возможно, с пересадками)?

Ответ: Нет, это не обязательно верно.

Решение: Построим контрпример. Разобъём города на 8 групп по 25 городов. Назовём эти группы A, B, C, D, E, F, G и H



Внутри каждой группы соединим города рейсами компании номер 1.

Компания номер 2 будет соединять города группы A с городами группы B, C с H, D с G, а E с F.

Компания номер 3 будет соединять города группы A с городами группы D, B с C, E с H, а F с G.

Компания номер 4 будет соединять города группы A с городами группы F, G с H, B с E, а C с D.

Компания номер 5 будет соединять города группы A с городами группы H, B с G, C с F, а E с D.

Компания номер 6 будет соединять города группы A с городами группы E, B с F, C с G, а D с H.

Компания номер 7 будет соединять города группы A с городами группы C, B с H, D с F, а E с G.

Компания номер 8 будет соединять города группы A с городами группы G, F с H, D с B, а E с C.

Таким образом, рейсы компании номер 1 связывают по 25 городов, а рейсы остальных компаний ровно по 50.

Это построение схематично изображено на рисунке. Разные компании обозначены разными цветами.

Данный контрпример, разумеется, не единственный.

5. (3 балла) Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $5f(x+y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 10$.

Ответ: $f(x) = 5 \cdot 2^x$.

Решение:

Вначале докажем, что $f(x) \geqslant 0$. Действительно, $5f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0$.

Подставив в условие задачи $x = y = 0$, получаем $5f(0) = f(0) \cdot f(0)$ откуда $f(0) = 0$ или $f(0) = 5$. Если $f(0) = 0$, то $5f(x+0) = f(x)f(0)$, откуда $f(x) = 0$ для любого x, что неверно. Следовательно, $f(0) = 5$.

Подставляя $y = 1$, получаем $5f(x+1) = f(x) \cdot f(1)$, то есть $f(x+1) = 2f(x)$. Отсюда для любого натурального n находим $f(n) = f(0)2^n = 5 \cdot 2^n$.

Также легко по индукции доказать формулу $f(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{5^{n-1}} f(x_1)f(x_2) \dots f(x_n)$, откуда, в частности, $f(1) = f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{5^{n-1}}(f(\frac{1}{n}))^n$. Значит, $f\left(\frac{1}{n}\right)^n = 2 \cdot 5^n$, откуда $f\left(\frac{1}{n}\right) = 5 \cdot 2^{\frac{1}{n}}$ для всех натуральных n.

Отсюда $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{5^{m-1}}(f(\frac{1}{n}))^m = \frac{1}{5^{m-1}} 5^m \cdot 2^{\frac{m}{n}} = 5 \cdot 2^{\frac{m}{n}}$ для натуральных m и n.

Теперь разберёмся с отрицательными дробями: $5f(0) = 5f\left(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) f\left(-\frac{m}{n}\right)$, откуда $f\left(-\frac{m}{n}\right) = 5 \cdot 2^{-\frac{m}{n}}$.

Таким образом, функция $f(x) = 5 \cdot 2^x$ для всех рациональных чисел. Функция в правой части равенства также непрерывна, а если две функции совпадают для всех рациональных чисел, то они совпадают на всей вещественной оси.

6. (3 балла) Пусть x, y, z и t — неотрицательные числа, такие что $x+y+z+t = 4$. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^2+t^2} + \sqrt{z^2+1} + \sqrt{z^2+t^2} + \sqrt{y^2+x^2} + \sqrt{y^2+64} \geqslant 13.$$

Решение:

Рассмотрим на плоскости следующие точки: $A(0,0)$; $B(x,t)$; $C(x+z, t+1)$; $D(x+z+t, t+1+z)$; $E(x+z+t+y, t+1+z+x)$; $F(x+z+t+y+8, t+1+z+x+y)$. Тогда длина ломаной $ABCDEF$ совпадает с выражением, которое требуется оценить. По неравенству треугольника длина ломаной $ABCDEF$ не меньше длины отрезка AF. С учетом того, что $x+y+z+t = 4$, координаты точки F это $(12, 5)$ а длина отрезка $AF = 13$.

7. (4 балла) Решите уравнение:

$$\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin 2013x = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos 2013x.$$

Ответ:

1) $x = \dfrac{\pi k}{1007}$, $k \in \mathbb{Z}$, k не делится на 1007.

2) $x = \dfrac{\pi + 4\pi k}{4028}, k \in \mathbb{Z}$.

Решение:

Докажем сначала следующие формулы по индукции в случае, если $\sin x \neq 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x} = \frac{\sin(nx)\cos(nx)}{\sin x}$$

Первая формула. База $n=1$: $\sin x = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x}$ — верное утверждение.

Переход: предположим, что утверждение верно для некоторого n, докажем, что оно верно и для $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sin((2k-1)x) = \sum_{k=1}^{n}\sin((2k-1)x) + \sin\left((2n+1)x\right) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} + \sin\left((2n+1)x\right) =$$

$$= \frac{\sin^2(nx) + \sin\left(2nx+x\right)\sin x}{\sin x} = \frac{\sin^2(nx) + \sin(2nx)\cos x \sin x + \cos(2nx)\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2(nx) + 2\sin(nx)\cos(nx)\cos x\sin x + (\cos^2(nx) - \sin^2(nx))\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2(nx)\cos^2 x + 2\sin(nx)\cos(nx)\cos x\sin x + \cos^2(nx)\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{(\sin(nx)\cos(x) + \cos nx\sin x)^2}{\sin x} = \frac{\sin^2((n+1)x)}{\sin x}.$$

Вторая формула. База $n=1$: $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$ — верное утверждение.

Переход: предположим, что утверждение верно для некоторого n, докажем, что оно верно и для $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1}\cos((2k-1)x) = \sum_{k=1}^{n}\cos((2k-1)x) + \cos\left((2n+1)x\right) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x} + \cos\left((2n+1)x\right) =$$

$$= \frac{\sin(2nx) + 2\cos\left(2nx+x\right)\sin x}{2\sin x} = \frac{\sin(2nx) + 2\cos(2nx)\cos x\sin x - 2\sin(2nx)\sin^2 x}{2\sin x} =$$

$$= \frac{\sin(2nx)(1-2\sin^2 x) + \cos(2nx)\sin 2x}{2\sin x} = \frac{\sin(2nx)\cos(2x) + \cos(2nx)\sin 2x}{2\sin x} = \frac{\sin(2(n+1)x)}{2\sin x}.$$

Разберём сначала случай $\sin x = 0$. В этом случае левая часть уравнения превращается в 0, а правая это 1007 или -1007, то есть числа $x=\pi k$ при целых k не являются решениями задачи.

Воспользовавшись доказанными выше формулами, превратим исходное уравнение в $\dfrac{\sin^2 1007x}{\sin x} = \dfrac{\sin 1007x\cos 1007x}{\sin x}$, откуда $\sin 1007x = 0$ или $\sin 1007x = \cos 1007x$.

В первом случае получаем $1007x = \pi k, k\in\mathbb{Z}$, откуда $x = \dfrac{\pi k}{1007}, k\in\mathbb{Z}$. При этом, так как $\sin x \neq 0$, число k не делится на 1007.

Во втором случае получаем $1007x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, k\in\mathbb{Z}$, откуда $x = \dfrac{\pi+4\pi k}{4028}, k\in\mathbb{Z}$. Для таких чисел $\sin x\neq 0$, поэтому из этого множества решений никакие числа исключать не приходится.

8. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается делать следующую операцию: стирать две соседние цифры, сумма которых не превосходит 9, и записывать эту сумму на их место. Изначально было написано 300-значное число $12251225\ldots1225$. С числом на доске проделывали указанную операцию до тех пор, пока это не стало невозможно. Какое наибольшее число могло оказаться на доске в результате?

Ответ:

$55\ldots55$ — 150-значное число.

Решение:

Сумма цифр исходного числа $(1+2+2+5)\cdot 75 = 750$. Сумма цифр конечного числа такая же.

Разобъём цифры конечного числа на пары: первую со второй, третью с четвёртой, и т.д. Последняя цифра может остаться без пары. В каждой паре сумма цифр не меньше десяти, откуда в числе не может быть больше 150 цифр. Поскольку 150-значные числа превосходят все числа с меньшим количеством знаков, ответ в первую очередь стоит искать среди них.

Если в числе ровно 150 цифр, и сумма цифр в какой-то паре больше 10, то общая сумма цифр больше 750. Значит, в каждом 150-значном числе, которое может у нас получиться, сумма цифр в каждой паре ровно 10.

Обратите внимание: утверждение о том, что в каждом таком числе сумма соседних цифр равна 10 вообще говоря, неверно: может получиться, например, число $375555\ldots55$, в котором это условие нарушается.

В каждой паре нам необходимо максимизировать первую цифру и минимизировать вторую. Поскольку каждая пара цифр получается указанными в условии операциями из 1225, вторая цифра не меньше 5 и наибольший вариант для каждой пары это 55, откуда мы получаем ответ.

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

11 класс

3 вариант

1. (2 балла) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 20$ и $BC = 14$ окружности, построенные на сторонах AB, BC и CD как на диаметрах, пересекаются в одной точке. Длина диагонали AC равна 16. Найдите длину BD.

Ответ: Ответ: 30

Решение:

Обозначим точку пересечения трех окружностей за O. Тогда так как окружности построены на сторонах трапеции AB, BC и CD как на диаметрах, то углы $\angle AOB$, $\angle BOC$ и $\angle COD$ — прямые, следовательно, точки A, O, C лежат на одной прямой и точки B, O, D лежат на одной прямой, то есть O — точка пересечения диагоналей трапеции.

Обозначим середины сторон AB, BC и CD за K, L и M соответственно. Так как KL и LM — средние линии в треугольниках ABC и BCD, $KL \parallel AC$ и $LM \parallel BD$. Значит, $KL \perp LM$, то есть треугольник KLM — прямоугольный. Кроме того, $KL = \dfrac{AC}{2} = 8$, а $KM = \dfrac{AD+BC}{2} = 17$, значит, по теореме Пифагора, $LM = 15$. Отсюда $BD = 2LM = 30$.

Вместо рассуждений со средними линиями можно рассмотреть треугольники BOC и AOD, которые подобны с коэффициентом $14 : 20 = 7 : 10$. Так как $AC = 16$, то $OC = \dfrac{7}{17}AC = \dfrac{112}{17}$. По теореме Пифагора в треугольнике BOC находим $OB = \sqrt{14^2 - \dfrac{112^2}{17^2}} = \dfrac{210}{17}$. Отсюда $BD = \dfrac{17}{7}OB = \dfrac{17}{7} \cdot \dfrac{210}{17} = 30$.

2. (3 балла) В некотором тетраэдре отметили основания и середины всех четырёх его медиан. Каждое основание медианы тетраэдра соединили с серединами трёх остальных. Получившийся многогранник оказался прямоугольным параллелепипедом. Докажите, что исходный тетраэд — равногранный.

Обозначим радиус-векторы вершин тетраэдра за $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Тогда основания медиан задаются формулой $\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$ и аналогичными ей, а середины медиан формулой $\dfrac{\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}+\vec{d}}{2} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+3\vec{d}}{6}$ и аналогичными ей.

Вычитая один радиус-вектор из другого, получаем векторы рёбер получившегося многогранника $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}{6}$ и аналогичные ему. При этом каждый такой вектор мы получаем два раза, т.е. всего 6 различных векторов. Кроме того, вместо с вектором $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}{6}$ мы также получаем и противоположный ему вектор $\dfrac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}}{6}$, который ему коллинеарен. Таким образом, кстати, мы доказали, что наш многогранник параллелепипед в любом тетраэдре.

Умножив длины всех векторов на 6, мы получаем, что условие задачи эквивалентно взаимной перпендикулярности трёх векторов: $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}$, $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}$ и $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}$. Рассмотрим первые два вектора. Введём дополнительные обозначения $\vec{a}-\vec{c} = \vec{x}$ и $\vec{b}-\vec{d} = \vec{y}$. Тогда мы знаем, что $\vec{x}-\vec{y} \perp \vec{x}+\vec{y}$, то есть, что скалярное произведение этих векторов равно 0. Их скалярное произведение это $\vec{x}^2-\vec{y}^2$, а равенство его нулю равносильно равенству $\vec{x}^2$ и $\vec{y}^2$, то есть равенству длин $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Это значит, что два противоположных ребра тетраэдра равны. Аналогично мы получаем равенство остальных пар противоположных ребёр, следовательно, тетраэдр действительно равногранный.

3. (3 балла) Найдите расстояние между кривыми $y = e^{5x+7}$ и $y = (\ln x - 7)/5$.

Решение: Расстояние между графиками функций равно расстоянию между их ближайшими точками. Заметим, что функции, между графиками которых требуется найти расстояние, являются обратными друг к другу, а их графики симметричны относительно прямой $y = x$ и, кроме того, находятся по разные стороны от неё.

Если мы найдём на графике функции $y = e^{5x+7}$ точку A, ближайшую к прямой $y = x$, то точка A', симметричная ей, очевидно, будет ближайшей к этой прямой на графике функции $y = (\ln x - 7)/5$. Если провести через эти точки прямые, параллельные прямой $y = x$, графики обеих функций окажутся вне полосы, ограниченной этими прямыми, значит, расстояние между любыми двумя точками на этих графиках не меньше расстояния между этими прямыми. С другой стороны, расстояние между этими прямыми равно расстоянию между точками A и A', значит, AA' и есть искомое расстояние.

Пусть координаты точки A это $(x; e^{5x+7})$, тогда A' имеет координаты $(e^{5x+7}; x)$ и расстояние между ними

$$\rho(x) = \sqrt{(x - e^{5x+7})^2 + (e^{5x+7} - x)^2} = \sqrt{2(e^{5x+7} - x)^2} = \sqrt{2}|e^{5x+7} - x|$$

Рассмотрим функцию $f(x) = e^{5x+7} - x$ и найдем ее минимум с помощью производной: $f'(x) = 5e^{5x+7} - 1$. Приравнивая эту производную к нулю в точке x_0, мы получаем $x_0 = \dfrac{-\ln 5 - 7}{5}$.

Тогда при $x < x_0$ функция $f(x)$ убывает, а при $x > x_0$ — возрастает, следовательно в точке x_0 функция $f(x)$ достигает минимума.

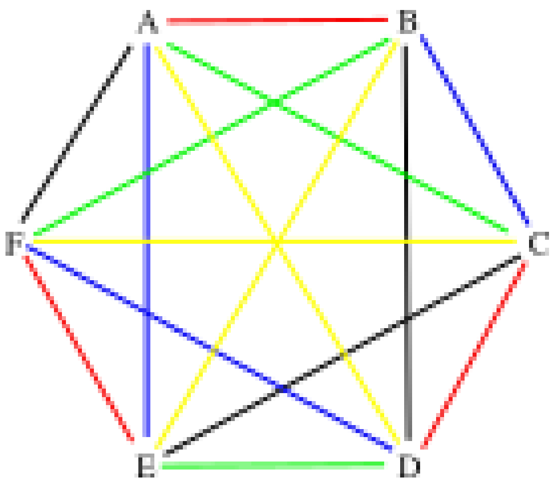
$f(x_0) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{\ln 5 + 7}{5} > 0$, следовательно $f(x) > 0$ при $x \in R$.

Таким образом, $\rho(x) = \sqrt{2}(e^{5x+7} - x)$.

Заметим, что $\rho(x)$ отличается от $f(x)$ домножением на $\sqrt{2}$, следовательно, минимум функции достигается в той же точке, что и минимум функции $f(x)$. Таким образом, минимальное расстояние равно: $\sqrt{2}\left(\dfrac{8 + \ln 5}{5}\right)$.

4. (3 балла) В некоторой стране 600 городов и 6 авиакомпаний. Каждые два города соединены рейсами одной из шести авиакомпаний. Можно ли утверждать, что найдётся авиакомпания и больше 200 городов, между любыми двумя из которых можно добраться рейсами этой авиакомпании (возможно, с пересадками)?

Решение: Построим контрпример. Разобьём города на 6 групп по 100 городов. Назовём эти группы A, B, C, D, E, F.



Внутри каждой группы соединим города рейсами компании номер 1.

Компания номер 2 будет соединять города группы A с городами группы B, C с D, а E с F.

Компания номер 3 будет соединять города группы A с городами группы D, B с E, а C с F.

Компания номер 4 будет соединять города группы A с городами группы C, B с F, а D с E.

Компания номер 5 будет соединять города группы A с городами группы E, B с C, а D с F.

Компания номер 6 будет соединять города группы A с городами группы F, B с D, а C с E.

Таким образом, рейсы компании номер 1 связывают по 100 городов, а рейсы остальных компаний ровно по 200.

Это построение схематично изображено на рисунке. Разные компании обозначены разными цветами.

Данный контрпример, разумеется, не единственный.

5. (3 балла) Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $3f(x + y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 12$.

Ответ: $f(x) = 3 \cdot 4^x$.

Решение:

Вначале докажем, что $f(x) \geqslant 0$. Действительно, $3f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0$.

Подставив в условие задачи $x = y = 0$, получаем $3f(0) = f(0) \cdot f(0)$ откуда $f(0) = 0$ или $f(0) = 3$. Если $f(0) = 0$, то $3f(x+0) = f(x)f(0)$, откуда $f(x) = 0$ для любого x, что неверно. Следовательно, $f(0) = 3$.

Подставляя $y = 1$, получаем $3f(x+1) = f(x) \cdot f(1)$, то есть $f(x+1) = 4f(x)$. Отсюда для любого натурального n находим $f(n) = f(0)4^n = 3 \cdot 4^n$.

Также легко по индукции доказать формулу $f(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{3^{n-1}} f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)$, откуда, в частности, $f(1) = f\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3^{n-1}}(f(\frac{1}{n}))^n$. Значит, $f\left(\frac{1}{n}\right)^n = 4 \cdot 3^n$, откуда $f\left(\frac{1}{n}\right) = 3 \cdot 4^{\frac{1}{n}}$ для всех натуральных n.

Отсюда $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3^{m-1}}(f(\frac{1}{n}))^m = \frac{1}{3^{m-1}} 3^m \cdot 4^{\frac{m}{n}} = 3 \cdot 4^{\frac{m}{n}}$ для натуральных m и n.

Теперь разберёмся с отрицательными дробями: $3f(0) = 3f\left(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) f\left(-\frac{m}{n}\right)$, откуда $f\left(-\frac{m}{n}\right) = 3 \cdot 4^{-\frac{m}{n}}$.

Таким образом, функция $f(x) = 3 \cdot 4^x$ для всех рациональных чисел. Функция в правой части равенства также непрерывна, а если две функции совпадают для всех рациональных чисел, то они совпадают на всей вещественной оси.

6. (3 балла) Пусть x, y, z и t — неотрицательные числа, такие что $x+y+z+t = 7$. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{z^2+y^2} + \sqrt{t^2+64} + \sqrt{z^2+t^2} \geqslant 17.$$

Решение:

Рассмотрим на плоскости следующие точки: $A(0,0)$; $B(x,y)$; $C(x+1, y+x)$; $D(x+1+y, y+x+z)$; $E(x+1+y+t, y+x+z+8)$; $F(x+1+y+t+z, y+x+z+8+t)$. Тогда длина ломаной $ABCDEF$ совпадает с выражением, которое требуется оценить. По неравенству треугольника длина ломаной $ABCDEF$ не меньше длины отрезка AF. С учетом того, что $x+y+z+t = 7$, координаты точки F это $(8, 15)$ а длина отрезка $AF = 17$.

7. (4 балла) Решите уравнение:

$$\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin 2019x = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos 2019x.$$

Ответ:

1) $x = \dfrac{\pi k}{1010}$, $k \in \mathbb{Z}$, k не делится на 1010.

2) $x = \dfrac{\pi + 4\pi k}{4040}, k \in \mathbb{Z}$.

Решение:

Докажем сначала следующие формулы по индукции в случае, если $\sin x \neq 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x} = \frac{\sin(nx)\cos(nx)}{\sin x}$$

Первая формула. База $n = 1$: $\sin x = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x}$ — верное утверждение.

Переход: предположим, что утверждение верно для некоторого n, докажем, что оно верно и для $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin((2k-1)x) = \sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)x) + \sin((2n+1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} + \sin((2n+1)x) =$$

$$= \frac{\sin^2(nx) + \sin(2nx + x)\sin x}{\sin x} = \frac{\sin^2(nx) + \sin(2nx)\cos x \sin x + \cos(2nx)\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2(nx) + 2\sin(nx)\cos(nx)\cos x\sin x + (\cos^2(nx) - \sin^2(nx))\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2(nx)\cos^2 x + 2\sin(nx)\cos(nx)\cos x\sin x + \cos^2(nx)\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{(\sin(nx)\cos(x) + \cos nx\sin x)^2}{\sin x} = \frac{\sin^2((n+1)x)}{\sin x}.$$

Вторая формула. База $n = 1$: $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$ — верное утверждение.

Переход: предположим, что утверждение верно для некоторого n, докажем, что оно верно и для $n + 1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \cos((2k-1)x) = \sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x) + \cos((2n+1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x} + \cos((2n+1)x) =$$

$$= \frac{\sin(2nx) + 2\cos(2nx + x)\sin x}{2\sin x} = \frac{\sin(2nx) + 2\cos(2nx)\cos x\sin x - 2\sin(2nx)\sin^2 x}{2\sin x} =$$

$$= \frac{\sin(2nx)(1 - 2\sin^2 x) + \cos(2nx)\sin 2x}{2\sin x} = \frac{\sin(2nx)\cos(2x) + \cos(2nx)\sin 2x}{2\sin x} = \frac{\sin(2(n+1)x)}{2\sin x}.$$

Разберём сначала случай $\sin x = 0$. В этом случае левая часть уравнения превращается в 0, а правая это 1010 или -1010, то есть числа $x = \pi k$ при целых k не являются решениями задачи.

Воспользовавшись доказанными выше формулами, превратим исходное уравнение в $\dfrac{\sin^2 1010x}{\sin x} = \dfrac{\sin 1010x\cos 1010x}{\sin x}$, откуда $\sin 1010x = 0$ или $\sin 1010x = \cos 1010x$.

В первом случае получаем $1010x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, откуда $x = \dfrac{\pi k}{1010}, k \in \mathbb{Z}$. При этом, так как $\sin x \neq 0$, число k не делится на 1010.

Во втором случае получаем $1010x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, откуда $x = \dfrac{\pi + 4\pi k}{4040}, k \in \mathbb{Z}$. Для таких чисел $\sin x \neq 0$, поэтому из этого множества решений никакие числа исключать не приходится.

8. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается делать следующую операцию: стирать две соседние цифры, сумма которых не превосходит 9, и записывать эту сумму на их место. Изначально было написано 200-значное число $3112331123\ldots31123$. С числом на доске проделывали указанную операцию до тех пор, пока это не стало невозможно. Какое наибольшее число могло оказаться на доске в результате?

Ответ:

$73\ldots73$ — 80-значное число.

Решение:

Сумма цифр исходного числа $(3 + 1 + 1 + 2 + 3) \cdot 40 = 400$. Сумма цифр конечного числа такая же.

Разобъём цифры конечного числа на пары: первую со второй, третью с четвёртой, и т.д. Последняя цифра может остаться без пары. В каждой паре сумма цифр не меньше десяти, откуда в числе не может быть больше 80 цифр. Поскольку 80-значные числа превосходят все числа с меньшим количеством знаков, ответ в первую очередь стоит искать среди них.

Если в числе ровно 80 цифр, и сумма цифр в какой-то паре больше 10, то общая сумма цифр больше 400. Значит, в каждом 80-значном числе, которое может у нас получиться, сумма цифр в каждой паре ровно 10.

Обратите внимание: утверждение о том, что в каждом таком числе сумма соседних цифр равна 10 вообще говоря, неверно: может получиться, например, число $377373\ldots73$, в котором это условие нарушается.

В каждой паре нам необходимо максимизировать первую цифру и минимизировать вторую. Поскольку каждая пара цифр получается указанными в условии операциями из 31123, вторая цифра не меньше 3 и наибольший вариант для каждой пары это 73, откуда мы получаем ответ.

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

11 класс

4 вариант

1. (2 балла) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 20$ и $BC = 10$ окружности, построенные на сторонах AB, BC и CD как на диаметрах, пересекаются в одной точке. Длина диагонали AC равна 18. Найдите длину BD.

Ответ: Ответ: 24

Решение:

Обозначим точку пересечения трех окружностей за O. Тогда так как окружности построены на сторонах трапеции AB, BC и CD как на диаметрах, то углы $\angle AOB$, $\angle BOC$ и $\angle COD$ — прямые, следовательно, точки A, O, C лежат на одной прямой и точки B, O, D лежат на одной прямой, то есть O — точка пересечения диагоналей трапеции.

Обозначим середины сторон AB, BC и CD за K, L и M соответственно. Так как KL и LM — средние линии в треугольниках ABC и BCD, $KL \parallel AC$ и $LM \parallel BD$. Значит, $KL \perp LM$, то есть треугольник KLM — прямоугольный. Кроме того, $KL = \dfrac{AC}{2} = 9$, а $KM = \dfrac{AD+BC}{2} = 15$, значит, по теореме Пифагора, $LM = 12$. Отсюда $BD = 2LM = 24$.

Вместо рассуждений со средними линиями можно рассмотреть треугольники BOC и AOD, которые подобны с коэффициентом $10 : 20 = 1 : 2$. Так как $AC = 18$, то $OC = \dfrac{1}{3}AC = 6$. По теореме Пифагора в треугольнике BOC находим $OB = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Отсюда $BD = \dfrac{3}{1}OB = 3 \cdot 8 = 24$.

2. (3 балла) В некотором тетраэдре отметили основания и середины всех четырёх его медиан. Каждое основание медианы тетраэдра соединили с серединами трёх остальных. В получившемся многограннике все 12 рёбер оказались равной длины. Докажите, что исходный тетраэдр ортоцентрический.

Решение: Обозначим радиус-векторы вершин тетраэдра за $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Тогда основания медиан задаются формулой $\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$ и аналогичными ей, а середины медиан формулой $\dfrac{\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}+\vec{d}}{2} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+3\vec{d}}{6}$ и аналогичными ей.

Вычитая один радиус-вектор из другого, получаем векторы рёбер получившегося многогранника $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}{6}$ и аналогичные ему. При этом каждый такой вектор мы получаем два раза, т.е. всего 6 различных векторов. Кроме того, вместо с вектором $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}{6}$ мы также получаем и противоположный ему вектор $\dfrac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}}{6}$, который имеет ту же длину.

Домножим все эти векторы на 6. Условие задачи сводиться к следующим равенствам: $|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}| = |\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}| = |\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}|$. Введём обозначения $\vec{a}-\vec{c} = \vec{x}$ и $\vec{b}-\vec{d} = \vec{y}$. Тогда равенство первого и второго модулей превратится в $|\vec{x}-\vec{y}| = |\vec{x}+\vec{y}|$. Запишем это равенство в виде скалярных квадратов этих векторов: $\vec{x}^2 - 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}^2 = \vec{x}^2 + 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}^2$, откуда $4\vec{x}\vec{y} = 0$, то есть векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ перпендикулярны, а это векторы, соответствующие двум противоположным рёбрам тетраэдра. Из равенств остальных пар модулей получаем перепендикулярность остальных пар рёбер, а это один из признаков ортоцентрического тетраэдра.

3. (3 балла) Найдите расстояние между кривыми $y = e^{3x+11}$ и $y = (\ln x - 11)/3$.

Решение: Расстояние между графиками функций равно расстоянию между их ближайшими точками. Заметим, что функции, между графиками которых требуется найти расстояние, являются обратными друг к другу, а их графики симметричны относительно прямой $y = x$ и, кроме того, находятся по разные стороны от неё.

Если мы найдём на графике функции $y = e^{3x+11}$ точку A, ближайшую к прямой $y = x$, то точка A', симметричная ей, очевидно, будет ближайшей к этой прямой на графике функции $y = (\ln x - 11)/3$. Если провести через эти точки прямые, параллельные прямой $y = x$, графики обеих функций окажутся вне полосы, ограниченной этими прямыми, значит, расстояние между любыми двумя точками на этих графиках не меньше расстояния между этими прямыми. С другой стороны, расстояние между этими прямыми равно расстоянию между точками A и A', значит, AA' и есть искомое расстояние.

Пусть координаты точки A это $(x; e^{3x+11})$, тогда A' имеет координаты $(e^{3x+11}; x)$ и расстояние между ними

$$\rho(x) = \sqrt{(x - e^{3x+11})^2 + (e^{3x+11} - x)^2} = \sqrt{2(e^{3x+11} - x)^2} = \sqrt{2}|e^{3x+11} - x|$$

Рассмотрим функцию $f(x) = e^{3x+11} - x$ и найдем ее минимум с помощью производной: $f'(x) = 3e^{3x+11} - 1$. Приравнивая эту производную к нулю в точке x_0, мы получаем $x_0 = \dfrac{-\ln 3 - 11}{3}$.

Тогда при $x < x_0$ функция $f(x)$ убывает, а при $x > x_0$ — возрастает, следовательно в точке x_0 функция $f(x)$ достигает минимума.

$f(x_0) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\ln 3 + 11}{3} > 0$, следовательно $f(x) > 0$ при $x \in R$.

Таким образом, $\rho(x) = \sqrt{2}(e^{3x+11} - x)$.

Заметим, что $\rho(x)$ отличается от $f(x)$ домножением на $\sqrt{2}$, следовательно, минимум функции достигается в той же точке, что и минимум функции $f(x)$. Таким образом, минимальное расстояние равно: $\sqrt{2}\left(4 + \dfrac{\ln 3}{3}\right)$.

4. (3 балла) В некоторой стране 800 городов и 8 авиакомпаний. Каждые два города соединены рейсами одной из восьми авиакомпаний. Можно ли утверждать, что найдётся авиакомпания и больше 200 городов, между любыми двумя из которых можно добраться рейсами этой авиакомпании (возможно, с пересадками)?

Ответ: Нет, это не обязательно верно.

Решение: Построим контрпример. Разобъём города на 8 групп по 100 городов. Назовём эти группы A, B, C, D, E, F, G и H

Внутри каждой группы соединим города рейсами компании номер 1.

Компания номер 2 будет соединять города группы A с городами группы B, C с H, D с G, а E с F.

Компания номер 3 будет соединять города группы A с городами группы D, B с C, E с H, а F с G.

Компания номер 4 будет соединять города группы A с городами группы F, G с H, B с E, а C с D.

Компания номер 5 будет соединять города группы A с городами группы H, B с G, C с F, а E с D.

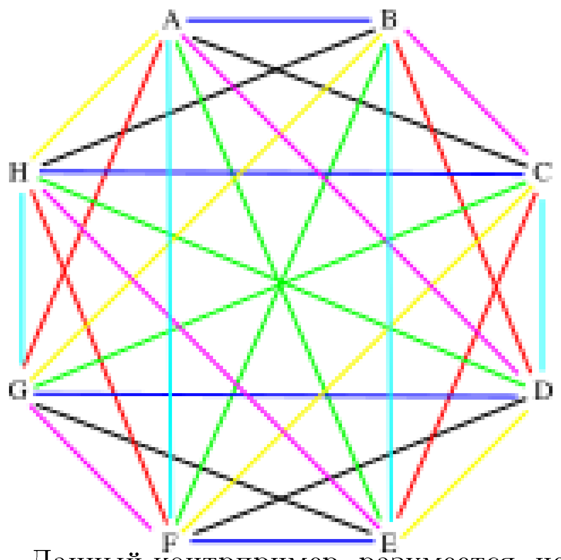
Компания номер 6 будет соединять города группы A с городами группы E, B с F, C с G, а D с H.

Компания номер 7 будет соединять города группы A с городами группы C, B с H, D с F, а E с G.

Компания номер 8 будет соединять города группы A с городами группы G, F с H, D с B, а E с C.

Таким образом, рейсы компании номер 1 связывают по 100 городов, а рейсы остальных компаний ровно по 200.

Это построение схематично изображено на рисунке. Разные компании обозначены разными цветами.



Данный контрпример, разумеется, не единственный.

5. (3 балла) Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $2f(x+y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 10$.

Ответ: $f(x) = 2 \cdot 5^x$.

Решение:

Вначале докажем, что $f(x) \geqslant 0$. Действительно, $2f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0$.

Подставив в условие задачи $x = y = 0$, получаем $2f(0) = f(0) \cdot f(0)$ откуда $f(0) = 0$ или $f(0) = 2$. Если $f(0) = 0$, то $2f(x+0) = f(x)f(0)$, откуда $f(x) = 0$ для любого x, что неверно. Следовательно, $f(0) = 2$.

Подставляя $y = 1$, получаем $2f(x+1) = f(x) \cdot f(1)$, то есть $f(x+1) = 5f(x)$. Отсюда для любого натурального n находим $f(n) = f(0)5^n = 2 \cdot 5^n$.

Также легко по индукции доказать формулу $f(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{2^{n-1}} f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)$, откуда, в частности, $f(1) = f\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}(f(\frac{1}{n}))^n$. Значит, $f\left(\frac{1}{n}\right)^n = 5 \cdot 2^n$, откуда $f\left(\frac{1}{n}\right) = 2 \cdot 5^{\frac{1}{n}}$ для всех натуральных n.

Отсюда $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^{m-1}}(f(\frac{1}{n}))^m = \frac{1}{2^{m-1}} 2^m \cdot 5^{\frac{m}{n}} = 2 \cdot 5^{\frac{m}{n}}$ для натуральных m и n.

Теперь разберёмся с отрицательными дробями: $2f(0) = 2f\left(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) f\left(-\frac{m}{n}\right)$, откуда $f\left(-\frac{m}{n}\right) = 2 \cdot 5^{-\frac{m}{n}}$.

Таким образом, функция $f(x) = 2 \cdot 5^x$ для всех рациональных чисел. Функция в правой части равенства также непрерывна, а если две функции совпадают для всех рациональных чисел, то они совпадают на всей вещественной оси.

6. (3 балла) Пусть x, y, z и t — неотрицательные числа, такие что $x+y+z+t = 2$. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{z^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + t^2} + \sqrt{t^2 + 4} \geqslant 5.$$

Решение:

Рассмотрим на плоскости следующие точки: $A(0,0)$; $B(x,z)$; $C(x+1, z+x)$; $D(x+1+z, z+x+y)$; $E(x+1+z+y, z+x+y+t)$; $F(x+1+z+y+t, z+x+y+t+2)$. Тогда длина ломаной $ABCDEF$ совпадает с выражением, которое требуется оценить. По неравенству треугольника длина ломаной $ABCDEF$ не меньше длины отрезка AF. С учетом того, что $x+y+z+t = 2$, координаты точки F это $(3,4)$ а длина отрезка $AF = 5$.

7. (4 балла) Решите уравнение:

$$\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin 2015x = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos 2015x.$$

Ответ:

1) $x = \dfrac{\pi k}{1008}$, $k \in \mathbb{Z}$, k не делится на 1008.

2) $x = \dfrac{\pi + 4\pi k}{4032}, k \in \mathbb{Z}$.

Решение:

Докажем сначала следующие формулы по индукции в случае, если $\sin x \neq 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x} = \frac{\sin(nx)\cos(nx)}{\sin x}$$

Первая формула. База $n = 1$: $\sin x = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x}$ — верное утверждение.

Переход: предположим, что утверждение верно для некоторого n, докажем, что оно верно и для $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin((2k-1)x) = \sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)x) + \sin\left((2n+1)x\right) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} + \sin\left((2n+1)x\right) =$$

$$= \frac{\sin^2(nx) + \sin\left(2nx + x\right)\sin x}{\sin x} = \frac{\sin^2(nx) + \sin(2nx)\cos x \sin x + \cos(2nx)\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2(nx) + 2\sin(nx)\cos(nx)\cos x\sin x + (\cos^2(nx) - \sin^2(nx))\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2(nx)\cos^2 x + 2\sin(nx)\cos(nx)\cos x \sin x + \cos^2(nx)\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{(\sin(nx)\cos(x) + \cos nx \sin x)^2}{\sin x} = \frac{\sin^2((n+1)x)}{\sin x}.$$

Вторая формула. База $n = 1$: $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$ — верное утверждение.

Переход: предположим, что утверждение верно для некоторого n, докажем, что оно верно и для $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \cos((2k-1)x) = \sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x) + \cos\left((2n+1)x\right) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x} + \cos\left((2n+1)x\right) =$$

$$= \frac{\sin(2nx) + 2\cos\left(2nx + x\right)\sin x}{2\sin x} = \frac{\sin(2nx) + 2\cos(2nx)\cos x\sin x - 2\sin(2nx)\sin^2 x}{2\sin x} =$$

$$= \frac{\sin(2nx)(1 - 2\sin^2 x) + \cos(2nx)\sin 2x}{2\sin x} = \frac{\sin(2nx)\cos(2x) + \cos(2nx)\sin 2x}{2\sin x} = \frac{\sin(2(n+1)x)}{2\sin x}.$$

Разберём сначала случай $\sin x = 0$. В этом случае левая часть уравнения превращается в 0, а правая это 1008 или -1008, то есть числа $x = \pi k$ при целых k не являются решениями задачи.

Воспользовавшись доказанными выше формулами, превратим исходное уравнение в $\dfrac{\sin^2 1008x}{\sin x} = \dfrac{\sin 1008x \cos 1008x}{\sin x}$, откуда $\sin 1008x = 0$ или $\sin 1008x = \cos 1008x$.

В первом случае получаем $1008x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, откуда $x = \dfrac{\pi k}{1008}, k \in \mathbb{Z}$. При этом, так как $\sin x \neq 0$, число k не делится на 1008.

Во втором случае получаем $1008x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, откуда $x = \dfrac{\pi + 4\pi k}{4032}, k \in \mathbb{Z}$. Для таких чисел $\sin x \neq 0$, поэтому из этого множества решений никакие числа исключать не приходится.

8. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается делать следующую операцию: стирать две соседние цифры, сумма которых не превосходит 9, и записывать эту сумму на их место. Изначально было написано 100-значное число $21162116\ldots2116$. С числом на доске проделывали указанную операцию до тех пор, пока это не стало невозможно. Какое наибольшее число могло оказаться на доске в результате?

Ответ:

$46\ldots46$ — 50-значное число.

Решение:

Сумма цифр исходного числа $(2+1+1+6)\cdot 25 = 250$. Сумма цифр конечного числа такая же.

Разобъём цифры конечного числа на пары: первую со второй, третью с четвёртой, и т.д. Последняя цифра может остаться без пары. В каждой паре сумма цифр не меньше десяти, откуда в числе не может быть больше 50 цифр. Поскольку 50-значные числа превосходят все числа с меньшим количеством знаков, ответ в первую очередь стоит искать среди них.

Если в числе ровно 50 цифр, и сумма цифр в какой-то паре больше 10, то общая сумма цифр больше 250. Значит, в каждом 50-значном числе, которое может у нас получиться, сумма цифр в каждой паре ровно 10.

Обратите внимание: утверждение о том, что в каждом таком числе сумма соседних цифр равна 10 вообще говоря, неверно: может получиться, например, число $374646\ldots46$, в котором это условие нарушается.

В каждой паре нам необходимо максимизировать первую цифру и минимизировать вторую. Поскольку каждая пара цифр получается указанными в условии операциями из 2116, вторая цифра не меньше 6 и наибольший вариант для каждой пары это 46, откуда мы получаем ответ.

11 класс. I отборочный тур.

Задача 1. (2 балла).

1. Многочлен четвёртой степени равен квадрату своей второй производной. Известно, что коэффициент при x^3 в этом многочлене равен 2. Найдите коэффициент при x^2.

Ответ: 216

2. Многочлен четвёртой степени равен квадрату своей второй производной. Известно, что коэффициент при x^3 в этом многочлене равен 3. Найдите коэффициент при x^2.

Ответ: 486

3. Многочлен четвёртой степени равен квадрату своей второй производной. Известно, что коэффициент при x^3 в этом многочлене равен 5. Найдите коэффициент при x^2.

Ответ: 1350

<u>Примеры записи ответов:</u>
45

Задача 2. (2 балла).

1. На пол поставили кубик со стороной 1, рядом с ним кубик со стороной 2, рядом с ним кубик со стороной 3 и т.д. Оказалось, что объем получившейся лестницы равен 672400. Какое количество кубиков было поставлено?

Ответ: 40

2. На пол поставили кубик со стороной 1, рядом с ним кубик со стороной 2, рядом с ним кубик со стороной 3 и т.д. Оказалось, что объем получившейся лестницы равен 216225. Какое количество кубиков было поставлено?

Ответ: 30

3. На пол поставили кубик со стороной 1, рядом с ним кубик со стороной 2, рядом с ним кубик со стороной 3 и т.д. Оказалось, что объем получившейся лестницы равен 396900. Какое количество кубиков было поставлено?

Ответ: 35

<u>Примеры записи ответов:</u>
45

Задача 3. (2 балла)

1. ABCD — трапеция с основаниями AD = 14 и BC = 10. Оказалось, что середины всех четырёх сторон трапеции лежат на одной окружности. Найдите её радиус.
Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 6.

2. ABCD — трапеция с основаниями AD = 20 и BC = 12. Оказалось, что середины всех четырёх сторон трапеции лежат на одной окружности. Найдите её радиус.
Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 8.

3. ABCD — трапеция с основаниями AD = 6 и BC = 10. Оказалось, что середины всех четырёх сторон трапеции лежат на одной окружности. Найдите её радиус.
Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 4.

Примеры записи ответов:
45
4; 5

Задача 4. (3 балла).

1. Дан равногранный тетраэдр, длины рёбер которого — целые числа. Два из этих рёбер имеют длины 7 и 10. Какое наибольшее значение может принимать периметр тетраэдра?

Ответ: 58.

2. Дан равногранный тетраэдр, длины рёбер которого — целые числа. Два из этих рёбер имеют длины 5 и 8. Какое наибольшее значение может принимать периметр тетраэдра?

Ответ: 44.

3. Дан равногранный тетраэдр, длины рёбер которого — целые числа. Два из этих рёбер имеют длины 9 и 11. Какое наибольшее значение может принимать периметр тетраэдра?

Ответ: 68.

Примеры записи ответов:
45

Задача 5. (3 балла).

1. Функция $f(x)$ определена для $x > 0$ и такова, что $f(x) + f(y) = f(xy)\,(x+y)$. Известно, что $f(3) = 15$. Найдите $f(5)$.

Ответ: 9

2. Функция $f(x)$ определена для $x > 0$ такова, что $f(x) + f(y) = f(xy)\,(x+y)$. Известно, что $f(3) = 16$. Найдите $f(4)$.

Ответ: 12

3. Функция $f(x)$ определена для $x > 0$ такова, что $f(x) - f(y) = f(xy)\,(y-x)$. Известно, что $f(2) = 10$. Найдите $f(5)$.

Ответ: 4.

<u>Примеры записи ответов:</u>
45

Задача 6. (3 балла)

1. Найдите все положительные решения системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1+x_2=5x_3^2 \\ x_2+x_3=5x_4^2 \\ \dots \\ x_{2015}+x_{2016}=5x_{2017}^2 \\ x_{2016}+x_{2017}=5x_1^2 \\ x_{2017}+x_1=5x_2^2 \end{cases}$$

В ответе укажите значение x_1. Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 0,4 || 0.4 || 2/5

2. Найдите все положительные решения системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1+x_2=0{,}5x_3^2 \\ x_2+x_3=0{,}5x_4^2 \\ \dots \\ x_{2015}+x_{2016}=0{,}5x_{2017}^2 \\ x_{2016}+x_{2017}=0{,}5x_1^2 \\ x_{2017}+x_1=0{,}5x_2^2 \end{cases}$$

В ответе укажите значение x_1. Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 4

3. Найдите все положительные решения системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1+x_2=4x_3^2 \\ x_2+x_3=4x_4^2 \\ \dots \\ x_{2015}+x_{2016}=4x_{2017}^2 \\ x_{2016}+x_{2017}=4x_1^2 \\ x_{2017}+x_1=4x_2^2 \end{cases}$$

В ответе укажите значение x_1. Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 0,5 || 0.5 || 1/2

<u>Примеры записи ответов:</u>
45
4,5
4/5

Задача 7. (3 балла)

1. Дан кубический многочлен $p(x)$. Известно, что $p(4)=5$, $p(0)=25$, $p(-2) = -13$, $p(6)=43$. Кроме того, известно, что $p(x) > 0$ при $x > -1$. Найдите площадь фигуры, ограниченно прямыми $x = -1$, $y = 0$, $x = 5$ и графиком данного многочлена.

Ответ: 90.

2. Дан кубический многочлен $p(x)$. Известно, что $p(0)=46$, $p(2)=40$, $p(4)=10$, $p(6)=4$. Кроме того, известно, что $p(x) > 0$ при $x > 0$. Найдите площадь фигуры, ограниченно прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 6$ и графиком данного многочлена.

Ответ: 150.

3. Дан кубический многочлен $p(x)$. Известно, что $p(-6)=30$, $p(-3)=45$, $p(-1)=15$, $p(2)=30$. Найдите площадь фигуры, ограниченно прямыми $x = -6$, $y = 0$, $x = 2$ и графиком данного многочлена, если также известно, что на промежутке от -6 до 2 данный многочлен принимает только положительные значения.

Ответ: 240.

<u>**Примеры записи ответов:**</u>
45

Задача 8. (3 балла)

1. Решите неравенство: $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x-99}+\sqrt{x-100}}>2$.
Ответ запишите в виде промежутка. Например, промежуток (-1; 2] означает, что $1<x\leq 2$.
Если граница промежутка «бесконечность», используйте букву Б.

Ответ: [100; 676)

2. Решите неравенство: $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x+119}+\sqrt{x+120}}>4$.
Ответ запишите в виде промежутка. Например, промежуток (-1; 2] означает, что $1<x\leq 2$.
Если граница промежутка «бесконечность», используйте букву Б.

Ответ: [0; 169)

3. Решите неравенство: $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x-119}+\sqrt{x-120}}>2$.
Ответ запишите в виде промежутка. Например, промежуток (-1; 2] означает, что $1<x\leq 2$.
Если граница промежутка «бесконечность», используйте букву Б.

Ответ: [120; 961)

<u>**Примеры записи ответов:**</u>
[-4; 5)
(-4; 5]
(-4; 5)
[-4; 5]

(-Б; Б)

Задача 9. (3 балла)

1. В треугольнике ABC угол C в два раза больше угла B. CC_1 — биссектриса угла C, D — точка пересечения описанной окружности треугольника ACC_1 и стороны BC. BD = 8, CD = 2. Найдите длину AB.
Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 12.

2. В треугольнике ABC угол C в два раза больше угла B. CC_1 — биссектриса угла C, D — точка пересечения описанной окружности треугольника ACC_1 и стороны BC. BD = 25, CD = 14. Найдите длину AB.
Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 40.

3. В треугольнике ABC угол C в два раза меньше угла B. BB_1 — биссектриса угла B, D — точка пересечения описанной окружности треугольника ABB_1 и стороны AB. BD = 14, CD = 18. Найдите длину AC.
Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 30.

Примеры записи ответов:
45

Задача 10. (5 баллов)

1. Сколько существует способов разрезать горизонтальный прямоугольник 2x11 на прямоугольники 1x2 (горизонтальные и вертикальные) и 1x3 (горизонтальные, так как вертикальные не помещаются)?

Ответ: 1030

2. Сколько существует способов разрезать горизонтальный прямоугольник 2x11 на прямоугольники 1x2 (горизонтальные и вертикальные) и 1x4 (горизонтальные, так как вертикальные не помещаются)?
Ответ: 868

3. Сколько существует способов разрезать прямоугольник 2x8 на прямоугольники 1x2 (горизонтальные и вертикальные) и квадратики 1x1?

Ответ: 7573

Примеры записи ответов:
4545

II отборочный тур.
11 класс.

Задача 1. (2 балла)

1. $P(x)$ — многочлен третьей степени, все четыре коэффициента которого натуральные простые числа. Оказалось, что все четыре коэффициента многочлена $P(x)-P'(x)$ также натуральные простые числа. Какое наименьшее значение может принимать коэффициет при x^2 в многочлене $P(x)$?

Ответ: 11

2. $P(x)$ — многочлен третьей степени, все четыре коэффициента которого натуральные простые числа. Оказалось, что все четыре коэффициента многочлена $P(x)+2P'(x)$ также натуральные простые числа. Какое наименьшее значение может принимать коэффициет при x^2 в многочлене $P(x)$?

Ответ: 5

3. $P(x)$ — многочлен третьей степени, все четыре коэффициента которого натуральные простые числа. Оказалось, что все четыре коэффициента многочлена $P(x)-2P'(x)$ также натуральные простые числа. Какое наименьшее значение может принимать коэффициет при x^2 в многочлене $P(x)$?

Ответ: 17

Задача 2. (2 балла)

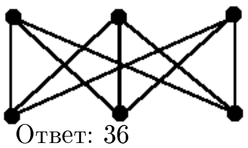
1. Сколько существует способов раскрасить вершины куба в 4 цвета так, чтобы любые две соседние вершины имели различные цвета, и вершины, имеющие общую соседнюю, также имели бы различные цвета?

Ответ: 24

2. Сколько существует способов раскрасить вершины треугольной призмы в 3 цвета так, чтобы любые две вершины, имеющие общую соседнюю, имели бы различные цвета?

Ответ: 6

3. Сколько существует способов раскрасить 6 отмеченных точек на рисунке в три цвета так, чтобы любые две точки, имеющие общую соседнюю, имели бы различные цвета? (Соседними называются точки, соединённые отрезками).



Ответ: 36

Задача 3. (2 балла)

1. Найдите все целые числа, входящие в область определения функции $\arcsin\ln\frac{|x|+3}{2}+\ln\sin x$. Ответы перечислите в порядке возрастания через точку с запятой.

Примеры записи ответа:
1
0;1

Ответ: 1; 2 || 1, 2 || 2; 1 || 2, 1

2. Найдите все целые числа, входящие в область определения функции $\arccos\ln\frac{|x|+2}{2}+\ln\cos x$. Ответы перечислите в порядке возрастания через точку с запятой.

Примеры записи ответа:
1
0;1

Ответ: -1; 0; 1 || -1, 0, 1 || 1; 0; -1 || 1, 0, -1

3. Найдите все целые числа, входящие в область определения функции $\arcsin\ln\frac{|x|+2}{2}+\log_{\cos x}2$. Ответы перечислите в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответа:
1
0;1

Ответ: -1; 1|| -1, 1 || 1; -1 || 1, -1

Задача 4. (3 балла)

1. Для функции f и всех неотрицательных x и y выполняется равенство $f(\sqrt{x})+f(\sqrt{y})=f(\sqrt{x+y})$. Также известно, что $f(10)=4$. Найдите $f(15)$.

Ответ: 9

2. Для функции f и всех неотрицательных x и y выполняется равенство $f(\sqrt[3]{x})+f(\sqrt[3]{y})=f(\sqrt[3]{x+y})$. Также известно, что $f(6)=8$. Найдите $f(9)$.

Ответ: 27

3. Для функции f и всех неотрицательных x и y выполняется равенство $f(\sqrt[4]{x})+f(\sqrt[4]{y})=f(\sqrt[4]{x+y})$. Также известно, что $f(2)=4$. Найдите $f(3)$.

Ответ: 81/4 || 20,25 || 20.25

Задача 5. (3 балла)

1. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_1=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ и $a_{n+1}=4a_n^3-3a_n$. Найдите a_1a_{2018}.

Ответ: -1/4 || -0.25 || -0,25

2. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_1=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ и $a_{n+1}=3a_n-4a_n^3$. Найдите $(a_1a_{2018})^2$.

Ответ: 5/16 || 0.3125 || 0,3125

3. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ и $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$. Найдите $a_1 a_{2018}$.

Ответ: 1/4 || 0.25 || 0,25

Задача 6. (3 балла)

1. Найдите суммарную длину промежутков, являющихся решением неравенства $x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)\dots(x^2-99)(x-10) < 0$.

Ответ: 10

2. Найдите суммарную длину промежутков, являющихся решением неравенства $x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)\dots(x^2-120)(x-11) < 0$.

Ответ: 11

3. Найдите суммарную длину промежутков, являющихся решением неравенства $x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)\dots(x^2-80)(x-9) < 0$.

Ответ: 9

Задача 7. (3 балла)

1. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, как на диаметрах, построены две окружности, пересекающиеся в точках K и L. Прямая KL пересекает основание BC в точке X. Прямая BC вторично пересекает окружность, построенную на AB, как на диаметре, в точке Y. $AB = \sqrt{185}$, $BC = 3$, $CD = 4\sqrt{5}$, $AD = 18$.

Найдите XY.

Ответ: 12

2. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, как на диаметрах, построены две окружности, пересекающиеся в точках K и L. Прямая KL пересекает основание BC в точке X. Прямая BC вторично пересекает окружность, построенную на AB, как на диаметре, в точке Y. $AB = 13$, $BC = 3$, $CD = \sqrt{145}$, $AD = 9$.

Найдите XY.

Ответ: 6

3. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, как на диаметрах, построены две окружности, пересекающиеся в точках K и L. Прямая KL пересекает основание BC в точке X. Прямая BC вторично пересекает окружность, построенную на AB, как на диаметре, в точке Y. $AB = \sqrt{181}$, $BC = 3$, $CD = \sqrt{109}$, $AD = 15$.

Найдите XY.

Ответ: 10

Задача 8. (3 балла)

1. Сколько натуральных членов содержит разложение бинома $(8^{\frac{1}{7}} + 18^{\frac{1}{3}})^{220}$?

Ответ: 11

2. Сколько натуральных членов содержит разложение бинома $(8^{\frac{1}{7}} + 18^{\frac{1}{3}})^{150}$?

Ответ: 8

3. Сколько натуральных членов содержит разложение бинома $(8^{\frac{1}{7}} + 18^{\frac{1}{3}})^{250}$?

Ответ: 12

Задача 9. (4 балла)

1. Вершины одной из граней куба со стороной 6 лежат на сторонах треугольника ABC. Точка D лежит на противоположной грани этого куба. какое наименьшее значение может принимать объём тетраэдра $ABCD$?

Ответ: 144

2. Вершины одной из граней куба со стороной 9 лежат на сторонах треугольника ABC. Точка D лежит на противоположной грани этого куба. какое наименьшее значение может принимать объём тетраэдра $ABCD$?

Ответ: 486

3. Вершины одной из граней куба со стороной 30 лежат на сторонах треугольника ABC. Точка D лежит на противоположной грани этого куба. какое наименьшее значение может принимать объём тетраэдра $ABCD$?

Ответ: 18000

Задача 10. (4 балла)

1. Сколько различных векторов можно получить, складывая векторы в пространстве с целочисленными координатами и длиной $\sqrt{3}$, если каждый из 8 таких векторов в одной сумме может использоваться не более одного раза?

Ответ: 65

2. Сколько различных векторов можно получить, складывая векторы в пространстве с целочисленными координатами и длиной $\sqrt{2}$, если каждый из 12 таких векторов в одной сумме может использоваться не более одного раза?

Ответ: 201

3. Сколько различных векторов можно получить, складывая векторы на плоскости с целочисленными координатами и длиной не более $\sqrt{2}$, если каждый из 9 таких векторов в одной сумме может использоваться не более одного раза?

Ответ: 37