Задания с решениями
"Открытой олимпиады школьников по математике"
(№ 58 Перечня олимпиад школьников)
2018/2019 уч. год

апрель 2019 г.

Содержание

1 Задания с решениями заключительного этапа олимпиады

1.1 Задания для 11 класса

1 вариант

Задача 1. (2 балла)

Сумма и произведение трёх попарно взаимно простых чисел делятся на 13. Может ли их сумма квадратов также делиться на 13?

Ответ: Нет.

Решение:

Обозначим эти числа за x, y и z. Так как произведение чисел делится на 13, одно из чисел должно делиться на 13. Пусть это число x, тогда из условия взаимной простоты мы получаем, что ни y, ни z не делятся на 13.

Далее, $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = (x + y + z)^2 - 2x(y + z) - 2yz$. Число $(x+y+z)^2 - 2x(y+z)$ делится на 13, а $2yz$ не делится, значит, и всё выражение не может делиться на 13.

Для участников, знакомы с техникой сравнения по модулю, можем предложить также такое решение: поскольку x и $x+y+z$ делятся на 13, $y \equiv -z \pmod{13}$, откуда $x^2+y^2+z^2 \equiv 2y^2 \pmod{13}$. Значит, если сумма квадратов делится на 13, $2y^2$ также должно делиться на 13, а это не верно.

Задача 2. (2 балла)

Существует ли многочлен третьей степени такой, что все его корни положительны, а все корни его производной отрицательны, при условии, что и у многочлена, и у производной, есть хотя бы один единственный корень?

Ответ: Да.

Решение:

Подходит, например, многочлен $(x + 1)^3 - 8$: его единственный корень — это 1, т.к. $x + 1 = 2$, а единственный корень производной это -1.

Задача 3. (3 балла)

Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = -1$ и $a_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k + 1)$ при $n \geqslant 1$. Найдите явную формулу этой последовательности.

Ответ: $a_n = 2^{n-2} - 1$ при $a > 1$, $a_1 = -1$

Решение:

Вычитая друг из друга формулы для a_{n+1} и a_n, получаем $a_{n+1} - a_n = a_n + 1$, то есть $a_{n+1} = 2a_n + 1$ для $n > 1$.

Теперь докажем формулу $a_n = 2^{n-2} - 1$ по индукции. База $n = 2$ и, действительно, $a_2 = a_1 + 1 = 0 = 2^0 - 1$.

Далее воспользуемся полученной рекуррентной формулой и убедимся, что если $a_n = 2^{n-2} - 1$, то $a_{n+1} = 2(2^{n-2} - 1) + 1 = 2^{n-1} - 1$.

Задача 4. (3 балла)

Найдите $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, если известно, что $\sec x - \operatorname{cosec} x = \sqrt{15}$.

Напомним, что $\sec x = 1/\cos x$, а $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$

Ответ: -3 или 5.

Решение:

Воспользуемся следующими формулами: $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$; $\sec x - \operatorname{cosec} x = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x \cos x}$.

Введём обозначения: $t = \sin x \cos x$ и $A = \sec x - \operatorname{cosec} x$.

Тогда $A^2 = \dfrac{\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x}{t^2} = \dfrac{1-2t}{t^2}$. Составим квадратное уравнение $1 - 2t - t^2A^2 = 0$ и решим его относительное t:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+A^2}}{A^2}.$$

При $A = \sqrt{15}$ получаем $t = -\dfrac{5}{15} = -\dfrac{1}{3}$ и $t = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$. В ответе получаем обратные к t величины.

Осталось убедиться, что для каждого из полученных значений найдётся x, при котором это значение достигается при данном A.

Действительно, $t = \frac{1}{2}\sin 2x$, поэтому для любого значения $-\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ найдётся подходящий x. Далее, A выражается через t с точностью до знака, при этом оба возможных значения A достигаются при данном t: для того, чтобы поменять знак A, достаточно увеличить или уменьшить x на π.

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна диагонали AC. На меньшей дуге AD описанной окружности треугольника ABD выбрана точка E так, что $AB = AE$. Найдите угол $\angle CED$.

Ответ: 90°.

Решение:

Из равнобедренности треугольника ABC и параллельности BC и AD получаем $\angle ABC = \angle ACB = \angle CAD = \alpha$.

Пусть прямая BC пересекается с описанной окружностью треугольника ABD в точке F. Тогда $ABFD$ — вписанная, т.е. равнобедренная, трапеция, откуда дуги AB, AE и DF равны. Отсюда $\angle ABE = \angle DBF = \beta$.

$\angle EAD = \angle EBD = \gamma$, так как эти углы опираются на одну дугу.

$\angle ABD = \angle ABE + \angle EBD = \beta + \gamma$.

$\angle EAC = \angle EAD + \angle CAD = \gamma + \alpha$. Значит, в равнобедренном треугольнике EAC выполняется равенство $\angle ACE = \angle AEC = \dfrac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2}$.

Кроме того, $\alpha = \angle ABC = \angle ABF = \angle ABD + \angle DBF = 2\beta + \gamma$

$\angle CED = \angle AED - \angle AEC = (180^\circ - \angle ABD) - \dfrac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2} = 180^\circ - \beta - \gamma - 90^\circ + \dfrac{2\beta + 2\gamma}{2} = 90^\circ$.

Задача 6. (3 балла)

Сколькими способами можно расставить натуральные числа от 1 до 9 в квадратной таблице 3×3 так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была чётна? (Числа могут повторяться)

Ответ: $6 \cdot 5^6 \cdot 4^3 + 9 \cdot 5^4 \cdot 4^5 + 4^9$.

Решение:

В каждой строке и каждом столбце таблицы может быть либо ноль, либо два нечётных числа, то есть либо одно, либо три чётных. Общее количество чётных чисел — нечётное число от 3 до 9.

Разберём несколько случаев:

1) Всего три чётных числа, то есть по одному в каждой строке и каждом столбце. У нас $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов выбрать, где стоят эти числа, 5^6 способов расставить нечётные числа и 4^3 способов расставить чётные.

2) Пять чётных чисел, т.е. они занимают одну строку и один столбец. $3 \cdot 3 = 9$ способов выбрать эти строку и столбец, 5^4 способов расставить нечётные числа и 4^5 способов расставить чётные.

3) Семи чётных чисел быть не может, так как это значит, что нечётных чисел всего два. Они не могут одновременно находиться в одной строке и одном столбце, а значит, какие-то суммы окажутся нечётными.

4) Все числа чётные, в таком случае 4^9 способов.

Итого $6 \cdot 5^6 \cdot 4^3 + 9 \cdot 5^4 \cdot 4^5 + 4^9$.

Задача 7. (4 балла)

Плоскость пересекает рёбра тетраэдра $ABCD$, выходящие из вершины D, и делит их в отношении $5 : 1$ (не обязательно от вершины D). Также эта плоскость пересекает прямые AB и AC в точках E и F. Найдите отношение площадей треугольников AEF и ABC.

Ответ: $1 : 576$ или $625 : 576$.

Решение:

Обозначим точки пересечения плоскости (назовём её α) с рёбрами DA, DB и DC за A', B' и C' соответственно. Если $DA' : A'A = DB' : B'B$, прямые AB и $A'B'$ параллельны, а значит, плоскость α не пересекается с прямой AB. Аналогичные рассуждения проведём для прямой AC. Значит, $DA' : A'A \neq DB' : B'B = DC' : C'C$.

Возможны два варианта. В первом случае $DA' : A'A = B'B : DB' = 5 : 1$. По теореме Менелая получаем $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BB'}{DB'} \cdot \frac{DA'}{A'A} = 1$, откуда $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{25}$. При этом точка E оказывается на луче BA за точкой A, откуда $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{24}$. Аналогично $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{24}$ и отношение площадей равно $1 : 576$ (т.к. у искомых треугольников равны углы при вершине A).

Во втором случае $DA' : A'A = B'B : DB' = 1 : 5$. По теореме Менелая получаем $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BB'}{DB'} \cdot \frac{DA'}{A'A} = 1$, откуда $\frac{AE}{EB} = 25$. При этом точка E оказывается на луче AB за точкой B, откуда $\frac{AE}{AB} = \frac{25}{24}$. Аналогично $\frac{AF}{AC} = \frac{25}{24}$ и отношение площадей равно $625 : 576$.

Задача 8. (5 баллов)

Девочка Катя не любит число 239. Она выписала несколько различных чисел, ни одно из которых не содержит последовательность цифр 239 (подряд и именно в таком порядке). Докажите, что сумма обратных к этим числам не больше 30000.

Решение:

Количество подходящих $3n+1$-значных чисел не больше, чем $9 \cdot 999^n$: 9 вариантов для первой цифры и не более 999 вариантов для каждой следующей тройки цифр. Каждое из них не меньше 10^{3n}.

Количество подходящих $3n+2$-значных чисел не больше, чем $90 \cdot 999^n$. Каждое из них не меньше 10^{3n+1}.

Количество подходящих $3n+3$-значных чисел не больше, чем $899 \cdot 999^n$. Каждое из них не меньше 10^{3n+2}.

Пусть количество знаков в самом большом выписанном числе не превосходит $3N+3$. Тогда общая сумма чисел не больше
$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{9 \cdot 999^n}{1000^n} + \frac{90 \cdot 999^n}{10 \cdot 1000^n} + \frac{899 \cdot 999^n}{100 \cdot 1000^n} \right) = (9+9+8,99) \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{999^n}{1000^n} \right) \leqslant 30 \cdot \frac{1}{1-0,999} =$ 30000.

2 вариант

Задача 1. (2 балла)

Сумма и произведение трёх попарно взаимно простых чисел делятся на 11. Может ли их сумма квадратов также делиться на 11?

Ответ: Нет.

Решение:

Обозначим эти числа за x, y и z. Так как произведение чисел делится на 11, одно из чисел должно делиться на 11. Пусть это число x, тогда из условия взаимной простоты мы получаем, что ни y, ни z не делятся на 11.

Далее, $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = (x + y + z)^2 - 2x(y + z) - 2yz$. Число $(x+y+z)^2 - 2x(y+z)$ делится на 11, а $2yz$ не делится, значит, и всё выражение не может делиться на 11.

Для участников, знакомы с техникой сравнения по модулю, можем предложить также такое решение: поскольку x и $x+y+z$ делятся на 11, $y \equiv -z \pmod{11}$, откуда $x^2+y^2+z^2 \equiv 2y^2 \pmod{11}$. Значит, если сумма квадратов делится на 11, $2y^2$ также должно делиться на 11, а это не верно.

Задача 2. (2 балла)

Существует ли многочлен пятой степени такой, что все его корни отрицательны, а все корни его производной положительны, при условии, что и у многочлена, и у производной, есть хотя бы один единственный корень?

Ответ: Да.

Решение:

Подходит, например, многочлен $(x - 1)^5 + 32$: его единственный корень — это -1, т.к. $x - 1 = -2$, а единственный корень производной — это 1.

Задача 3. (3 балла)

Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 1$ и $a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + n$ при $n \geqslant 2$. Найдите явную формулу этой последовательности.

Ответ: $a_n = 2^n - 1$

Решение:

Вычитая друг из друга формулы для a_{n+1} и a_n, получаем $a_{n+1} - a_n = a_n + 1$, то есть $a_{n+1} = 2a_n + 1$ для $n > 1$.

Теперь докажем формулу $a_n = 2^n - 1$ по индукции. База $n = 1$ и, действительно, $a_1 = 1 = 2^1 - 1$.

Далее воспользуемся полученной рекуррентной формулой и убедимся, что если $a_n = 2^n - 1$, то $a_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$.

Задача 4. (3 балла)

Найдите $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, если известно, что $\sec x - \operatorname{cosec} x = 4\sqrt{3}$.

Напомним, что $\sec x = 1/\cos x$, а $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$

Ответ: -6 или 8.

Решение:

Воспользуемся следующими формулами: $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$; $\sec x - \operatorname{cosec} x = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x \cos x}$.

Введём обозначения: $t = \sin x \cos x$ и $A = \sec x - \operatorname{cosec} x$.

Тогда $A^2 = \dfrac{\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x}{t^2} = \dfrac{1-2t}{t^2}$. Составим квадратное уравнение $1 - 2t - t^2A^2 = 0$ и решим его относительное t:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+A^2}}{A^2}.$$

При $A = 4\sqrt{3} = \sqrt{48}$ получаем $t = -\dfrac{8}{48} = -\dfrac{1}{6}$ и $t = \dfrac{6}{48} = \dfrac{1}{8}$. В ответе получаем обратные к t величины.

Осталось убедиться, что для каждого из полученных значений найдётся x, при котором это значение достигается при данном A.

Действительно, $t = \frac{1}{2}\sin 2x$, поэтому для любого значения $-\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ найдётся подходящий x. Далее, A выражается через t с точностью до знака, при этом оба возможных значения A достигаются при данном t: для того, чтобы поменять знак A, достаточно увеличить или уменьшить x на π.

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ боковая сторона BC равна диагонали BD. На меньшей дуге AB описанной окружности треугольника ABC выбрана точка E так, что $BC = BE$. Найдите угол $\angle AED$.

Ответ: 90°.

Решение:

Из равнобедренности треугольника BCD и параллельности AB и CD получаем $\angle BCD = \angle BDC = \angle DBA = \alpha$.

Пусть прямая CD пересекается с описанной окружностью треугольника ABC в точке F. Тогда $BCFA$ — вписанная, т.е. равнобедренная, трапеция, откуда дуги BC, BE и AF равны. Отсюда $\angle BCE = \angle ACF = \beta$.

$\angle EBA = \angle ECA = \gamma$, так как эти углы опираются на одну дугу.

$\angle BCA = \angle BCE + \angle ECA = \beta + \gamma$.

$\angle EBD = \angle EBA + \angle DBA = \gamma + \alpha$. Значит, в равнобедренном треугольнике EBD выполняется равенство $\angle BDE = \angle BED = \dfrac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2}$.

Кроме того, $\alpha = \angle BCD = \angle BCF = \angle BCA + \angle ACF = 2\beta + \gamma$

$\angle AED = \angle BEA - \angle BED = (180^\circ - \angle BCA) - \dfrac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2} = 180^\circ - \beta - \gamma - 90^\circ + \dfrac{2\beta + 2\gamma}{2} = 90^\circ$.

Задача 6. (3 балла)

Сколькими способами можно расставить натуральные числа от 1 до 7 в квадратной таблице 3×3 так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была нечётна? (Числа могут повторяться)

Ответ: $6 \cdot 3^6 \cdot 4^3 + 9 \cdot 3^4 \cdot 4^5 + 4^9$.

Решение:

В каждой строке и каждом столбце таблицы может быть либо одно, либо три нечётных числа. Общее количество нечётных чисел — нечётное число от 3 до 9.

Разберём несколько случаев:

1) Всего три нечётных числа, то есть по одному в каждой строке и каждом столбце. У нас $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов выбрать, где стоят эти числа, 3^6 способов расставить чётные числа и 4^3 способов расставить нечётные.

2) Пять нечётных чисел, т.е. они занимают одну строку и один столбец. $3 \cdot 3 = 9$ способов выбрать эти строку и столбец, 3^4 способов расставить чётные числа и 4^5 способов расставить нечётные.

3) Семи нечётных чисел быть не может, так как это значит, что чётных чисел всего два. Они не могут одновременно находиться в одной строке и одном столбце, а значит, какие-то суммы окажутся чётными.

4) Все числа нечётные, в таком случае 4^9 способов.

Итого $6 \cdot 3^6 \cdot 4^3 + 9 \cdot 3^4 \cdot 4^5 + 4^9$.

Задача 7. (4 балла)

Плоскость пересекает рёбра тетраэдра $ABCD$, выходящие из вершины C, и делит их в отношении $4:1$ (не обязательно от вершины C). Также эта плоскость пересекает прямые AB и BD в точках E и F. Найдите отношение площадей треугольников BEF и ABD.

Ответ: $1:225$ или $256:225$.

Решение:

Обозначим точки пересечения плоскости (назовём её α) с рёбрами CA, CB и CD за A', B' и D' соответственно. Если $CA' : A'A = CB' : B'B$, прямые AB и $A'B'$ параллельны, а значит, плоскость α не пересекается с прямой AB. Аналогичные рассуждения проведём для прямой BD. Значит, $CB' : B'B \neq CA' : A'A = CD' : D'D$.

Возможны два варианта. В первом случае $CB' : B'B = A'A : A'C = 4:1$. По теореме Менелая получаем $\frac{BE}{EA} \cdot \frac{AA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'B} = 1$, откуда $\frac{BE}{EA} = \frac{1}{16}$. При этом точка E оказывается на луче AB за точкой B, откуда $\frac{BE}{AB} = \frac{1}{15}$. Аналогично $\frac{BF}{BD} = \frac{1}{15}$ и отношение площадей равно $1:225$ (т.к. у искомых треугольников равны углы при вершине B).

Во втором случае $CB' : B'B = A'A : A'C = 1:4$. По теореме Менелая получаем $\frac{BE}{EA} \cdot \frac{AA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'B} = 1$, откуда $\frac{BE}{EA} = 16$. При этом точка E оказывается на луче BA за точкой A, откуда $\frac{BE}{AB} = \frac{16}{15}$. Аналогично $\frac{BF}{BD} = \frac{16}{15}$ и отношение площадей равно $256:225$ (т.к. у искомых треугольников равны углы при вершине B).

Задача 8. (5 баллов)

Мальчик Коля не любит число 1234. Он выписал несколько различных чисел, ни одно из которых не содержит последовательность цифр 1234 (подряд и именно в таком порядке). Докажите, что сумма обратных к этим числам не больше 400000.

Решение:

Количество подходящих $4n+1$-значных чисел не больше, чем $9 \cdot 9999^n$: 9 вариантов для первой цифры и не более 9999 вариантов для каждой следующей четвёрки цифр. Каждое из них не меньше 10^{4n}.

Количество подходящих $4n+2$-значных чисел не больше, чем $90 \cdot 9999^n$. Каждое из них не меньше 10^{4n+1}.

Количество подходящих $4n+3$-значных чисел не больше, чем $900 \cdot 9999^n$. Каждое из них не меньше 10^{4n+2}.

Количество подходящих $4n+4$-значных чисел не больше, чем $8999 \cdot 9999^n$. Каждое из них не меньше 10^{4n+3}.

Пусть количество знаков в самом большом выписанном числе не превосходит $4N+4$. Тогда общая сумма чисел не больше $\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{9 \cdot 9999^n}{10000^n} + \frac{90 \cdot 9999^n}{10 \cdot 10000^n} + \frac{900 \cdot 9999^n}{100 \cdot 10000^n} + \frac{8999 \cdot 9999^n}{1000 \cdot 10000^n} \right)$

$= (9+9+9+8,999) \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{9999^n}{10000^n} \right) \leqslant 40 \cdot \frac{1}{1-0,9999} = 400000.$

3 вариант

Задача 1. (2 балла)

Сумма и произведение трёх попарно взаимно простых чисел делятся на 7. Может ли их сумма квадратов также делиться на 7?

Ответ: Нет.

Решение:

Обозначим эти числа за x, y и z. Так как произведение чисел делится на 7, одно из чисел должно делиться на 7. Пусть это число x, тогда из условия взаимной простоты мы получаем, что ни y, ни z не делятся на 7.

Далее, $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = (x + y + z)^2 - 2x(y + z) - 2yz$. Число $(x + y + z)^2 - 2x(y + z)$ делится на 7, а $2yz$ не делится, значит, и всё выражение не может делиться на 7.

Для участников, знакомы с техникой сравнения по модулю, можем предложить также такое решение: поскольку x и $x+y+z$ делятся на 7, $y \equiv -z \pmod 7$, откуда $x^2+y^2+z^2 \equiv 2y^2 \pmod 7$. Значит, если сумма квадратов делится на 7, $2y^2$ также должно делиться на 7, а это не верно.

Задача 2. (2 балла)

Существует ли многочлен третьей степени такой, что все его корни положительны, а все корни его производной отрицательны, при условии, что и у многочлена, и у производной, есть хотя бы один единственный корень?

Ответ: Да.

Решение:

Подходит, например, многочлен $(x + 1)^3 - 8$: его единственный корень — это 1, т.к. $x + 1 = 2$, а единственный корень производной это -1.

Задача 3. (3 балла)

Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 0$ и $a_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k + 1)$ при $n \geqslant 1$. Найдите явную формулу этой последовательности.

Ответ: $a_n = 2^{n-1} - 1$

Решение:

Вычитая друг из друга формулы для a_{n+1} и a_n, получаем $a_{n+1} - a_n = a_n + 1$, то есть $a_{n+1} = 2a_n + 1$ для $n > 1$.

Теперь докажем формулу $a_n = 2^{n-1} - 1$ по индукции. База $n = 1$ и, действительно, $a_1 = 0 = 2^0 - 1$.

Далее воспользуемся полученной рекуррентной формулой и убедимся, что если $a_n = 2^{n-1} - 1$, то $a_{n+1} = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$.

Задача 4. (3 балла)

Найдите $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, если известно, что $\sec x - \operatorname{cosec} x = \sqrt{35}$.

Напомним, что $\sec x = 1/\cos x$, а $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$

Ответ: -5 или 7.

Решение:

Воспользуемся следующими формулами: $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$; $\sec x - \operatorname{cosec} x = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x \cos x}$.

Введём обозначения: $t = \sin x \cos x$ и $A = \sec x - \operatorname{cosec} x$.

Тогда $A^2 = \dfrac{\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x}{t^2} = \dfrac{1-2t}{t^2}$. Составим квадратное уравнение $1 - 2t - t^2A^2 = 0$ и решим его относительное t:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+A^2}}{A^2}.$$

При $A = \sqrt{35}$ получаем $t = -\dfrac{7}{35} = -\dfrac{1}{5}$ и $t = \dfrac{5}{35} = \dfrac{1}{7}$. В ответе получаем обратные к t величины.

Осталось убедиться, что для каждого из полученных значений найдётся x, при котором это значение достигается при данном A.

Действительно, $t = \frac{1}{2}\sin 2x$, поэтому для любого значения $-\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ найдётся подходящий x. Далее, A выражается через t с точностью до знака, при этом оба возможных значения A достигаются при данном t: для того, чтобы поменять знак A, достаточно увеличить или уменьшить x на π.

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD равна диагонали AC. На меньшей дуге BC описанной окружности треугольника BCD выбрана точка E так, что $CD = CE$. Найдите угол $\angle AEB$.

Ответ: 90°.

Решение:

Из равнобедренности треугольника ACD и параллельности BC и AD получаем $\angle ADC = \angle CAD = \angle ACB = \alpha$.

Пусть прямая AD пересекается с описанной окружностью треугольника BCD в точке F. Тогда $CDFB$ — вписанная, т.е. равнобедренная, трапеция, откуда дуги CD, CE и BF равны. Отсюда $\angle CDE = \angle BDF = \beta$.

$\angle ECB = \angle EDB = \gamma$, так как эти углы опираются на одну дугу.

$\angle CDB = \angle CDE + \angle EDB = \beta + \gamma$.

$\angle ECA = \angle ECB + \angle ACB = \alpha + \gamma$. Значит, в равнобедренном треугольнике ECA выполняется равенство $\angle CAE = \angle AEC = \dfrac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2}$.

Кроме того, $\alpha = \angle ADC = \angle CDF = \angle CDB + \angle BDF = 2\beta + \gamma$

$\angle AEB = \angle CEB - \angle AEC = (180^\circ - \angle CDB) - \dfrac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2} = 180^\circ - \beta - \gamma - 90^\circ + \dfrac{2\beta + 2\gamma}{2} = 90^\circ$.

Задача 6. (3 балла)

Сколькими способами можно расставить натуральные числа от 1 до 13 в квадратной таблице 3×3 так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была чётна? (Числа могут повторяться)

Ответ: Итого $6 \cdot 7^6 \cdot 6^3 + 9 \cdot 7^4 \cdot 6^5 + 6^9$.

Решение:

В каждой строке и каждом столбце таблицы может быть либо ноль, либо два нечётных числа, то есть либо одно, либо три чётных. Общее количество чётных чисел — нечётное число от 3 до 9.

Разберём несколько случаев:

1) Всего три чётных числа, то есть по одному в каждой строке и каждом столбце. У нас $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов выбрать, где стоят эти числа, 7^6 способов расставить нечётные числа и 6^3 способов расставить чётные.

2) Пять чётных чисел, т.е. они занимают одну строку и один столбец. $3 \cdot 3 = 9$ способов выбрать эти строку и столбец, 7^4 способов расставить нечётные числа и 6^5 способов расставить чётные.

3) Семи чётных чисел быть не может, так как это значит, что нечётных чисел всего два. Они не могут одновременно находиться в одной строке и одном столбце, а значит, какие-то суммы окажутся нечётными.

4) Все числа чётные, в таком случае 6^9 способов.

Итого $6 \cdot 7^6 \cdot 6^3 + 9 \cdot 7^4 \cdot 6^5 + 6^9$.

Задача 7. (4 балла)

Плоскость пересекает рёбра тетраэдра $ABCD$, выходящие из вершины B, и делит их в отношении $2:1$ (не обязательно от вершины B). Также эта плоскость пересекает прямые CD и AC в точках E и F. Найдите отношение площадей треугольников EFC и ACD.

Ответ: $1:9$ или $16:9$.

Решение:

Обозначим точки пересечения плоскости (назовём её α) с рёбрами BA, BC и BD за A', C' и D' соответственно. Если $BA' : A'A = BC' : C'C$, прямые AC и $A'C'$ параллельны, а значит, плоскость α не пересекается с прямой AC. Аналогичные рассуждения проведём для прямой CD. Значит, $BC' : C'C \neq BA' : A'A = BD' : D'D$.

Возможны два варианта. В первом случае $BC' : C'C = D'D : D'B = 2 : 1$. По теореме Менелая получаем $\frac{CE}{ED} \cdot \frac{DD'}{D'B} \cdot \frac{BC'}{C'C} = 1$, откуда $\frac{CE}{ED} = \frac{1}{4}$. При этом точка E оказывается на луче DC за точкой C, откуда $\frac{CE}{CD} = \frac{1}{3}$. Аналогично $\frac{CF}{CA} = \frac{1}{3}$ и отношение площадей равно $1:9$ (т.к. у искомых треугольников равны углы при вершине C).

Во втором случае $BC' : C'C = D'D : D'B = 1 : 2$. По теореме Менелая получаем $\frac{CE}{ED} \cdot \frac{DD'}{D'B} \cdot \frac{BC'}{C'C} = 1$, откуда $\frac{CE}{ED} = \frac{4}{1}$. При этом точка E оказывается на луче CD за точкой D, откуда $\frac{CE}{CD} = \frac{4}{3}$. Аналогично $\frac{CF}{CA} = \frac{4}{3}$ и отношение площадей равно $16:9$ (т.к. у искомых треугольников равны углы при вершине C).

Задача 8. (5 баллов)

Девочка Маша не любит число 729. Она выписала несколько различных чисел, ни одно из которых не содержит последовательность цифр 729 (подряд и именно в таком порядке). Докажите, что сумма обратных к этим числам не больше 30000.

Решение:

Количество подходящих $3n+1$-значных чисел не больше, чем $9 \cdot 999^n$: 9 вариантов для первой цифры и не более 999 вариантов для каждой следующей тройки цифр. Каждое из них не меньше 10^{3n}.

Количество подходящих $3n+2$-значных чисел не больше, чем $90 \cdot 999^n$. Каждое из них не меньше 10^{3n+1}.

Количество подходящих $3n+3$-значных чисел не больше, чем $899 \cdot 999^n$. Каждое из них не меньше 10^{3n+2}.

Пусть количество знаков в самом большом выписанном числе не превосходит $3N+3$. Тогда общая сумма чисел не больше

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{9 \cdot 999^n}{1000^n} + \frac{90 \cdot 999^n}{10 \cdot 1000^n} + \frac{899 \cdot 999^n}{100 \cdot 1000^n} \right) = (9+9+8,99) \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{999^n}{1000^n} \right) \leqslant 30 \cdot \frac{1}{1-0,999} =$$
$$30000.$$

4 вариант

Задача 1. (2 балла)

Сумма и произведение трёх попарно взаимно простых чисел делятся на 17. Может ли их сумма квадратов также делиться на 17?

Ответ: Нет.

Решение:

Обозначим эти числа за x, y и z. Так как произведение чисел делится на 17, одно из чисел должно делиться на 17. Пусть это число x, тогда из условия взаимной простоты мы получаем, что ни y, ни z не делятся на 17.

Далее, $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = (x + y + z)^2 - 2x(y + z) - 2yz$. Число $(x+y+z)^2 - 2x(y+z)$ делится на 17, а $2yz$ не делится, значит, и всё выражение не может делиться на 17.

Для участников, знакомы с техникой сравнения по модулю, можем предложить также такое решение: поскольку x и $x+y+z$ делятся на 17, $y \equiv -z \pmod{17}$, откуда $x^2+y^2+z^2 \equiv 2y^2 \pmod{17}$. Значит, если сумма квадратов делится на 17, $2y^2$ также должно делиться на 17, а это не верно.

Задача 2. (2 балла)

Существует ли многочлен пятой степени такой, что все его корни отрицательны, а все корни его производной положительны, при условии, что и у многочлена, и у производной, есть хотя бы один единственный корень?

Ответ: Да.

Решение:

Подходит, например, многочлен $(x - 1)^5 + 32$: его единственный корень — это -1, т.к. $x - 1 = -2$, а единственный корень производной — это 1.

Задача 3. (3 балла)

Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 2$ и $a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + n$ при $n \geqslant 2$. Найдите явную формулу этой последовательности.

Ответ: $a_n = 5 \cdot 2^{n-2} - 1$ при $a > 1$, $a_1 = 2$

Решение:

Вычитая друг из друга формулы для a_{n+1} и a_n, получаем $a_{n+1} - a_n = a_n + 1$, то есть $a_{n+1} = 2a_n + 1$ для $n > 1$.

Теперь докажем формулу $a_n = 5 \cdot 2^{n-2} - 1$ по индукции. База $n = 2$ и, действительно, $a_2 = a_1 + 2 = 4 = 5 \cdot 2^0 - 1$.

Далее воспользуемся полученной рекуррентной формулой и убедимся, что если $a_n = 5 \cdot 2^{n-2} - 1$, то $a_{n+1} = 2(5 \cdot 2^{n-2} - 1) + 1 = 5 \cdot 2^{n-1} - 1$.

Задача 4. (3 балла)

Найдите $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, если известно, что $\sec x - \operatorname{cosec} x = 2\sqrt{6}$.

Напомним, что $\sec x = 1/\cos x$, а $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$

Ответ: -4 или 6.

Решение:

Воспользуемся следующими формулами: $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$; $\sec x - \operatorname{cosec} x = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x \cos x}$.

Введём обозначения: $t = \sin x \cos x$ и $A = \sec x - \operatorname{cosec} x$.

Тогда $A^2 = \dfrac{\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x}{t^2} = \dfrac{1-2t}{t^2}$. Составим квадратное уравнение $1 - 2t - t^2A^2 = 0$ и решим его относительное t:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+A^2}}{A^2}.$$

При $A = 2\sqrt{6} = \sqrt{24}$ получаем $t = -\dfrac{6}{24} = -\dfrac{1}{4}$ и $t = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$. В ответе получаем обратные к t величины.

Осталось убедиться, что для каждого из полученных значений найдётся x, при котором это значение достигается при данном A.

Действительно, $t = \frac{1}{2}\sin 2x$, поэтому для любого значения $-\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ найдётся подходящий x. Далее, A выражается через t с точностью до знака, при этом оба возможных значения A достигаются при данном t: для того, чтобы поменять знак A, достаточно увеличить или уменьшить x на π.

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AD равна диагонали BD. На меньшей дуге CD описанной окружности треугольника ACD выбрана точка E так, что $AD = DE$. Найдите угол $\angle BEC$.

Ответ: 90°.

Решение:

Из равнобедренности треугольника BAD и параллельности AB и CD получаем $\angle BAD = \angle DBA = \angle BDC = \alpha$.

Пусть прямая AB пересекается с описанной окружностью треугольника ACD в точке F. Тогда $DAFC$ — вписанная, т.е. равнобедренная, трапеция, откуда дуги DA, DE и CF равны. Отсюда $\angle DAE = \angle CAF = \beta$.

$\angle EDC = \angle EAC = \gamma$, так как эти углы опираются на одну дугу.

$\angle DAC = \angle DAE + \angle EAC = \beta + \gamma$.

$\angle EDB = \angle EDC + \angle BDC = \gamma + \alpha$. Значит, в равнобедренном треугольнике EBD выполняется равенство $\angle DBE = \angle BED = \dfrac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2}$.

Кроме того, $\alpha = \angle BAD = \angle DAF = \angle DAC + \angle CAF = 2\beta + \gamma$

$\angle BEC = \angle DEC - \angle DEB = (180^\circ - \angle DAC) - \dfrac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2} = 180^\circ - \beta - \gamma - 90^\circ + \dfrac{2\beta + 2\gamma}{2} = 90^\circ$.

Задача 6. (3 балла)

Сколькими способами можно расставить натуральные числа от 1 до 9 в квадратной таблице 3×3 так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была нечётна? (Числа могут повторяться)

Ответ: $6 \cdot 4^6 \cdot 5^3 + 9 \cdot 4^4 \cdot 5^5 + 5^9$.

Решение:

В каждой строке и каждом столбце таблицы может быть либо одно, либо три нечётных числа. Общее количество нечётных чисел — нечётное число от 3 до 9.

Разберём несколько случаев:

1) Всего три нечётных числа, то есть по одному в каждой строке и каждом столбце. У нас $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов выбрать, где стоят эти числа, 4^6 способов расставить чётные числа и 5^3 способов расставить нечётные.

2) Пять нечётных чисел, т.е. они занимают одну строку и один столбец. $3 \cdot 3 = 9$ способов выбрать эти строку и столбец, 4^4 способов расставить чётные числа и 5^5 способов расставить нечётные.

3) Семи нечётных чисел быть не может, так как это значит, что чётных чисел всего два. Они не могут одновременно находиться в одной строке и одном столбце, а значит, какие-то суммы окажутся чётными.

4) Все числа нечётные, в таком случае 5^9 способов.

Итого $6 \cdot 4^6 \cdot 5^3 + 9 \cdot 4^4 \cdot 5^5 + 5^9$.

Задача 7. (4 балла)

Плоскость пересекает рёбра тетраэдра $ABCD$, выходящие из вершины A, и делит их в отношении $3:1$ (не обязательно от вершины A). Также эта плоскость пересекает прямые BC и CD в точках E и F. Найдите отношение площадей треугольников EFC и BCD.

Ответ: $1:64$ или $81:64$.

Решение:

Обозначим точки пересечения плоскости (назовём её α) с рёбрами AB, AC и AD за B', C' и D' соответственно. Если $AB' : B'B = AC' : C'C$, прямые BC и $B'C'$ параллельны, а значит, плоскость α не пересекается с прямой BC. Аналогичные рассуждения проведём для прямой CD. Значит, $AC' : C'C \neq AB' : B'B = AD' : D'D$.

Возможны два варианта. В первом случае $AC' : C'C = B'B : B'A = 1:3$. По теореме Менелая получаем $\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CC'}{C'A} \cdot \frac{AB'}{B'B} = 1$, откуда $\frac{BE}{EC} = \frac{1}{9}$. При этом точка E оказывается на луче CB за точкой B, откуда $\frac{BC}{CE} = \frac{8}{9}$. Аналогично $\frac{CD}{CF} = \frac{8}{9}$ и отношение площадей равно $81:64$ (т.к. у искомых треугольников равны углы при вершине C).

Во втором случае $AC' : C'C = B'B : B'A = 3:1$. По теореме Менелая получаем $\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CC'}{C'A} \cdot \frac{AB'}{B'B} = 1$, откуда $\frac{BE}{EC} = 9$. При этом точка E оказывается на луче BC за точкой C, откуда $\frac{BC}{CE} = 8$. Аналогично $\frac{CD}{CF} = 8$ и отношение площадей равно $1:64$ (т.к. у искомых треугольников равны углы при вершине C).

Задача 8. (5 баллов)

Мальчик Антон не любит число 2048. Он выписал несколько различных чисел, ни одно из которых не содержит последовательность цифр 2048 (подряд и именно в таком порядке). Докажите, что сумма обратных к этим числам не больше 400000.

Решение:

Количество подходящих $4n+1$-значных чисел не больше, чем $9 \cdot 9999^n$: 9 вариантов для первой цифры и не более 9999 вариантов для каждой следующей четвёрки цифр. Каждое из них не меньше 10^{4n}.

Количество подходящих $4n+2$-значных чисел не больше, чем $90 \cdot 9999^n$. Каждое из них не меньше 10^{4n+1}.

Количество подходящих $4n+3$-значных чисел не больше, чем $900 \cdot 9999^n$. Каждое из них не меньше 10^{4n+2}.

Количество подходящих $4n+4$-значных чисел не больше, чем $8999 \cdot 9999^n$. Каждое из них не меньше 10^{4n+3}.

Пусть количество знаков в самом большом выписанном числе не превосходит $4N+4$. Тогда общая сумма чисел не больше $\sum\limits_{n=0}^{N} \left(\frac{9 \cdot 9999^n}{10000^n} + \frac{90 \cdot 9999^n}{10 \cdot 10000^n} + \frac{900 \cdot 9999^n}{100 \cdot 10000^n} + \frac{8999 \cdot 9999^n}{1000 \cdot 10000^n} \right)$

$= (9+9+9+8,999) \sum\limits_{n=0}^{N} \left(\frac{9999^n}{10000^n} \right) \leqslant 40 \cdot \frac{1}{1-0,9999} = 400000.$

1.2 Задания для 10 класса

1 вариант

Задача 1. (2 балла)

В классе у каждого либо 5, либо 6 друзей (дружба взаимна), причём у любых двух друзей разное количество друзей в класса. Какое наименьшее количество учеников, большее 0 может быть в классе?

Ответ: 11

Решение:

Посмотрим на какого-то человека. Пусть у него пять друзей. Тогда у всех этих пяти человек по шесть друзей. Аналогично есть ещё хотя бы 6 человек с пятью друзьями каждый. Всего 11 человек.

Пример довольно легко построить: две группы из 5 и 6 человек, люди из разных групп дружат между собой, а из одной — нет.

Задача 2. (2 балла)

В положительной непостоянной геометрической прогрессии среднее арифметическое второго, седьмого и девятого членов равно какому-то члену этой прогрессии. Какой минимальный номер у него может быть?

Ответ: 3

Решение:

Второй элемент — либо больший, либо меньший из трёх указанных, значит, он не может быть равен среднему арифетическому всех трёх. Первый элемент тем более не подходят.

Для того, чтобы доказать, что ответ "3" возможен, введём обозначения: пусть $b_n = bq^{n-1}$. Тогда надо решить уравнение $3bq^2 = bq + bq^6 + bq^8$. Упрощая его, получаем $q^7 + q^5 - 3q + 1 = 0$.

У этого уравнения есть корень $q = 1$, но он нам не подходит, так как прогрессия непостоянна. $q^7 + q^5 - 3q + 1 = (q-1)(q^6 + q^5 + 2q^4 + 2q^3 + q^2 + 2q - 1)$. Второй множитель при $q = 0$ отрицателен, а при $q = 1$ положителен, значит, у этого выражения есть корень между нулём и единицей. Таким образом, можно подобрать знаменатель прогрессии и взять любое положительное число в качестве первого члена для ответа 3.

Задача 3. (2 балла)

Может ли число $n^{n^n} - 4n^n + 3$ быть простым при натуральном $n > 2$?

Ответ: Нет.

Решение:

Можно заметить, что указанное число всегда делится на $n-1$. Это легко доказывается через формулу разности степеней или пользуясь тем обстоятельством, что $n \equiv 1 \pmod{n-1}$.

При этом частное тоже больше единицы при $n > 2$.

Задача 4. (2 балла)

Сколько отрицательных чисел среди чисел вида $\operatorname{tg}((15^n)^\circ)$, где n — натуральное число от 1 до 2019?

Ответ: 1009

Решение:

$\operatorname{tg} 15^\circ > 0$.

$15^2 = 225$; $\operatorname{tg} 225^\circ > 0$.

Далее, $225 \cdot 15 = 3375$, это число даёт остаток 135 при делении на 360. $\operatorname{tg} 135^\circ < 0$.

$135 \cdot 15 = 2025$, это число даёт остаток 225 при делении на 360. Дальше последовательность остатков при делении на 360 зацикливается, то есть положительные и отрицательные тангенсы будут чередоваться.

Первое число не входит в этот цикл и оно положительно. Среди остальных чисел отрицательных ровно половина, то есть 1009.

Задача 5. (3 балла)

Высота ромба, проведенная из вершины его тупого угла, делит сторону ромба в отношении 1:3, считая от вершины его острого угла. Какую часть площади ромба составляет площадь вписанного в него круга?

Ответ: $\dfrac{\pi\sqrt{15}}{16}$

Решение:

Задача решается с точностью до подобия, поэтому можно считать, что сторона ромба равна 4. Тогда высота делит её на отрезки 1 и 3.

Высоту ромба можно найти по теореме Пифагора: $\sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$. Эта же высота является диаметром окружности.

Отсюда получаем отношение площадей: $\dfrac{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 \pi}{4\sqrt{15}} = \dfrac{\pi\sqrt{15}}{16}$

Задача 6. (3 балла)

Окружность пересекает все стороны остроугольного треугольника ABC, периметр которого 2. a, b, c — отрезки касательных к этой окружности из вершин A, B и C. Докажите, что $a + b + c \leqslant 1$.

Доказательство:

Из того, что треугольник остроугольный и окружность пересекает его в шести точках, следует, что центр окружности лежит внутри треугольника.

Пусть A' — точка касания касательной, выпущенной из точки A, ближайшей к точке B, O — центр окружности. Пусть X — точка пересечения отрезков AB и OA'. Аналогично B' — точка касания касательной, выпущенной из точки B, ближайшей к точке A, а Y — точка пересечения отрезков AB и OB'. При этом, точки A, X, Y, B находятся на отрезке именно в таком порядке, то есть $AX + YB < AB$.

С другой стороны, треугольник $AA'X$ — прямоугольный с гипотенузой AX, поэтому $AX > AA' = a$. Аналогично $BY > BB' = b$. Отсюда получаем $a + b < AX + BY < AB$.

Аналогично получаем $a + c < AC$ и $b + c < BC$. Таким образом, $a + b + c$ меньше полупериметра треугольника, то есть 1, что и требовалась доказать.

(На самом деле, мы доказали более сильное, строгое неравенство, вместо нестрогого, которое требовалось).

Задача 7. (4 балла)

Можно ли расставить в квадратной таблице 100×100 числа от 0 до 9999 (каждое по одному разу) так, чтобы в каждом квадратике 2×2 сумма чисел была бы одинаковой?

Ответ: Да, можно.

Решение:

Искомая таблица получается как сумма двух таблиц.

Первая таблица выглядит так:

0	99	0	99	0	99	...
0	99	0	99	0	99	...
1	98	1	98	1	98	...
1	98	1	98	1	98	...
2	97	2	97	2	97	...
2	97	2	97	2	97	...
...						
49	50	49	50	49	50	...

В этой таблице любое число, вместе со своим соседним по горизонтали даёт в сумме 99, так что в любом квадрате 2×2 сумма равна 198.

9900	0	9800	100	9700	200	...
0	9900	100	9800	200	9700	...
9900	0	9800	100	9700	200	...
0	9900	100	9800	200	9700	...
9900	0	9800	100	9700	200	...
0	9900	100	9800	200	9700	...
...						

В этой таблице любое число, вместе со своим соседним по вертикали даёт в сумме 9900, так что в любом квадрате 2×2 сумма равна 19800.

При суммировании этих таблиц сумма в каждом квадрате 2×2 будет очевидно составлять 19998.

Осталось понять, что в таблице встретятся все числа.

Рассмотрим расстановку какого-то числа вида $100k$ во второй таблице. Это число расположено в двух соседних столбцах на клетках, которые при шахматной раскраске оказываются одного цвета. При этом в первой таблице в этих двух столбцах встречаются все числа от 0 до 99, причём каждое один раз на чёрной клетке и один раз на белой. Значит, число $100k$ будет просуммировано с каждым числом от 0 до 99 ровно один раз. Таким образом, у нас получатся все числа от $100k$ до $100k + 99$ каждое по разу, а значит, во всей таблице получатся все числа от 0 до 9999.

Задача 8. (5 баллов)

Положительные числа x, y, z таковы, что $xyz = 20$, $x + y + z = 9$. Докажите, что $xy + yz + xz \geqslant 24$.

Доказательство:

Выразим $xy + yz + xz$ через x. Для этого заметим, что $y + z = 9 - x$, а $yz = \dfrac{20}{x}$, откуда

$$xy + yz + xz - 24 = x(9 - x) + \frac{20}{x} - 24 = \frac{-x^3 + 9x^2 - 24x + 20}{x} = -\frac{(x-2)^2(x-5)}{x}.$$

Это выражение при положительных x принимает отрицательные значения только если $x > 5$. То же самое можно заключить про остальные переменные. При этом все три переменные не могут быть быть больше 5, так как тогда их сумма слишком велика.

Таким образом мы доказали, что если хотя бы одна из переменных лежит в промежутке от 0 до 5, сумма попарных произведений не меньше 24, а обратный случай невозможен. (На самом деле, можно убедиться, что все переменные лежат в промежутке от 0 до 5).

2 вариант

Задача 1. (2 балла)

В классе у каждого либо 5, либо 7 друзей (дружба взаимна), причём у любых двух друзей разное количество друзей в класса. Какое наименьшее количество учеников, большее 0 может быть в классе?

Ответ: 12

Решение:

Посмотрим на какого-то человека. Пусть у него пять друзей. Тогда у всех этих пяти человек по семь друзей. Аналогично есть ещё хотя бы 7 человек с пятью друзьями каждый. Всего 12 человек.

Пример довольно легко построить: две группы из 5 и 7 человек, люди из разных групп дружат между собой, а из одной — нет.

Задача 2. (2 балла)

В положительной непостоянной геометрической прогрессии среднее арифметическое третьего, четвёртого и восьмого членов равно какому-то члену этой прогрессии. Какой минимальный номер у него может быть?

Ответ: 4

Решение:

Третий элемент — либо больший, либо меньший из трёх указанных, значит, он не может быть равен среднему арифетическому всех трёх. Первый и второй элементы тем более не подходят.

Для того, чтобы доказать, что ответ "4" возможен, введём обозначения: пусть $b_n = bq^{n-1}$. Тогда надо решить уравнение $3bq^3 = bq^2 + bq^3 + bq^7$. Упрощая его, получаем $q^5 - 2q + 1 = 0$.

У этого уравнения есть корень $q = 1$, но он нам не подходит, так как прогрессия непостоянна. $q^5-2q+1 = (q-1)(q^4+q^3+q^2+q-1)$. Второй множитель при $q = 0$ отрицателен, а при $q = 1$ положителен, значит, у этого выражения есть корень между нулём и единицей. Таким образом, можно подобрать знаменатель прогрессии и взять любое положительное число в качестве первого члена для ответа 4.

Задача 3. (2 балла)

Может ли число $n^{n^n} - 6n^n + 5$ быть простым при натуральном $n > 2$?

Ответ: Нет.

Решение:

Можно заметить, что указанное число всегда делится на $n-1$. Это легко доказывается через формулу разности степеней или пользуясь тем обстоятельством, что $n \equiv 1 \pmod{n-1}$.

При этом частное тоже больше единицы при $n > 2$.

Задача 4. (2 балла)

Сколько положительных чисел среди чисел вида $\operatorname{ctg}((15^n)^\circ)$, где n — натуральное число от 1 до 2019?

Ответ: 1010

Решение:

$\operatorname{ctg} 15^\circ > 0$.

$15^2 = 225$; $\operatorname{ctg} 225^\circ > 0$.

Далее, $225 \cdot 15 = 3375$, это число даёт остаток 135 при делении на 360. $\operatorname{ctg} 135^\circ < 0$.

$135 \cdot 15 = 2025$, это число даёт остаток 225 при делении на 360. Дальше последовательность остатков при делении на 360 зацикливается, то есть положительные и отрицательные котангенсы будут чередоваться.

Первое число не входит в этот цикл и оно положительно. Среди остальных чисел положительных ровно половина, то есть 1009. Значит, ответ 1010.

Задача 5. (3 балла)

Высота ромба, проведенная из вершины его тупого угла, делит сторону ромба в отношении 1:3, считая от вершины его острого угла. Какую часть площади ромба составляет площадь вписанного в него круга?

Ответ: $\dfrac{\pi\sqrt{15}}{16}$

Решение:

Задача решается с точностью до подобия, поэтому можно считать, что сторона ромба равна 4. Тогда высота делит её на отрезки 1 и 3.

Высоту ромба можно найти по теореме Пифагора: $\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$. Эта же высота является диаметром окружности.

Отсюда получаем отношение площадей: $\dfrac{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2\pi}{4\sqrt{15}}=\dfrac{\pi\sqrt{15}}{16}$

Задача 6. (3 балла)

Окружность пересекает все стороны остроугольного треугольника ABC, периметр которого 4. a, b, c — отрезки касательных к этой окружности из вершин A, B и C. Докажите, что $a+b+c\leqslant 2$.

Доказательство:

Из того, что треугольник остроугольный и окружность пересекает его в шести точках, следует, что центр окружности лежит внутри треугольника.

Пусть A' — точка касания касательной, выпущенной из точки A, ближайшей к точке B, O — центр окружности. Пусть X — точка пересечения отрезков AB и OA'. Аналогично B' — точка касания касательной, выпущенной из точки B, ближайшей к точке A, а Y — точка пересечения отрезков AB и OB'. При этом, точки A, X, Y, B находятся на отрезке именно в таком порядке, то есть $AX+YB<AB$.

С другой стороны, треугольник $AA'X$ — прямоугольный с гипотенузой AX, поэтому $AX>AA'=a$. Аналогично $BY>BB'=b$. Отсюда получаем $a+b<AX+BY<AB$.

Аналогично получаем $a+c<AC$ и $b+c<BC$. Таким образом, $a+b+c$ меньше полупериметра треугольника, то есть 2, что и требовалась доказать.

(На самом деле, мы доказали более сильное, строгое неравенство, вместо нестрогого, которое требовалось).

Задача 7. (4 балла)

Можно ли расставить в прямоугольной таблице 100×10 числа от 0 до 999 (каждое по одному разу) так, чтобы в каждом квадратике 2×2 сумма чисел была бы одинаковой?

Ответ: Да, можно.

Решение:

Искомая таблица получается как сумма двух таблиц.

Первая таблица выглядит так:

0	99	0	99	0	99	...
0	99	0	99	0	99	...
1	98	1	98	1	98	...
1	98	1	98	1	98	...
2	97	2	97	2	97	...
2	97	2	97	2	97	...
...						
49	50	49	50	49	50	...

В этой таблице любое число, вместе со своим соседним по горизонтали даёт в сумме 99, так что в любом квадрате 2×2 сумма равна 198.

900	0	800	100	700	200	...
0	900	100	800	200	700	...
900	0	800	100	700	200	...
0	900	100	800	200	700	...
900	0	800	100	700	200	...
0	900	100	800	200	700	...
...						

В этой таблице любое число, вместе со своим соседним по вертикали даёт в сумме 900, так что в любом квадрате 2×2 сумма равна 1800.

При суммировании этих таблиц сумма в каждом квадрате 2×2 будет очевидно составлять 1998.

Осталось понять, что в таблице встретятся все числа.

Рассмотрим расстановку какого-то числа вида $100k$ во второй таблице. Это число расположено в двух соседних столбцах на клетках, которые при шахматной раскраске оказываются одного цвета. При этом в первой таблице в этих двух столбцах встречаются все числа от 0 до 99, причём каждое один раз на чёрной клетке и один раз на белой. Значит, число $100k$ будет просуммировано с каждым числом от 0 до 99 ровно один раз. Таким образом, у нас получатся все числа от $100k$ до $100k + 99$ каждое по разу, а значит, во всей таблице получатся все числа от 0 до 999.

Задача 8. (5 баллов)

Положительные числа x, y, z таковы, что $xyz = 24$, $x + y + z = 10$. Докажите, что $xy + yz + xz \geqslant 28$.

Доказательство:

Выразим $xy+yz+xz$ через x. Для этого заметим, что $y+z = 10-x$, а $yz = \dfrac{24}{x}$, откуда

$$xy + yz + xz - 28 = x(10 - x) + \frac{24}{x} - 28 = \frac{-x^3 + 10x^2 - 28x + 24}{x} = -\frac{(x-2)^2(x-6)}{x}.$$

Это выражение при положительных x принимает отрицательные значения только если $x > 6$. То же самое можно заключить про остальные переменные. При этом все три переменные не могут быть быть больше 6, так как тогда их сумма слишком велика.

Таким образом мы доказали, что если хотя бы одна из переменных лежит в промежутке от 2 до 6, сумма попарных произведений не меньше 28, а обратный случай невозможен. (На самом деле, можно убедиться, что все переменные лежат в промежутке от 2 до 6).

1.3 Задания для 9 класса

1 вариант

Задача 1. (2 балла)

Два приведённых квадратных трёхчлена отличаются перестановкой свободного члена и второго коэффициента. Сумма этих трёхчленов имеет единственный корень. А какое значение эта сумма принимает в единице?

Ответ: 2 или 18.

Решение:

Пусть эти трёхчлены имеют вид x^2+px+q и x^2+qx+p. Тогда их сумма равна $2x^2+(p+q)x+(p+q)$. Дискриминант этого трёхчлена равен $(p+q)^2-8(p+q)$, откуда $p+q=0$ или $p+q=8$. В первом случае сумма равна 2, а во втором 18.

Ясно, что оба значения достигаются.

Задача 2. (2 балла)

Найдите все натуральные n при которых число n^n-4n+3 простое.

Ответ: Таких чисел нет

Решение:

Можно заметить, что указанное число всегда делится на $n-1$. Это легко доказывается через формулу разности степеней или пользуясь тем обстоятельством, что $n\equiv 1 \pmod{n-1}$. При этом частное тоже больше единицы при $n>2$.

Значит, возможные n, при которых получается просто число — это 2 (единица не подходит, так как по из-за делимости на $n-1$ получаем значение 0). При подстановке двойки получаем результат -1, значит, таких n не существует.

Задача 3. (3 балла)

В стране Налогии каждый платит со своей зарплаты столько процентов налога, сколько тысяч тугриков составляет эта зарплата. Какую зарплату иметь выгоднее всего? (Зарплата измеряется положительным, не обязательно целым числом тугриков)

Ответ: 50 000 тугриков

Решение:

Обозначим зарплату за x. Тогда то, что остаётся после вычета налога, это $x-\dfrac{x^2}{100000}$. Это квадратный трёхчлен с отрицательным старшим коэффициетом, он достигает максимума в вершине при $x=50000$.

Задача 4. (3 балла)

В треугольнике ABC проведена медиана BM, в треугольнике ABM — медиана BN, в треугольнике BNC — медиана NK. Оказалось, что $NK\perp BM$. Найдите $AB:AC$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$

Решение:

Обозначим $\vec{b}=\vec{AB}$ и $\vec{a}=\vec{AC}$.

$\vec{NK}=\vec{AK}-\vec{AN}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\dfrac{\vec{a}}{4}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{4}$.

$\vec{BM}=\vec{AM}-\vec{AB}=\dfrac{\vec{a}}{2}-\vec{b}$.

$0=\vec{BM}\cdot\vec{NK}=\dfrac{\vec{a}^2-4\vec{b}^2}{8}$, откуда $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$, то есть $AB:AC=\dfrac{1}{2}$.

Задача 5. (3 балла)

Сколькими способами можно в таблице 2×7 расставить натуральные числа от 1 до 14 (каждое по одному разу), чтобы сумма чисел в каждом из семи стобцов была нечётна?

Ответ: $2^7 \cdot (7!)^2$

Решение:

В каждом столбце стоит одно чётное и одно нечётное число. Где стоит чётное число, а где нечётное, выбирается двумя способами, итого 2^7 способов для всей таблицы. Далее, существует $7!$ способов расставить чётные числа по выбранных для них местам и столько же способов расставить нечётные.

Все эти числа надо перемножить.

Задача 6. (3 балла)

В каждой клетке квадрата 2019×2019 проведены обе диагонали. Существует ли замкнутый маршрут, состоящий из этих диагоналей, не проходящий ни по одной из диагоналей дважды и посещающий при этом все клетки квадрата (то есть, содержащий хотя бы одну диагональ из каждой клетки).

Ответ: Нет

Решение:

Раскрасим вершины всех клеток в два цвета в шахматном порядке. Заметим, что каждая диагональ соединяет две вершины одного цвета. Это значит, что с диагоналей одного цвета нельзя попасть на диагонали другого (маршрут должен состоять из диагоналей, а не из их частей, то есть в середине клетки переходить с диагонали на диагональ нельзя)

Из-за нечётности стороны квадрата его угловые вершины квадрата разного цвета. Кроме того, замкнутый маршрут не может зайти в вершину квадрата, так как потом ему оттуда не выбраться. Следовательно, в угловой клетке, в которой лежит чёрный угол квадрата, маршрут может проходить только по диагонали, соединяющей белые вершины и наоборот. Но эти две диагонали, как сказано выше, не могут оказаться в одном маршруте.

Задача 7. (3 балла)

$ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$. Точка K лежит на продолжении луча BC за точку C, $KL \parallel CD$, $\angle CDL = \angle BAD$. Кроме того, $CD = \sqrt{CK \cdot AD}$. O и M — точки пересечения диагоналей четырёхугольников $ABCD$ и $CKLD$ соответственно. Докажите, что $OM \parallel BC$.

Доказательство:

Заметим, в четырёхугольниках $ABCD$ и $DLKC$ совпадают все четыре угла и отношения двух соответствующих сторон, следовательно, они подобны.

При это точка A соответствует точке D, точка O соответствует точке M, точка K соответствует точке C.

Значит, $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{DM}{MC}$, и, следовательно, по теореме Фалеса прямая OM параллельная основаниям трапеции.

Задача 8. (5 балла)

Для каждой пары чисел $\overline{bab}$ и $\overline{abb}$, где a и b — различные цифры, посчитали НОД этих чисел. Найдите наибольший из этих НОД.

$\overline{abb}$ — стандартное обозначение для числа, состоящего из цифр a, b и b именно в таком порядке.

Ответ: 45

Решение:

45 — это наибольший общий делитель числе 585 и 855.

Заметим, что a и b не равны 0, так как числа не могут начинаться с 0.

Предположим, что есть два числа, для которых этот НОД больше 45. Заметим, что $\overline{bab} - \overline{abb} = 90(b - a)$ делится на это НОД. Делимость на 2 и 5 определяется последней цифрой, то есть b, а она не может быть нулём, так что НОД не может быть одновременно чётным и делящимся на 5.

$|a-b| \leqslant 8$, значит, если НОД не делится на 3, он не может быть больше $2|a-b| \leqslant 16$ или $5|a-b| \leqslant 40$ в зависимости от случая, который мы разбираем.

Значит, чтобы НОД был больше 45, он должен делиться на 3, а, значит, исходные числа делятся на 3.

Чтобы число $\overline{bab}$ делилось на 3, числа a и b должны давать одинаковые остатки при делении на 3. Значит, $|a-b|$ принимает значения 3 или 6 а, следовательно, НОД является делителем числа $540 = 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5$, причём по-прежнему не может содержать одновременно 2 и 5. Если нас интересует НОД, больший 45, он должен делиться на 9, и, более того, на 27. Значит, число $\overline{bab}$ делится на 9. При выполнении этого условия, по признаку делимости на 9, цифра a практически однозначно определяет цифру b.

Таким образом, в качестве $\overline{bab}$ имеет смысл рассмотреть только числа 171, 252, 333, 414, 585, 666, 747, 828, 909 и 999 (некоторые из них не подходят, так как $a \neq b$, в частности, 999). Остальные числа разбиваются на две арифметические прогрессии с разностью 81 каждая. По скольку 81 делится на 27, нам достаточно проверить, что 171 и 585 не делятся на 27 и остальные числа также не будут делиться.

Значит, НОД не делится на 27, и 45 — наибольший вариант.

2 вариант

Задача 1. (2 балла)

Два приведённых квадратных трёхчлена отличаются перестановкой свободного члена и второго коэффициента. Сумма этих трёхчленов имеет единственный корень. А какое значение эта сумма принимает при $x = 2$?

Ответ: 8 или 32.

Решение:

Пусть эти трёхчлены имеют вид $x^2 + px + q$ и $x^2 + qx + p$. Тогда их сумма равна $2x^2 + (p + q)x + (p + q)$. Дискриминант этого трёхчлена равен $(p + q)^2 - 8(p + q)$, откуда $p + q = 0$ или $p + q = 8$. В первом случае сумма равна 8, а во втором 32.

Ясно, что оба значения достигаются.

Задача 2. (2 балла)

Найдите все натуральные n при которых число $n^n - 6n + 5$ простое.

Ответ: Таких чисел нет.

Решение:

Можно заметить, что указанное число всегда делится на $n-1$. Это легко доказывается через формулу разности степеней или пользуясь тем обстоятельством, что $n \equiv 1 \pmod{n-1}$. При этом частное тоже больше единицы при $n > 2$.

Значит, возможные n, при которых получается просто число — это 2 (единица не подходит, так как по из-за делимости на $n-1$ получаем значение 0). При подстановке двойки получаем результат -3, значит, таких n не существует.

Задача 3. (3 балла)

В стране Налогии каждый платит со своей зарплаты столько тысячных частей налога, сколько тугриков составляет эта зарплата. Какую зарплату иметь выгоднее всего?

(Зарплата измеряется положительным, не обязательно целым числом тугриков)

Ответ: 500 тугриков

Решение:

Обозначим зарплату за x. Тогда то, что остаётся после вычета налога, это $x - \dfrac{x^2}{1000}$. Это квадратный трёхчлен с отрицательным старшим коэффицетом, он достигает максимума в вершине при $x = 500$.

Задача 4. (3 балла)

В треугольнике ABC проведена медиана BM, в треугольнике MCB — медиана BN, в треугольнике BNA — медиана NK. Оказалось, что $NK \perp BM$. Найдите $AC : BC$.

Ответ: 2

Решение:

Обозначим $\vec{b} = \vec{CB}$ и $\vec{a} = \vec{CA}$.

$\vec{NK} = \vec{CK} - \vec{CN} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \dfrac{\vec{a}}{4} = \dfrac{\vec{a} + 2\vec{b}}{4}$.

$\vec{BM} = \vec{CM} - \vec{CB} = \dfrac{\vec{a}}{2} - \vec{b}$.

$0 = \vec{BM} \cdot \vec{NK} = \dfrac{\vec{a}^2 - 4\vec{b}^2}{8}$, откуда $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, то есть $AC : BC = 2$.

Задача 5. (3 балла)

Сколькими способами можно в таблице 2×5 расставить натуральные числа от 1 до 10 (каждое по одному разу), чтобы сумма чисел в каждом из пяти стобцов была нечётна?

Ответ: $2^5 \cdot (5!)^2$

Решение:

В каждом столбце стоит одно чётное и одно нечётное число. Где стоит чётное число, а где нечётное, выбирается двумя способами, итого 2^5 способов для всей таблицы. Далее, существует 5! способов расставить чётные числа по выбранных для них местам и столько же способов расставить нечётные.

Все эти числа надо перемножить.

Задача 6. (3 балла)

В каждой клетке квадрата 2017×2017 проведены обе диагонали. Существует ли замкнутый маршрут, состоящий из этих диагоналей, не проходящий ни по одной из диагоналей дважды и посещающий при этом все клетки квадрата (то есть, содержащий хотя бы одну диагональ из каждой клетки).

Ответ: Нет

Решение:

Раскрасим вершины всех клеток в два цвета в шахматном порядке. Заметим, что каждая диагональ соединяет две вершины одного цвета. Это значит, что с диагоналей одного цвета нельзя попасть на диагонали другого (маршрут должен состоять из диагоналей, а не из их частей, то есть в середине клетки переходить с диагонали на диагональ нельзя)

Из-за нечётности стороны квадрата его угловые вершины квадрата разного цвета. Кроме того, замкнутый маршрут не может зайти в вершину квадрата, так как потом ему оттуда не выбраться. Следовательно, в угловой клетке, в которой лежит чёрный угол квадрата, маршрут может проходить только по диагонали, соединяющей белые вершины и наоборот. Но эти две диагонали, как сказано выше, не могут оказаться в одном маршруте.

Задача 7. (3 балла)

$ABCD$ — трапеция, $AB \parallel CD$. Точка K лежит на продолжении луча AB за точку B, $KL \parallel BC$, $\angle BCL = \angle ADC$. Кроме того, $BC = \sqrt{BK \cdot CD}$. O и X — точки пересечения диагоналей четырёхугольников $ABCD$ и $KLCB$ соответственно. Докажите, что $OX \parallel AB$.

Доказательство:

Заметим, в четырёхугольниках $ABCD$ и $LKBC$ совпадают все четыре угла и отношения двух соответствующих сторон, следовательно, они подобны.

При это точка D соответствует точке C, точка O соответствует точке M, точка K соответствует точке B.

Значит, $\dfrac{DO}{OK} = \dfrac{CM}{MB}$, и, следовательно, по теореме Фалеса прямая OM параллельная основаниям трапеции.

Задача 8. (5 баллов)

Для каждой пары чисел $\overline{aab}$ и $\overline{aba}$, где a и b — различные цифры, посчитали НОД этих чисел. Найдите наибольший из этих НОД.

$\overline{aab}$ — стандартное обозначение для числа, состоящего из цифр a, a и b именно в таком порядке.

Ответ: 18

Решение:

18 — это наибольший общий делитель числе 828 и 882.

Предположим, что есть два числа, для которых этот НОД больше 18. Заметим, что $\overline{aab} - \overline{aba} = 9(a-b)$ делится на это НОД. $|a-b| \leqslant 9$ так что, чтобы НОД был больше 9, он должен содержать множители как из числа 9, так и из $a-b$. В частности, чтобы НОД был больше 9, он должен делиться на 3, а, значит, исходные числа делятся на 3.

Чтобы число $\overline{aab}$ делилось на 3, числа a и b должны давать одинаковые остатки при делении на 3. Значит, $|a-b|$ принимает значения 3, 6 или 9, а, следовательно, НОД является делителем 27, 54 или 81. Если нас интересует НОД, больший 18, он должен делиться на 9, и, более того, на 27. Значит, число $\overline{aab}$ делится на 9. При выполнении этого условия, по признаку делимости на 9, цифра a практически однозначно определяет цифру b.

Таким образом, в качестве $\overline{aab}$ имеет смысл рассмотреть только числа 117, 225, 333, 441, 558, 666, 774, 882, 990 и 999 (некоторые из них не подходят, так как $a \neq b$, в частности, 999. Остальные числа разбиваются на две арифметические прогрессии с разностью 108 каждая). По скольку 108 делится на 27, нам достаточно проверить, что 117 и 558 не делятся на 27 и остальные числа также не будут делиться.

Значит, НОД не делится на 27. Таким образом 18 — наибольший вариант.

1.4 Задания для 8 класса

1 вариант

Задача 1. (1 балл)

Найдите наибольшее трёхзначное число АБВ, которое делится на двузначные числа АБ и БВ. (Разные буквы не обязательно обозначают разные цифры)

Ответ: 990

Решение:

Число 990, очевидно, подходит. Большего ответа не может быть, так как все трёхзначные числа, большие 990, не делятся на 99: следующее делящееся на 99 число это 1089.

Задача 2. (2 балла)

Существует ли прямоугольный треугольник, площадь которого численно равна удвоенной гипотенузе?

Ответ: Да

Решение:

Таких треугольников довольно много. Докажем, что существует равнобедренный. Составим уравнение, обозначив его сторону за a:

$$\frac{a^2}{2} = 2\sqrt{2}a$$

Оно, очевидно, имеет решение $a = 4\sqrt{2}$.

Задача 3. (2 балла)

Какое наибольшее количество различных приведённых квадратных уравнений может быть выписано на доске, если известно, что любые два из них имеют общий корень, а никакие четыре не имеют корня, общего для всех.

Ответ: 3

Решение:

Рассмотрим три таких уравнения. Возможны два случая:

1) Эти уравнения имеют общий корень a. Тогда они могут быть представлены в виде $(x-a)(x-b) = 0$, $(x-a)(x-c) = 0$ и $(x-a)(x-d) = 0$, где b, c и d — их оставшиеся корни (они не равны друг другу, иначе уравнения совпадают; одно из этих чисел может совпадать с a, это не важно).

Четвёртое уравнение не может иметь корня a; тогда оно должно иметь корни b, c и d одновременно, то есть оно не квадратное.

Получаем противоречие.

2) Уравнения не имеют общего корня. Тогда их можно представить как $(x-a)(x-b) = 0$, $(x-a)(x-c) = 0$ и $(x-b)(x-c) = 0$. В это случае четвёртое уравнение может иметь только один из корней a, b и c, иначе оно совпадает с одним из ранее описанных.

Если оно имеет корень, например, a, то у него не может быть общего корня с $(x-b)(x-c) = 0$. Снова получаем противоречие.

Значит, больше трёх различных уравнений быть не может.

Пример легко построить для первого случая, взяв произвольные числа a, b, c, d.

Задача 4. (3 балла)

В каждой клетке квадрата 2018×2018 проведены обе диагонали. Существует ли замкнутый маршрут, состоящий из этих диагоналей, не проходящий ни по одной из диагоналей дважды и посещающий при этом все клетки квадрата (то есть, содержащий хотя бы одну диагональ из каждой клетки).

Ответ: Да, можно.

Решение:

Начнём путь с левого верхнего угла. Пересечём левую верхнюю клетку из её левого нижнего в правый верхний угол и продолжим движение по диагоналям направо до крайней правой клетки в верхнем ряду. Из-за чётности длины квадрата мы окажемся в правом нижнем углу этой клетки, поэтому мы сможем перейти во второй ряд.

Теперь по клеткам второго ряда будем двигаться до второй клетки слева. Из неё мы сможем повернуть в третий сверху ряд и снова пойти направо.

Таким образом мы по очереди пройдём все ряды: нечётные слева направо, чётные справа налево, после чего надо будет пройти первую колонку и вернуться в исходную точку.

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ на основании AD взята точка X такая, что отрезки XB и XC делят трапецию на три подобных друг другу, но попарно не равных, неравнобедренных треугольника. Боковая сторона AB имеет длину 6. Найдите $AX \cdot DX$.

Ответ: 36

Решение:

Треугольники неравнобедренные, то есть все углы у них различны.

$\alpha = \angle BXA = \angle XBC \neq \angle BXC = \beta$. Угол $\angle CXD$ в сумме с этими углами даёт $180°$, значит, это третий угол треугольника, он не может быть равен ни α, ни β.

Если $\angle ABX = \beta$, мы получаем в треугольниках ABX и CBX равные углы вокруг общей стороны, то есть эти треугольники равны. Это противоречит условию, значит, $\angle ABX = \gamma$, и, соответственно, $\angle BAD = \beta$.

Аналогично получаем $\angle XCD = \alpha$ и $\angle XDC = \beta$, откуда трапеция равнобедренная.

Запишем теперь соотношение сторон в подобных треугольниках ABX и CDX:

$$\frac{DX}{CD} = \frac{AB}{AX},$$

откуда $DX \cdot AX = AB \cdot CD = 36$.

Задача 6. (4 балла)

Решите уравнение $abcdef = a + b + c + d + e + f$ в натуральных числах.

Ответ: $(1, 1, 1, 1, 2, 6)$ в любом порядке

Решение:

Обозначим наибольшее число за a. Общая сумма чисел не превосходит $6a$.

Предположим, в нашем наборе меньше трёх единиц. Тогда общее произведение хотя бы $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a = 8a > 6a$. Получаем противоречие.

Значит, в наборе хотя бы три единицы и сумма уже строго меньше $6a$.

Таким образом, осталось разобрать случаи: $(1, 1, 1, 1, 2, a)$; $(1, 1, 1, 1, 3, a)$; $(1, 1, 1, 2, 2, a)$; $(1, 1, 1, 1, 4, a)$; $(1, 1, 1, 1, 5, a)$.

Для этого надо решить уравнения $2a = a + 6$; $3a = a + 7$; $4a = a + 7$; $4a = a + 8$ и $5a = a + 9$. Легко убедиться, что решения имеет только первое уравнение при $a = 6$.

Задача 7. (4 балла)

$OABC$ — прямоугольник на декартовой плоскости, со сторонами, параллельными осям координат. Точка O — начало координат, а точка B имеет координаты $(11; 8)$. Внутри прямоугольника взята точка X с целыми координатами. Какое наименьшее значение может принимать площадь треугольника OBX?

Ответ: $\dfrac{1}{2}$

Решение:

Поскольку картинка симметричная относительно центра прямоугольника, достаточно разобрать случай, когда точка X лежит ниже диагонали OB. Пусть Y и Z — проекции X на ось абсцисс и отрезок BC (здесь $C(11;0)$).

Тогда $S_{OBX} = S_{OABC} - S_{OAB} - S_{OXY} - S_{BXZ} - S_{XYCZ}$. Всё это — площади прямоугольников и прямоугольных треугольников, стороны и, соответственно, катеты которых параллельны осям координат, поэтому их площади целые или полуцелых. Следовательно, S_{OBX} тоже целая или полуцелая, то есть минимум $\frac{1}{2}$.

Число $\frac{1}{2}$ получается, если взять, например, точку $X(7;5)$.

$S_{OBX} = 88 - 44 - \frac{35}{2} - 20 - 6 = \frac{1}{2}$.

Вообще говоря, три точки на одной прямой не образуют треугольника, поэтому вырожденные треугольники площади 0 можно не рассматривать. Однако в этой задаче это неважно, так как точек внутри отрезка OB всё равно нет.

Задача 8. (4 балла)

Дана клетчатая доска 7×7, длина стороны каждой клетки которой один сантиметр. Шахматная фигура Пифагор, стоящая на клетке A бьёт клетку B, если расстояние между центрами клеток A и B составляет пять сантиметров. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга Пифагоров можно расставить на доске?

Ответ: 25.

Решение:

Заметим, что при шахматной раскраске доски Пифагор бьёт только клетки цвета, противоположного цвету клетки, на которой стоит он сам.

Пример: покрасим доску в шахматном порядке, и расставим Пифагоров на клетках того цвета, которого оказалось больше.

Оценка: разметим поле следующим образом:

A	B	C	D	E	F	G
H	I	J	K	L	M	N
O	P	Q	R	S	O	P
T	U	G		V	T	U
W	X	N	A	H	W	X
S	B	C	D	E	F	Q
V	I	J	K	L	M	R

На каждой паре клеток, помеченной одинаковыми буквами, может стоять максимум один Пифагор. Плюс ещё один может стоять в центральной клетке.

2 вариант

Задача 1. (2 балла)

Найдите наименьшее трёхзначное число АБВ, которое делится на числа АБ и БВ (цифра А не может быть равна 0, а цифра Б — может быть; разные буквы не обязательно обозначают разные цифры)

Ответ: 110

Решение:

Число 110, очевидно, подходит. Меньшего ответа не может быть, так как все трёхзначные числа, меньшие 110, начинаются на 10. При этом они не делятся на 10, кроме 100, а 100 не делится на 0.

Задача 2. (2 балла)

Существует ли прямоугольный треугольник, площадь которого численно равна утроенной гипотенузе?

Ответ: Да

Решение:

Таких треугольников довольно много. Докажем, что существует равнобедренный. Составим уравнение, обозначив его сторону за a:

$$\frac{a^2}{2} = 3\sqrt{2}a$$

Оно, очевидно, имеет решение $a = 6\sqrt{2}$.

Задача 3. (2 балла)

Какое наибольшее количество различных приведённых квадратных уравнений может быть выписано на доске, если известно, что любые два из них имеют общий корень, а никакие пять не имеют корня, общего для всех.

Ответ: 4

Решение:

Рассмотрим 4 таких уравнения. Возможны два случая:

1) Эти уравнения имеют общий корень a. Тогда они могут быть представлены в виде $(x-a)(x-b) = 0$, $(x-a)(x-c) = 0$, $(x-a)(x-d) = 0$ и $(x-a)(x-e) = 0$, где b, c, d и e — их оставшиеся корни (они не равны друг другу, иначе уравнения совпадают; одно из этих чисел может совпадать с a, это не важно).

Пятое уравнение не может иметь корня a; тогда оно должно иметь корни b, c, d и e одновременно, то есть оно не квадратное. Получаем противоречие.

2) Уравнения не имеют общего корня. Тогда три из них можно представить как $(x-a)(x-b) = 0$, $(x-a)(x-c) = 0$ и $(x-b)(x-c) = 0$. В это случае четвёртое уравнение может иметь только один из корней a, b и c, иначе оно совпадает с одним из ранее описанных.

Если оно имеет корень, например, a, то у него не может быть общего корня с $(x-b)(x-c) = 0$. Снова получаем противоречие. Поэтому в этом случае даже больше трёх различных уравнений быть не может.

Пример легко построить в для первого случая, взяв произвольные числа a, b, c, d и e

Задача 4. (3 балла)

В каждой клетке квадрата 2020×2020 проведены обе диагонали. Существует ли замкнутый маршрут, состоящий из этих диагоналей, не проходящий ни по одной из диагоналей дважды и посещающий при этом все клетки квадрата (то есть, содержащий хотя бы одну диагональ из каждой клетки).

Ответ: Да, можно.

Решение:

Начнём путь с левого верхнего угла. Пересечём левую верхнюю клетку из её левого нижнего в правый верхний угол и продолжим движение по диагоналям направо до крайней правой клетки в верхнем ряду. Из-за чётности длины квадрата мы окажемся в правом нижнем углу этой клетки, поэтому мы сможем перейти во второй ряд.

Теперь по клеткам второго ряда будем двигаться до второй клетки слева. Из неё мы сможем повернуть в третий сверху ряд и снова пойти направо.

Таким образом мы по очереди пройдём все ряды: нечётные слева направо, чётные справа налево, после чего надо будет пройти первую колонку и вернуться в исходную точку.

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ на основании BC взята точка X такая, что отрезки XA и XD делят трапецию на три подобных друг другу, но попарно не равных, неравнобедренных треугольника. Боковая сторона AB имеет длину 5. Найдите $XC \cdot BX$.

Ответ: 25

Решение:

Треугольники неравнобедренные, то есть все углы у них различны.

$\alpha = \angle BXA = \angle XAD \neq \angle AXD = \beta$. Угол $\angle CXD$ в сумме с этими углами даёт $180°$, значит, это третий угол треугольника, он не может быть равен ни α, ни β.

Если $\angle BAX = \beta$, мы получаем в треугольниках BAX и DAX равные углы вокруг общей стороны, то есть эти треугольники равны. Это противоречит условию, значит, $\angle BAX = \gamma$, и, соответственно, $\angle ABC = \beta$.

Аналогично получаем $\angle XDC = \alpha$ и $\angle XCD = \beta$, откуда трапеция равнобедренная.

Запишем теперь соотношение сторон в подобных треугольниках ABX и CDX:

$$\frac{XC}{CD} = \frac{AB}{BX},$$

откуда $XC \cdot BX = AB \cdot CD = 25$.

Задача 6. (3 балла)

Решите уравнение $abcdefg = a + b + c + d + e + f + g$ в натуральных числах.

Ответ: $(1, 1, 1, 1, 1, 2, 7)$ и $(1, 1, 1, 1, 1, 3, 4)$. в любом порядке

Решение:

Обозначим наибольшее число за a. Общая сумма чисел не превосходит $7a$.

Предположим, в нашем наборе меньше четырёх единиц. Тогда общее произведение хотя бы $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a = 8a > 7a$. Получаем противоречие.

Значит, в наборе хотя бы четыре единицы и сумма уже строго меньше $7a$.

Таким образом, осталось разобрать случаи: $(1, 1, 1, 1, 1, 2, a)$; $(1, 1, 1, 1, 1, 3, a)$; $(1, 1, 1, 1, 2, 2, a)$; $(1, 1, 1, 1, 1, 4, a)$; $(1, 1, 1, 1, 1, 5, a)$; $(1, 1, 1, 1, 2, 3, a)$; $(1, 1, 1, 1, 1, 6, a)$.

Для этого надо решить уравнения $2a = a + 7$; $3a = a + 8$; $4a = a + 8$; $4a = a + 9$, $5a = a + 10$, $6a = a + 9$ и $6a = a + 11$. Легко убедиться, что решения имеют только первое уравнение при $a = 7$, второе при $a = 4$ и четвёртое при $a = 3$, что даёт нам два набора: $(1, 1, 1, 1, 1, 2, 7)$ и $(1, 1, 1, 1, 1, 3, 4)$.

Задача 7. (4 балла)

$OABC$ — прямоугольник на декартовой плоскости, со сторонами, параллельными осям координат. Точка O — начало координат, а точка B имеет координаты $(9; 8)$. Внутри прямоугольника взята точка X с целыми координатами. Какое наименьшее значение может принимать площадь треугольника OBX?

Ответ: $\dfrac{1}{2}$

Решение:

Поскольку картинка симметричная относительно центра прямоугольника, достаточно разобрать случай, когда точка X лежит ниже диагонали OB. Пусть Y и Z — проекции X на ось абсцисс и отрезок BC (здесь $C(9;0)$).

Тогда $S_{OBX} = S_{OABC} - S_{OAB} - S_{OXY} - S_{BXZ} - S_{XYCZ}$. Всё это — площади прямоугольников и прямоугольных треугольников, стороны и, соответственно, катеты которых параллельны осям координат, поэтому их площади целые или полуцелых. Следовательно, S_{OBX} тоже целая или полуцелая, то есть минимум $\frac{1}{2}$.

Число $\frac{1}{2}$ получается, если взять, например, точку $X(8;7)$.

$S_{OBX} = 72 - 36 - 28 - \frac{1}{2} - 7 = \frac{1}{2}$.

Вообще говоря, три точки на одной прямой не образуют треугольника, поэтому вырожденные треугольники площади 0 можно не рассматривать. Однако в этой задаче это неважно, так как точек внутри отрезка OB всё равно нет.

Задача 8. (4 балла)

Дана клетчатая доска 8×8, длина стороны каждой клетки которой один сантиметр. Шахматная фигура Пифагор, стоящая на клетке A бьёт клетку B, если расстояние между центрами клеток A и B составляет пять сантиметров. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга Пифагоров можно расставить на доске?

Ответ: 32

Решение:

Заметим, что при шахматной раскраске доски Пифагор бьёт только клетки цвета, противоположного цвету клетки, на которой стоит он сам.

Пример: покрасим доску в шахматном порядке, и расставим Пифагоров на клетках того цвета, которого оказалось больше.

Оценка: разметим поле следующим образом:

1	2	3	4	5	6	7	8
A	B	C	D	E	F	G	H
I	J	K	L	M	O	P	Q
R	S	T	U	V	W	X	Z
5	6	7	8	1	2	3	4
E	F	G	H	A	B	C	D
M	O	P	Q	I	J	K	L
V	W	X	Z	R	S	T	U

На каждой паре клеток, помеченной одинаковыми символами, может стоять максимум один Пифагор.

1.5 Задания для 7 класса

1 вариант

Задача 1. (2 балла)

Существуют ли такие два натуральных числа x и y, имеющие одинаковое количество натуральных делителей, что $x > y$, а сумма всех делителей x (включая единицу и само число) меньше суммы натуральных делителей y (включая единицу и само число)?

Ответ: Да

Решение:

Например, числа 38 и 39: $1 + 2 + 19 + 38 = 60 > 56 = 1 + 3 + 13 + 39$.

Задача 2. (2 балла)

Рыцари и лжецы сыграли в “испорченный телефон” по следующим правилам: первый в цепочке называет какое-то число на ушко второму, второй — третьему и так далее. Последний в цепочке озвучивает число вслух. При этом рыцарь называет то же самое число, которое ему сказали, а лжец добавляет или вычитает единицу.

Первый человек (лжец) назвал своему соседу число 7. Последний человек озвучил число 3.

После этого участники сыграли в эту игру ещё раз, однако сооообщали друг друг числа по цепочке в обратную сторону. Последний человек назвал своему соседу число 5, а первый в конце игры озвучил число 2.

Кем был последний человек в цепочке?

Ответ: Рыцарь

Решение:

В первой игре число не меняет чётность, значит, количество лжецов в цепочке со 2 по последнего чётно.

Из результата второй игры получаем, что количество лжецов в цепочек от предпоследнего к первому нечётно.

Это значит, что первый и последний люди разного типа, то есть последний — рыцарь.

Задача 3. (2 балла)

У Васи была коллекция покемонов. В феврале цены на всех покемонов упали на 10%. Затем в марте покемоны снова подорожали, каждый по-своему, и общая стоимость Васиной коллекции стала такой же, как в концея января. При этом состав коллекции не менялся. Докажите, что какой-то покемон подорожал больше, чем на 11%.

Доказательство:

Пусть все цены поднялись не более чем на 11%, мы получаем, что в итоге стоимость коллекции составила не более, чем $0,9 \cdot 1,11 = 99,9\%$ от изначальной её стоимости.

Задача 4. (3 балла)

Придумайте два различных набора из восьми натуральных чисел каждый, такие что сумма чисел в каждом наборе равна их произведению.

Для разных наборов сумма и произведение могут быть разными. Числа в наборах могут повторяться.

Ответ: $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 8)$ и $(1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3$ с точностью до порядка

Задача 5. (3 балла)

Из натурального числа вычли его наибольшую цифру. Затем из получившегося числа также вычли его наибольшую цифру, и т.д. После шести таких операций получилось число 100. Какое число могло быть написано изначально? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 130, 131, 132

Решение:

Для чисел от 101 до 139 покажем, к какое из чисел оно переходит. В третьем столбце указано, за сколько операций получается 100.

$10x, x > 0$	100	1
110	109	2
$11x, x > 0$	110	3
120	118	4
121	119	4
$12x, x > 1$	120	5
130	127	6
131	128	6
132	129	6

Из всех остальных чисел в результате первой операции получается не меньше 130, значит, 100 получается больше, чем за 6 операций, если вообще получается.

Задача 6. (3 балла)

В четырёхугольнике $ABCD$ на стороне AD взята точка X такая, что отрезки XB и XC делят четырёхугольник на три равных неравнобедренных треугольника. Докажите, что точка X — середина стороны или один из углов треугольника равен $60°$

В этой задаче можно пользоваться тем, что сумма углов треугольника составляет $180°$

Доказательство:

Пусть ни один из углов не равен $60°$. Тогда три одинаковых угла не могут сходиться в точке X. Два одинаковых и третий не равный им тоже не могут, поскольку умма углов треугольника составляет $180°$, поэтому в точке X сходятся три разных угла равных треугольников.

BX — общая сторона двух равных треугольников, значит, она лежит между одинаковыми парами углов, отсюда $\angle ABX = \angle BXC$. Аналогично $\angle DCX = \angle BXC$.

Отрезки AX и DX лежат в равных треугольниках напротив равных углов, поэтому они равны и X — середина AD.

Задача 7. (4 балла)

Внутри семиугольника $ABCDEF$ отметили точку O. Её соединили отрезками со всеми вершинами шестиугольника, разбив его таким образом на семь треугольников. Все эти треугольники оказались прямоугольными. Докажите, что в одном из этих треугольников прямой угол лежит при вершине O.

Доказательство:

Угол семиугольника не может быть равен $180°$, поэтому в одной вершине семиугольника не могут сходиться в одной вершине шестиугольника.

Значит, если нет ни одного прямого угла при вершине O, то в каждой вершине семиугольника сходятся прямой угол одного треугольник и острый угол другого. Таким образом, каждый отрезок, соедяющий точку O с вершиной семиугольника, является катетом одного прямоугольного треугольника и гипотенузой соседнего.

Гипотенуза больше катета, так как лежит напротив большего угла. Получается, либо каждый такой отрезок больше следующего по часовой стрелке, либо, наоборот, каждый меньше следующего. Это невозможно, поскольку таким образом можно доказать, что каждый отрезок строго больше себя самого.

Полученное противоречие доказывает задачу.

Задача 8. (5 баллов)

Фигура недослон бьёт на одну клетку по диагонали. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга недослонов можно расставить на шахматной доске 7×7?

Ответ: 28

Решение:

Рассмотрим все диагонали одного направления. На каждой диагонали чётной длины не более половины клеток может быть заняты недослонами, так как она разбивается на пары клеток, которые не могут быть одновременно заняты.

На каждой диагонали нечётной длины $2n+1$ недослонов может быть не более $n+1$ по тем же причинам.

Нечётных диагоналей всего 7, поэтому наибольшее возможное количество недослонов это $\dfrac{49-7}{2}+7=28$.

Пример можно построить, поставив недослонов во все клетки строк с нечётными номерами.

2 вариант

Задача 1. (2 балла)

Существуют ли такие два натуральных числа x и y, имеющие одинаковое количество натуральных делителей, что $x < y$, а сумма всех делителей x (включая единицу и само число) больше суммы натуральных делителей y (включая единицу и само число)?

Ответ: Да

Решение:

Например, числа 38 и 39: $1 + 2 + 19 + 38 = 60 > 56 = 1 + 3 + 13 + 39$.

Задача 2. (2 балла)

Рыцари и лжецы сыграли в "испорченный телефон" по следующим правилам: первый в цепочке называет какое-то число на ушко второму, второй — третьему и так далее. Последний в цепочке озвучивает число вслух. При этом рыцарь называет то же самое число, которое ему сказали, а лжец добавляет или вычитает единицу.

Первый человек (рыцарь) назвал своему соседу число 10. Последний человек озвучил число 13.

После этого участники сыграли в эту игру ещё раз, однако сооoбщали друг друг числа по цепочке в обратную сторону. Последний человек назвал своему соседу число 12, а первый в конце игры озвучил число 9.

Кем был последний человек в цепочке?

Ответ: Рыцарь

Решение:

В первой игре число не меняет чётность, значит, количество лжецов в цепочке со 2 по последнего нечётно.

Из результата второй игры получаем, что количество лжецов в цепочек от предпоследнего к первому также нечётно.

Это значит, что первый и последний люди одного типа, то есть последний — также рыцарь.

Задача 3. (2 балла)

У Васи была коллекция покемонов. В феврале цены на всех покемонов упали на 30%. Затем в марте покемоны снова подорожали, каждый по-своему, и общая стоимость Васиной коллекции стала такой же, как в концея января. При этом состав коллекции не менялся. Докажите, что какой-то покемон подорожал больше, чем на 40%.

Доказательство:

Пусть все цены поднялись не более чем на 40%, мы получаем, что в итоге стоимость коллекции составила не более, чем $0,7 \cdot 1,4 = 98\%$ от изначальной её стоимости.

Задача 4. (3 балла)

Придумайте два различных набора из пяти натуральных чисел каждый, такие что сумма чисел в каждом наборе равна их произведению.

Для разных наборов сумма и произведение могут быть разными. Числа в наборах могут повторяться.

Ответ: $(1, 1, 1, 2, 5)$ и $(1, 1, 2, 2, 2)$ с точностью до порядка

Задача 5. (3 балла)

Из натурального числа вычли его наибольшую цифру. Затем из получившегося числа также вычли его наибольшую цифру, и т.д. После пяти таких операций получилось число 200. Какое число могло быть написано изначально? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ: Все числа от 222 до 229

Решение:

Для чисел от 201 до 139 покажем, к какое из чисел оно переходит. В третьем столбце указано, за сколько операций получается 100.

201	199	–
$20x, x > 1$	200	1
210	108	2
211	109	2
$21x, x > 1$	210	3
220	218	4
221	219	4
$22x, x > 1$	220	5

Из всех последующих чисел в результате первой операции получается не меньше 220, значит, 100 получается больше, чем за 5 операций, если вообще получается.

Задача 6. (3 балла)

В четырёхугольнике $ABCD$ на стороне BC взята точка X такая, что отрезки XA и XD делят четырёхугольник на три равных неравнобедренных треугольника. Докажите, что точка X — середина стороны или один из углов треугольника равен $60°$

В этой задаче можно пользоваться тем, что сумма углов треугольника составляет $180°$

Доказательство:

Пусть ни один из углов не равен $60°$. Тогда три одинаковых угла не могут сходиться в точке X. Два одинаковых и третий не равный им тоже не могут, поскольку умма углов треугольника составляет $180°$, поэтому в точке X сходятся три разных угла равных треугольников.

AX — общая сторона двух равных треугольников, значит, она лежит между одинаковыми парами углов, отсюда $\angle BAX = \angle AXD$. Аналогично $\angle CDX = \angle AXD$.

Отрезки BX и CX лежат в равных треугольниках напротив равных углов, поэтому они равны и X — середина BC.

Задача 7. (4 балла)

Внутри шестиугольника $ABCDEF$ отметили точку O. Её соединили отрезками со всеми вершинами шестиугольника, разбив его таким образом на шесть треугольников. Все эти треугольники оказались прямоугольными. Докажите, что в одном из этих треугольников прямой угол лежит при вершине O.

Доказательство:

Угол шестиугольника не может быть равен $180°$, поэтому в одной вершине шестиугольника не могут сходиться в одной вершине шестиугольника.

Значит, если нет ни одного прямого угла при вершине O, то в каждой вершине шестиугольника сходятся прямой угол одного треугольник и острый угол другого. Таким образом, каждый отрезок, соедяющий точку O с вершиной шестиугольника, является катетом одного прямоугольного треугольника и гипотенузой соседнего.

Гипотенуза больше катета. Получается, либо каждый такой отрезок больше следующего по часовой стрелке, либо, наоборот, каждый меньше следующего. Это невозможно, поскольку таким образом можно доказать, что каждый отрезок строго больше себя самого.

Полученное противоречие доказывает задачу.

Задача 8. (5 баллов)

Фигура недослон бьёт на одну клетку по диагонали. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга недослонов можно расставить на шахматной доске 9×9?

Ответ: 45

Решение:

Рассмотрим все диагонали одного направления. На каждой диагонали чётной длины не более половины клеток может быть заняты недослонами, так как она разбивается на пары клеток, которые не могут быть одновременно заняты.

На каждой диагонали нечётной длины $2n + 1$ недослонов может быть не более $n + 1$ по тем же причинам.

Нечётных диагоналей всего 9, поэтому наибольшее возможное количество недослонов это $\dfrac{81 - 9}{2} + 9 = 45$.

Пример можно построить, поставив недослонов во все клетки строк с нечётными номерами.

1.6 Критерии оценивания решений задач заключительного этапа

11 класс

1. (2 балла)

Только ответ “Нет” — *0 баллов.*

Утверждение о том, что делящееся на p (т.е. на 13, 11, 7 или 17, в зависимости от варианта) число единственно и обозначение его за отдельную букву — *0,5 балла.*

Вывод того, что (в обозначениях авторского решения) yz или $2y^2$ делится на p (без указания на противоречие или то, что из этого немедленно следует решение задачи — маловероятно, но вдруг участник запутается). — *ещё 1 балл, т.е. всего 1,5 балла.*

Несущественные алгебраические продвижения, например, доказательство того, что $y+z$ делится на p не оцениваются.

2. (2 балла)

Только ответ “Да” — *0 баллов.*

Пример участника не обязан совпадать с примером из авторского решения.

Пример без пояснений (например, без указания, какие именно корни у многочлена и производной или почему они положительны/отрицательны) — *не более 1 балла.*

Решения с верным примером и недостаточно подробными пояснениями могут быть оценены в *1 или 1,5 балла*, однако не стоит слишком придираться: если участник утверждает, что, многочлен имеет такой-то корень и это действительно очевидно, снимать за это не надо.

3. (3 балла)

Сформулирована и доказана рекуррентная формула — *1 балл.*

Только ответ без обоснования — *0,5 балла.*

В целях обеспечения равноценности вариантов, в случаях где a_1 не укладывается в общую формулу, не снимать баллы за отсутствие упоминания об этом в ответе.

4. (3 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

В решении не показано, что оба значения достигаются — *снимать 1 балл.*

Потерян один из ответов — *снимать 1 балл.*

За арифметические ошибки, несущественно влияющие на ход решения, *снимать 0,5 балла* за одну ошибку, *снимать 1 балл* за две ошибки или более.

5. (3 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

Идея дополнительного построения, аналогичного точке F в авторском решении — *0,5 балла.*

Выписаны все или почти всего углы, равные α, β, γ — *ещё 0,5 балла.*

Получено равенство $\alpha = 2\beta + \gamma$ — *ещё 0,5 балла.*

6. (3 балла)

Вычислять ответ не требуется, достаточно правильной формулы со степенями.

Утверждение о том, что общее количество N чётных/нечётных чисел (в зависимости от варианта) нечётно или что оно нечётно в каждой строке само по себе не оценивается.

Баллы за авторское решение складываются из шести частей по *0,5 балла* каждая

1) Утверждение о том, что $N > 1$ и нечётно
2) Доказано, что $N \neq 7$
3) Разобран случай $N = 9$, посчитано количество вариантов.
4) Верно описано расположение чётных/нечётных чисел при $N = 5$
5) Верно описано расположение чётных/нечётных чисел при $N = 3$
6) Верно записаны формулы для количества способов при $N = 3$ и $N = 5$.

Только ответ — *0 баллов.*

7. (4 балла)

Разобраны оба случая, не объяснено, почему других нет — *3 балла*

Разобран один случай, не объяснено, почему других нет — *1,5 балла*

Разобран один случай, с обоснованием, из-за ошибки в котором потерян второй случай — *2 балла*

За несущественные арифметические ошибки, приведшие к искажению 1 ответа *снимать 0,5 балла*

За арифметические ошибки, приведшие к искажению обоих ответов (в случае, если разбирались оба случая) *снимать не менее 1 балла*

Только ответ — *0 баллов.*

8. (5 баллов)

За несущественные арифметические ошибки *снимать 1 балл*

Заметим, что оценка не точная, поэтому участник имеет возможность немного “загрубить” неравенство.

10 класс

1. (2 балла)

Оценка — *1 балл.*

Пример — *1 балл.*

Только ответ без примера — *0 баллов.*

2. (2 балла)

Оценка — *1 балл.*

Пример (обоснование того, что такой элемент действительно может быть средним арифметическим — *1 балл.*

Только ответ — *0 баллов.*

3. (2 балла)

Только ответ “Нет” — *0 баллов.*

В авторском решении не требовать подробного доказательства делимости на $n-1$.

У этой задачи есть также решения по конкретным модулям.

4. (2 балла)

При доказательстве периодичности уровня строгости, приведённого в авторском решении, достаточно для полного балла.

5. (3 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

За несущественный арифметические ошибки снимать *1 балл.*

Решения с ошибками геометрического характера не оцениваются.

6. (3 балла)

Если участник рисует правильную картинку, не требовать строго объяснения того, почему она именно такая.

Решения с неправильной картинкой (или решения без картинки, использующие неправильное расположение точек) не могут привести к доказательству, так как часть неравенств перестаёт быть справедлива. Соответственно, такие решения, скорее всего, помимо ошибок в картинке содержат ещё и ошибки в неравенствах и не должны быть засчитаны даже частично.

7. (4 балла)

Только ответ “Да” без примера или с неверным примером — *0 баллов.*

Полный балл склывается из:

1) Правильный пример — *2 балла* 2) Обоснование того, что в примере выполняется условие для квадратиков 2×2 — *1 балл* 3) Обоснование того, в примере встречаются все числа от 0 до 9999(999 во втором варианте) *1 балл*

Если обоснование какого-либо из условий очевидно следует из примера, жюри вправе не снимать баллы за отсутствие этого обоснования. Например, приведённый в авторском решении пример при отсутствии обоих обоснований следовало бы оценить в $2+1+0=3$ балла, так как выполнение первого условия для этого примера очевидно, а выполнение второго — нет.

Участник не обязан писать явную формулу для каждой клетки таблицы, описания построения таблицы, сходного по строгости с приведённым в авторском решении, достаточно.

Если приведён пример без обоснования и жюри не может за разумное время определить его правильность, жюри вправе поставить за такой пример 0 баллов. Однако, если участник сможет на апелляции объяснить верность своего примера, он должен получить свои 2 балла.

8. (5 балла)

В ходе решения участник олимпиады может пытаться использвовать метод Штурма, неравенства о средних для двух или трёх переменных и другие известные неравенства и приёмы. Известные неравенства разрешается использовать без доказательства.

9 класс

1. (2 балла)

Потерян один из ответов — *снимать 1 балл.*

Ответ вычислен с ошибками — *снимать 0,5 балла.*

Не снимать баллы за отсутствие проверки того, что оба значения достигаются.

2. (2 балла)

Не разобраны случаи $n \leqslant 2$ (при необходимости) *1,5 балла.*

В авторском решении не требовать подробного доказательства делимости на $n-1$.

3. (3 балла)

В авторском решении из исследования квадратного трёхчлена автоматически следует, что максимум достигается.

Если из решения участника не следует непосредственно, что максиму достигается, — *снимать 1 балл.*

При наличии арифметических ошибок, несущественно влияющих на ход решения, — *снимать 1 балл.*

4. (3 балла)

Только ответ “Нет” — *0 баллов.*

При наличии арифметических ошибок, несущественно влияющих на ход решения, — *снимать 1 балл.*

5. (3 балла)

Достаточно ответа в виде формулы, вычислять ответ не требуется.

Только ответ без объяснения — *1,5 балла.*

6. (3 балла)

Только ответ “Нет” — *0 баллов.*

7. (3 балла)

Критерии на усмотрение проверяющих.

8. (5 баллов)

Только ответ — *0 баллов.*

Только ответ с примером — *1 балл.*

8 класс

1. (2 балла)

(в условии задач одного из вариантов написано, что 1 балл. Пускай будет 2)

Только ответ без обоснования того, что он наибольший/наименьший — *0,5 балла.*

Не требовать проверки делением того, что 990 делится на 99 и 90, а 110 на 11 и 10.

2. (2 балла)

Только ответ "Да" — *0 баллов.*

Вообще говоря, Конкретные стороны треугольника предъявлять не обязательно, достаточно доказать, что он существует.

При наличии арифметических ошибок, несущественно влияющих на ход решения, — *снимать 0,5 балла.*

3. (2 балла)

Только ответ с примером — *0,5 балла.*

Не снимать баллы за отсутствие примера, если он явным образом следует из доказанной оценки. Если не следует, *снимать 0,5 балла.*

Оценка, в которой пропущен один из двух случаев, оценивается в *0 баллов.*

4. (3 балла)

Только ответ "Да" — *0 баллов.*

5. (3 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

Правильный ответ с правильно распределёнными углами без обоснования, почему картинка именно такая — *1,5 балла.*

6. (4 балла)

1 вариант: только ответ — *1 балл.*

2 вариант: за каждый из найденных ответов *по 0,5 балла.*

При доказательстве того, что другие случаи невозможны, за каждый потерянный или неверно разобранный случай *снимать 1 балл (из 3 баллов за эту часть решения).*

7. (4 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

Ответ с указанием нужной точки — *1 балл.*

Ответ с указанием нужной и вычислением площадей — *2 балла.*

Оставшиеся *2 балла* ставятся за обоснование того, что площадь не может быть меньше половины.

Разрешается использовать факты, выходящие за рамки программы 8 класса, например, формулы для вычисления площади через векторы или координаты. В частности, если кто-то корректно сошлётся на факт, что площадь треугольника должна быть целой или полуцелой, решение должно быть засчитано.

8. (4 балла)

Только ответ без оценки и без примера (или с неправильным примером) — *0 баллов.*

Пример — *2 балла*, оценка — *ещё 2 балла*

Обоснование примера (если он предъявлен в явном виде и верен) не требуется.

7 класс

1. (2 балла)
Только ответ “Да” — *0 баллов.*

2. (2 балла)
Только ответ — *0 баллов.*
Ответ с примером, когда таков возможно — *1 балл.*
При верном обосновании примера не требуется.

3. (2 балла)
Доказательства “на примерах” не оцениваются.

4. (3 балла)
По полтора балла ставится за каждый из двух наборов.
Обоснования того, что нет других подходящих наборов не требуется.

5. (3 балла)
Только ответ: *0 баллов*
Все ответы с объяснением, как их можно получить *1,5 балла*
Больше половины ответов с объяснением, как их можно получить *1 балл*
Не менее трети ответов с объяснением, как их можно получить *0,5 балла*
Оставшиеся *1,5 балла* ставятся за обоснование того, что других ответов нет.

6. (3 балла)
Построение подходящего примера не оценивается.

7. (4 балла)
Доказательства “на примерах” не оцениваются.

8. (5 баллов)
Пример: — *2 балла*
Оценка — *3 балла*
Только ответ —- *0 баллов*

2 Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады

2.1 Задания для 11 класса

Задача 1. (1 балл)

1. Найдите наибольшее значение выражения $5\sin x + 2\sqrt{6}\cos x$.

Ответ: 7

2. Найдите наибольшее значение выражения $6\sin x + 2\sqrt{7}\cos x$.

Правильный ответ: 8

3. Найдите наибольшее значение выражения $7\sin x + 4\sqrt{2}\cos x$.

Правильный ответ: 9.

Задача 2. (2 балла)

1. Дана функция $f(x) = -x^2 + 4x - 2$. Решите уравнение $f(f(\ldots f(x)\ldots) = 2$. Функция f применяется 2018 раз.

Ответ: 2

2. Дана функция $f(x) = 2x^2 - 12x + 21$. Решите уравнение $f(f(\ldots f(x)\ldots) = 3$. Функция f применяется 2018 раз.

Ответ: 3

3. Дана функция $f(x) = x^2 - 8x + 20$. Решите уравнение $f(f(\ldots f(x)\ldots) = 4$. Функция f применяется 2018 раз.

Ответ: 4

Задача 3. (2 балла)

1. Грани каждого из игральных кубиков одинакового размера пронумерованы натуральными числами от 1 до 6. Из 125 таких кубиков составили кубик $5 \times 5 \times 5$. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на его поверхности?

Ответ: 840

2. Грани каждого из игральных кубиков одинакового размера пронумерованы натуральными числами от 1 до 6. Из 1000 таких кубиков составили кубик $10 \times 10 \times 10$. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на его поверхности?

Ответ: 3480

3. Грани каждого из игральных кубиков одинакового размера пронумерованы натуральными числами от 1 до 6. Из 216 таких кубиков составили кубик $6 \times 6 \times 6$. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на его поверхности?

Ответ: 1224

Задача 4. (3 балла)

1. Найдите многочлен третьей степени со старшим коэффициентом 1, если известно, что три его корня x_1, x_2, x_3 удовлетворяют равенствам: $\alpha = x_1 + x_2$, $\beta = x_1 + x_3$, $\gamma = x_2 + x_3$, где α, β, γ — все корни многочлена $x^3 - 10x^2 + 31x - 29$.

Примеры записи ответа: $x^3 - 2x^2 + 33x - 4$

Знак $\wedge$ обозначает степень. Слагаемые пишите в том же порядке, что и в примере.

Ответ: $x^3 - 5x^2 + 6x - 1$

2. Найдите многочлен третьей степени со старшим коэффициентом 1, если известно, что три его корня x_1, x_2, x_3 удовлетворяют равенствам: $\alpha = x_1 + x_2$, $\beta = x_1 + x_3$, $\gamma = x_2 + x_3$, где α, β, γ — все корни многочлена $x^3 - 12x^2 + 44x - 46$.

Примеры записи ответа: $x^3 - 2x^2 + 33x - 4$

Знак $\wedge$ обозначает степень. Слагаемые пишите в том же порядке, что и в примере.

Ответ: $x^3 - 6x^2 + 8x - 2$

3. Найдите многочлен третьей степени со старшим коэффициентом 1, если известно, что три его корня x_1, x_2, x_3 удовлетворяют равенствам: $\alpha = x_1 + x_2$, $\beta = x_1 + x_3$, $\gamma = x_2 + x_3$, где α, β, γ — все корни многочлена $x^3 - 14x^2 + 58x - 61$.

Примеры записи ответа: $x^3 - 2x^2 + 33x - 4$

Знак $\wedge$ обозначает степень. Слагаемые пишите в том же порядке, что и в примере.

Ответ: $x^3 - 7x^2 + 9x - 2$

Задача 5. (3 балла)

1. Пусть $f(x)$ — возрастающая непрерывная функция, заданная на отрезке $[0;2]$, $g(x)$ — её обратная функция, причём $g(x) > f(x)$ при всех положительных x, для которых обе эти функции определены. Также $f(0) = 0$, $f(2) = 1$.

Площадь подграфика $f(x)$ на отрезке $[0;2]$ равна $\frac{3}{4}$. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками $f(x)$ и $g(x)$, а также отрезком, соединяющим точки $(1;2)$ и $(2;1)$.

Ответ: 2

2. Пусть $f(x)$ — возрастающая непрерывная функция, заданная на отрезке $[0;3]$, $g(x)$ — её обратная функция, причём $g(x) > f(x)$ при всех положительных x, для которых обе эти функции определены. Также $f(0) = 0$, $f(3) = 1$.

Площадь подграфика $f(x)$ на отрезке $[0;3]$ равна 2. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками $f(x)$ и $g(x)$, а также отрезком, соединяющим точки $(1;3)$ и $(3;1)$.

Ответ: 3

3. Пусть $f(x)$ — возрастающая непрерывная функция, заданная на отрезке $[0;3]$, $g(x)$ — её обратная функция, причём $g(x) > f(x)$ при всех положительных x, для которых обе эти функции определены. Также $f(0) = 0$, $f(3) = 2$.

Площадь подграфика $f(x)$ на отрезке $[0;3]$ равна 2. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками $f(x)$ и $g(x)$, а также отрезком, соединяющим точки $(3;2)$ и $(2;3)$.

Ответ: 4,5 | 9/2

Задача 6. (3 балла)

1. Две окружности равного радиуса пересекаются в точках AB. Прямая l, проходящая через точку B, вторично пересекает окружности в точках C и D. Оказалось, что $AD = BD = 5 + 5\sqrt{2}$, а $\angle CAD = 90°$.

Найдите BC.

Ответ: 5

2. Две окружности равного радиуса пересекаются в точках AB. Прямая l, проходящая через точку B, вторично пересекает окружности в точках C и D. Оказалось, что $AD = BD = 10 + 10\sqrt{3}$, а $\angle CAD = 120°$.

Найдите BC.

Ответ: 20

3. Две окружности равного радиуса пересекаются в точках AB. Прямая l, проходящая через точку B, вторично пересекает окружности в точках C и D. Оказалось, что $AD = BD = 12$, а $\angle CAD = 108°$.

Найдите BC.

Ответ: 6

Задача 7. (3 балла)

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какую меньшую часть объёма отделяет от него плоскость, проходящая через середину ребра BC, центр грани CDD_1C_1 и точку X на ребре AA_1 такую, что $AX : A_1X = 1 : 3$?

Ответ дайте в виде правильной дроби, не округляйте.

Пример записи ответа: 13/81

Ответ: 25/96

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какую меньшую часть объёма отделяет от него плоскость, проходящая через середины рёбер AB, BB_1 и A_1D_1?

Ответ дайте в виде правильной дроби, не округляйте.

Пример записи ответа: 13/81

Ответ: 25/144

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какую меньшую часть объёма отделяет от него плоскость, проходящая через середину ребра AD и точки X и Y на ребрах AA_1 и CC_1 такие, что $AX : A_1X = CY : C_1Y = 1 : 7$?

Ответ дайте в виде правильной дроби, не округляйте.

Пример записи ответа: 13/81

Ответ: 25/192

Задача 8. (3 балла)

1. На какую наибольшую степень 5 делится число $7^{1000} - 2^{1000}$? В ответе укажите показатель степени или само число.

Ответ: 4 | 625

2. На какую наибольшую степень 2 делится число $7^{1000} - 3^{1000}$? В ответе укажите показатель степени или само число.

Ответ: 5 | 32

3. На какую наибольшую степень 3 делится число $5^{486} - 2^{486}$? В ответе укажите показатель степени или само число.

Ответ: 6 | 729

Задача 9. (4 балла)

Комментарий: желательно разрешить ко вводу только буквы ABCDabcd

1. Упорядочите эти числа по возрастанию или убыванию:

$A = 9^{9^9}$

$B = 99^9$

$C = (9^9)^9$

$D = 9!^{9!}$

Примеры записи ответа: $ABCD$

Ответ: ADCB | BCDA | adcb | bcda

2. Упорядочите эти числа по возрастанию или убыванию:

$A = 8!^{8!}$

$B = 8^{8^8}$

$C = 8^{88}$

$D = (8^8)^8$

Примеры записи ответа: $ABCD$

Ответ: BACD | DCAB | bacd | dcab

3. Упорядочите эти числа по возрастанию или убыванию:

$A = 77^7$

$B = 7^{77}$

$C = 7^{7^7}$

$D = 7!^{7!}$

Примеры записи ответа: $ABCD$

Ответ: CDBA | ABDC | cdba | abdc

Задача 10. (5 баллов)

1. Одиннадцать девочек стояли напротив одиннадцати мальчиков. Первые девочка и мальчик пошли навстречу друг другу. Когда они встретились, они пожали друг другу руки, после чего развернусь и пошли в обратном направлении. Сразу за первыми девочкой и мальчиком пошли вторые девочка и мальчик, за ними третьи девочка и мальчик и так

далее, пока не вышли последние девочка и мальчик. Двое детей жали друг другу руки при встрече, после чего разворачивались и шли в обратном направлении. Какое количество рукопожатий было совершено?

Ответ: 121

2. Двенадцать девочек стояли напротив двенадцати мальчиков. Первые девочка и мальчик пошли навстречу друг другу. Когда они встретились, они пожали друг другу руки, после чего развернусь и пошли в обратном направлении. Сразу за первыми девочкой и мальчиком пошли вторые девочка и мальчик, за ними третьи девочка и мальчик и так далее, пока не вышли последние девочка и мальчик. Двое детей жали друг другу руки при встрече, после чего разворачивались и шли в обратном направлении. Какое количество рукопожатий было совершено?

Ответ: 144

3. Тринадцать девочек стояли напротив тринадцати мальчиков. Первые девочка и мальчик пошли навстречу друг другу. Когда они встретились, они пожали друг другу руки, после чего развернусь и пошли в обратном направлении. Сразу за первыми девочкой и мальчиком пошли вторые девочка и мальчик, за ними третьи девочка и мальчик и так далее, пока не вышли последние девочка и мальчик. Двое детей жали друг другу руки при встрече, после чего разворачивались и шли в обратном направлении. Какое количество рукопожатий было совершено?

Ответ: 169

2.2 Задания для 10 класса

Задача 1. (2 балла)

1. Дан треугольник со сторонами 10, 10, 12. Найдите расстояние от точки пересечения медиан до ближайшей стороны треугольника.

Ответ: 4/3

2. Дан треугольник со сторонами 10, 10, 16. Найдите расстояние от точки пересечения медиан до ближайшей стороны треугольника.

Ответ: 2

3. Дан треугольник со сторонами 10, 13, 13. Найдите расстояние от точки пересечения медиан до самой дальней от неё стороны треугольника.

Ответ: 4

Задача 2. (2 балла)

1. Дана дробно-линейная функция вида $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c и d — различные натуральные числа от 1 до 10. Какое наименьшее значение может принимать $f(4)$.

Ответ запишите в виде правильной дроби, не округляйте.

Пример записи ответа: 27/34

Ответ: 6/49

2. Дана дробно-линейная функция вида $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c и d — различные натуральные числа от 1 до 15. Какое наименьшее значение может принимать $f(3)$.

Ответ запишите в виде правильной дроби, не округляйте.

Пример записи ответа: 27/34

Ответ: 5/59

3. Дана дробно-линейная функция вида $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c и d — различные натуральные числа от 1 до 20. Какое наименьшее значение может принимать $f(2)$.

Ответ запишите в виде правильной дроби, не округляйте.

Пример записи ответа: 27/34

Ответ: 4/59

Задача 3. (3 балла)

1. Натуральное число представляется в виде суммы ста степеней двойки. А в виде суммы какого наименьшего числа степеней числа 16 его гарантированно можно представить?

Ответ: 800

2. Натуральное число представляется в виде суммы ста степеней двойки. А в виде суммы какого наименьшего числа степеней числа 32 его гарантированно можно представить?

Ответ: 1600

3. Натуральное число представляется в виде суммы ста степеней тройки. А в виде суммы какого наименьшего числа степеней числа 27 его гарантированно можно представить?

Ответ: 900

Задача 4. (3 балла)

1. Найдите все возможные целые значения выражения $\frac{2}{a} + 5 + \sqrt{2}$, если известно, что $a - \sqrt{2}$ так же целое. Ответы запишите в любом порядке через запятую или точку с запятой.

Примеры записи ответа: 1; 2

Ответ: 3, 7 || 7, 3 || 3; 7 || 7: 3

2. Найдите все возможные целые значения выражения $\frac{6}{a} + 4 + \sqrt{3}$, если известно, что $a - \sqrt{3}$ так же целое.

Ответ: 1, 7 || 7, 1 || 1; 7 || 7; 1

3. Найдите все возможные целые значения выражения $\frac{4}{a} + 3 + \sqrt{5}$, если известно, что $a - \sqrt{5}$ так же целое.

Ответ: 0, 6 || 6, 0 || 0; 6 || 6; 0

Задача 5. (3 балла)

1. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2 + 11x + 30$, если известно, что $P(-6) = 2$ и $P(-5) = 1$.

Примеры записи ответа:

2x-3

x+4

Ответ: -x - 4 || -4-x

2. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2+9x+20$, если известно, что $P(-5) = 2$ и $P(-4) = 1$.

Примеры записи ответа:

2x-3

x+4

Ответ: -x - 3 || -3-x

3. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2+7x+12$, если известно, что $P(-4) = 2$ и $P(-3) = 1$.

Примеры записи ответа:

2x-3

x+4

Ответ: -x - 2 || -2-x

Задача 6. (3 балла)

1. Сколькими способами из картинки 10×12 можно сделать пазл, если каждые две соседние клетки должны соединяться выступом и выемкой? (Картинка такова, что как бы мы не резали её на части пазла, одинаковых кусочков и кусочков, переходящих в себя при поворотах не будет)

Примеры записи ответа:

123456789

3^{97}

Ответ: 2^{218}

2. Сколькими способами из картинки 11×12 можно сделать пазл, если каждые две соседние клетки должны соединяться выступом и выемкой? (Картинка такова, что как бы мы не резали её на части пазла, одинаковых кусочков и кусочков, переходящих в себя при поворотах не будет)

Примеры записи ответа:

123456789

3^{97}

Ответ: 2^{241}

3. Сколькими способами из картинки 10×15 можно сделать пазл, если каждые две соседние клетки должны соединяться выступом и выемкой? (Картинка такова, что как бы мы не резали её на части пазла, одинаковых кусочков и кусочков, переходящих в себя при поворотах не будет)

Примеры записи ответа:

123456789

3^{97}

Ответ: 2^{275}

Задача 7. (3 балла)

1. Синус, косинус и тангенс некоторого угла образуют геометрическую прогрессию (по определению, знаменатель геометрической прогрессии не равен 0). Какое количество различных значений может принимать синус?

Ответ: 4

2. Синус, косинус и тангенс некоторого угла образуют геометрическую прогрессию (по определению, знаменатель геометрической прогрессии не равен 0). Какое количество различных значений может принимать косинус?

Ответ: 3

3. Синус, косинус и котангенс некоторого угла образуют геометрическую прогрессию (по определению, знаменатель геометрической прогрессии не равен 0). Какое количество различных значений может принимать косинус?

Ответ: 4.

Задача 8. (4 балла)

1. Изначально на доске написано число 1. Разрешается прибавлять к текущему числу 2 или умножать его на 2. Какое наименьшее натуральное число (большее 1) нельзя получить не более, чем за 100 таких операций?

Ответ: 203

2. На доске написано какое-то число. Разрешается прибавлять к текущему числу 3 или умножать его на 3. Какое наименьшее натуральное число (большее 1) нельзя получить не более, чем за 100 таких операций ни из единицы, ни из двойки?

Ответ: 304

3. Изначально на доске написано число 2. Разрешается прибавлять к текущему числу 4 или умножать его на 2. Какое наименьшее чётное натуральное число (большее 2) нельзя получить не более, чем за 100 таких операций?

Ответ: 406

Задача 9. (4 балла)

1. Диагональ AC ромба $ABCD$ со стороной $6\sqrt{5}$ пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке X. Оказалось, что $CX = 9$.

Найдите квадрат расстояния между точкой пересечения высот треугольника ABD и центром вписанной окружности треугольника CDB.

Ответ: 45

2. Диагональ AC ромба $ABCD$ со стороной $4\sqrt{17}$ пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке X. Оказалось, что $CX = 15$.

Найдите квадрат расстояния между точкой пересечения высот треугольника ABD и центром вписанной окружности треугольника CDB.

Ответ: 17

3. Диагональ AC ромба $ABCD$ со стороной $6\sqrt{10}$ пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке X. Оказалось, что $CX = 16$.

Найдите квадрат расстояния между точкой пересечения высот треугольника ABD и центром вписанной окружности треугольника CDB.

Ответ: 40

Задача 10. (4 балла)

1. Дана клетчатая решётка 12×12. Сколько различных несамопересекающихся замкнутых путей длины 8 можно провести по линиям этой решётки?

Ответ: 845

2. Дана клетчатая решётка 13×13. Сколько различных несамопересекающихся замкнутых путей длины 8 можно провести по линиям этой решётки?

Ответ: 1006

3. Дана клетчатая решётка 11×11. Сколько различных несамопересекающихся замкнутых путей длины 8 можно провести по линиям этой решётки?

Ответ: 698

2.3 Задания для 9 класса

Задача 1. (2 балла)

1. Коэффициенты квадратного трёхчлена — три различных натуральных числа от 1 до 20. Какое наименьшее значение этот трёхчлен может принимать при $x = -2$?

Ответ: -34

2. Коэффициенты квадратного трёхчлена — три различных натуральных числа от 1 до 20. Какое наименьшее значение этот трёхчлен может принимать при $x = -3$?

Ответ: -49

3. Коэффициенты квадратного трёхчлена — три различных натуральных числа от 1 до 10. Какое наименьшее значение этот трёхчлен может принимать при $x = 4$?

Ответ: -22

Задача 2. (2 балла)

1. Дан треугольник ABC, в нем проведена бисектриса BK. На стороне AB взята точка L такая, что прямая KL параллельна прямой BC, а на стороне BC взята точка M такая, что прямая KM параллельна прямой AB. Оказалось, что угол ALK в три раза больше угла BML. Найдите самый большой угол треугольника ABC (в градусах).

Ответ: 108

2. Дан треугольник ABC, в нем проведена бисектриса BK. На стороне AB взята точка L такая, что прямая KL параллельна прямой BC, а на стороне BC взята точка M такая, что прямая KM параллельна прямой AB. Оказалось, что угол ALK в четыре раза больше угла BML. Найдите самый большой угол треугольника ABC (в градусах).

Ответ: 120

3. Дан треугольник ABC, в нем проведена бисектриса BK. На стороне AB взята точка L такая, что прямая KL параллельна прямой BC, а на стороне BC взята точка M такая, что прямая KM параллельна прямой AB. Оказалось, что угол ALK в шесть раз больше угла BML. Найдите самый большой угол треугольника ABC (в градусах).

Ответ: 135

Задача 3. (2 балла)

1. Дан треугольник со сторонами 10, 10, 12. Найдите расстояние от точки пересечения медиан до ближайшей стороны треугольника.

Ответ: 4/3

2. Дан треугольник со сторонами 10, 10, 16. Найдите расстояние от точки пересечения медиан до ближайшей стороны треугольника.

Ответ: 2

3. Дан треугольник со сторонами 10, 13, 13. Найдите расстояние от точки пересечения медиан до самой дальней от неё стороны треугольника.

Ответ: 4

Задача 4. (3 балла)

1. Найдите все возможные целые значения выражения $\frac{2}{a} + 5 + \sqrt{2}$, если известно, что $a - \sqrt{2}$ так же целое. Ответы запишите в любом порядке через запятую или точку с запятой.

Примеры записи ответа: 1; 2

Ответ: 3, 7 || 7, 3 || 3; 7 || 7: 3

2. Найдите все возможные целые значения выражения $\frac{6}{a} + 4 + \sqrt{3}$, если известно, что $a - \sqrt{3}$ так же целое.

Ответ: 1, 7 || 7, 1 || 1; 7 || 7; 1

3. Найдите все возможные целые значения выражения $\frac{4}{a} + 3 + \sqrt{5}$, если известно, что $a - \sqrt{5}$ так же целое.

Ответ: 0, 6 || 6, 0 || 0; 6 || 6; 0

Задача 5. (3 балла)

1. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2 + 11x + 30$, если известно, что $P(-6) = 2$ и $P(-5) = 1$.

Примеры записи ответа:

2x-3

x+4

Ответ: -x - 4 || -4-x

2. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2+9x+20$, если известно, что $P(-5) = 2$ и $P(-4) = 1$.

Примеры записи ответа:

2x-3

x+4

Ответ: -x - 3 || -3-x

3. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2+7x+12$, если известно, что $P(-4) = 2$ и $P(-3) = 1$.

Примеры записи ответа:

2x-3

x+4

Ответ: -x - 2 || -2-x

Задача 6. (3 балла)

1. Сколькими способами из картинки 10×12 можно сделать пазл, если каждые две соседние клетки должны соединяться выступом и выемкой? (Картинка такова, что как бы мы не резали её на части пазла, одинаковых кусочков и кусочков, переходящих в себя при поворотах не будет)

Примеры записи ответа:

123456789

3^{97}

Ответ: 2^{218}

2. Сколькими способами из картинки 11×12 можно сделать пазл, если каждые две соседние клетки должны соединяться выступом и выемкой? (Картинка такова, что как бы мы не резали её на части пазла, одинаковых кусочков и кусочков, переходящих в себя при поворотах не будет)

Примеры записи ответа:

123456789

3^{97}

Ответ: 2^{241}

3. Сколькими способами из картинки 10×15 можно сделать пазл, если каждые две соседние клетки должны соединяться выступом и выемкой? (Картинка такова, что как бы мы не резали её на части пазла, одинаковых кусочков и кусочков, переходящих в себя при поворотах не будет)

Примеры записи ответа:

123456789

3^{97}

Ответ: 2^{275}

Задача 7. (3 балла)

1. Сколько существует трёхзначных чисел, с суммой цифр, равной 13?

Ответ: 69

2. Сколько существует трёхзначных чисел, с суммой цифр, равной 12?

Ответ: 66

3. Сколько существует трёхзначных чисел, с суммой цифр, равной 11?

Ответ: 61

Задача 8. (3 балла)

1. На пастбищах A, B, C пасутся овцы. Вид и размеры пастбищ указаны на рисунке. Известно, что плотность овец на пастбище C в 4 раза меньше, чем на пастбище A. Плотность овец на пастбище B на 10 процентов меньше, чем на пастбище A. Известно, что общее количество овец, которые пасутся на пастбищах B и C, равно 51. Чему равно общее количество овец, которые пасутся на всех трех пастбищах? Плотность овец — количество овец на единицу площади.

Ответ: 71

2. На пастбищах A, B, C (вид и размеры пастбищ указаны на рисунке). Известно, что плотность овец на пастбище C в 3 раза меньше, чем на пастбище A. Плотность овец на пастбище B на 20 процентов больше, чем на пастбище A. Известно, что общее количество овец, которые пасутся на пастбищах B и C, равно 74. Чему равно общее количество овец, которые пасутся на всех трех пастбищах? Плотность овец - количество овец на единицу площади.

Ответ: 89

3. На пастбищах A, B, C (вид и размеры пастбищ указаны на рисунке). Известно, что плотность овец на пастбище C в 2 раза меньше, чем на пастбище A. Плотность овец на пастбище B на 10 процентов больше, чем на пастбище A. Известно, что общее количество овец, которые пасутся на пастбищах B и C, равно 69. Чему равно общее количество овец, которые пасутся на всех трех пастбищах? Плотность овец — количество овец на единицу площади.

Ответ: 79

Задача 9. (4 балла)

1. Дан клетчатый прямоугольник 10×10. Сколько различных клетчатых многоугольников периметра 8 можно нарисовать по линиям сетки внутри этого прямоугольника?

Ответ: 565

2. Дан клетчатый прямоугольник 8×8. Сколько различных клетчатых многоугольников периметра 8 можно нарисовать по линиям сетки внутри этого прямоугольника?

Ответ: 341

3. Дан клетчатый прямоугольник 9×9. Сколько различных клетчатых многоугольников периметра 8 можно нарисовать по линиям сетки внутри этого прямоугольника?

Ответ: 446

Задача 10. (5 баллов)

1. Изначально на доске написано число 1. Разрешается прибавлять к текущему числу 2 или умножать его на 2. Какое наименьшее натуральное число (большее 1) нельзя получить не более, чем за 100 таких операций?

Ответ: 203

2. На доске написано какое-то число. Разрешается прибавлять к текущему числу 3 или умножать его на 3. Какое наименьшее натуральное число (большее 1) нельзя получить не более, чем за 100 таких операций ни из единицы, ни из двойки?

Ответ: 304

3. Изначально на доске написано число 2. Разрешается прибавлять к текущему числу 4 или умножать его на 2. Какое наименьшее чётное натуральное число (большее 2) нельзя получить не более, чем за 100 таких операций?

Ответ: 406

2.4 Задания для 8 класса

Задача 1. (1 балл)

1. ABC — равнобедренный треугольник, $AB = BC$, $\angle A = 70°$, $\angle B = 40°$. Точка D взята на луче CA за точкой A так, что $AD = BD$. Найдите $\angle DBA$ (в градусах).

Ответ: 30

2. ABC — равнобедренный треугольник, $AB = AC$, $\angle B = 75°$, $\angle A = 30°$. Точка D взята на луче CB за точкой B так, что $AD = BD$. Найдите $\angle DAB$ (в градусах).

Ответ: 45

3. ABC — равнобедренный треугольник, $AB = BC$, $\angle A = 80°$, $\angle B = 20°$. Точка D взята на луче CA за точкой A так, что $AD = BD$. Найдите $\angle DBA$ (в градусах).

Ответ: 60

Задача 2. (2 балла)

1. По кругу стоят 2018 камней, на одном из которых сидит лягушка. Лягушка умеет прыгать на 32 камня вперед по часовой стрелке и на 26 камней против часовой стрелке. Сколько камней может посетить лягушка с учетом того камня, на котором она изначально сидит?

Ответ: 1009

2. По кругу стоят 2019 камней, на одном из которых сидит лягушка. Лягушка умеет прыгать на 21 камня вперед по часовой стрелке и на 15 камней против часовой стрелке. Сколько камней может посетить лягушка с учетом того камня, на котором она изначально сидит?

Ответ: 673

3. По кругу стоят 2020 камней, на одном из которых сидит лягушка. Лягушка умеет прыгать на 28 камня вперед по часовой стрелке и на 20 камней против часовой стрелке. Сколько камней может посетить лягушка с учетом того камня, на котором она изначально сидит?

Ответ: 505

Задача 3. (2 балла)

1. Дан четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = 6$, $BC = 9$, $AD = 2$. Найдите сумму всех возможных значений стороны CD, если известно, что длины AC и CD — это некоторые натуральные числа.

Ответ: 117

2. Дан четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = 5$, $BC = 8$, $AD = 3$. Найдите сумму всех возможных значений стороны CD, если известно, что длины AC и CD — это некоторые натуральные числа.

Ответ: 104

3. Дан четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = 6$, $BC = 7$, $AD = 2$. Найдите сумму всех возможных значений стороны CD, если известно, что длины AC и CD — это некоторые натуральные числа.

Ответ: 91

Задача 4. (3 балла)

1. В комнате находятся рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут, всего 20 человек (и те, и другие присутствуют). Каждого из них спросили, сколько в комнате рыцарей. Прозвучали все возможные ответы от 1 до некоторого k, каждый ответ прозвучал одинаковое количество раз.

Сколько рыцарей могло быть на самом деле? Перечислите все возможные ответы в порядке возрастания или убывания через запятую.

Ответ: 1, 2, 4 || 4, 2, 1

2. В комнате находятся рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут, всего 45 человек (и те, и другие присутствуют). Каждого из них спросили, сколько в комнате рыцарей. Прозвучали все возможные ответы от 1 до некоторого k, каждый ответ прозвучал одинаковое количество раз.

Сколько рыцарей могло быть на самом деле? Перечислите все возможные ответы в порядке возрастания или убывания через запятую.

Ответ: 1, 3, 5 || 5, 3, 1

3. В комнате находятся рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут, всего 50 человек (и те, и другие присутствуют). Каждого из них спросили, сколько в комнате рыцарей. Прозвучали все возможные ответы от 1 до некоторого k, каждый ответ прозвучал одинаковое количество раз.

Сколько рыцарей могло быть на самом деле? Перечислите все возможные ответы в порядке возрастания или убывания через запятую.

Ответ: 1, 2, 5 || 5, 2, 1

Задача 5. (3 балла)

1. Участники ралли стартуют каждый час, начиная с полуночи. Первая машина едет со скоростью 100 км/ч, каждая следующая — на 5 км/ч быстрее предыдущей.

Какая по счёту машина будет дальше от старта ровно через двое суток после старта начала ралли? (У каждой машины несколько водителей, поэтому они едут без остановок).

Ответ: 15

2. Участники ралли стартуют каждый час, начиная с полуночи. Первая машина едет со скоростью 80 км/ч, каждая следующая — на 4 км/ч быстрее предыдущей.

Какая по счёту машина будет дальше от старта ровно через трое суток после старта начала ралли? (У каждой машины несколько водителей, поэтому они едут без остановок).

Ответ: 27

3. Участники ралли стартуют каждый час, начиная с полуночи. Первая машина едет со скоростью 60 км/ч, каждая следующая — на 1 км/ч быстрее предыдущей.

Какая по счёту машина будет дальше от старта ровно через четверо суток после старта начала ралли? (У каждой машины несколько водителей, поэтому они едут без остановок).

Ответ: 19

Задача 6. (3 балла)

1. Дан треугольник ABC, в нем проведена бисектриса BK. На стороне AB взята точка L такая, что прямая KL параллельна прямой BC, а на стороне BC взята точка M такая, что прямая KM параллельна прямой AB. Оказалось, что угол ALK в три раза больше угла BML. Найдите самый большой угол треугольника ABC (в градусах).

Ответ: 108

2. Дан треугольник ABC, в нем проведена бисектриса BK. На стороне AB взята точка L такая, что прямая KL параллельна прямой BC, а на стороне BC взята точка M такая, что прямая KM параллельна прямой AB. Оказалось, что угол ALK в четыре раза больше угла BML. Найдите самый большой угол треугольника ABC (в градусах).

Ответ: 120

3. Дан треугольник ABC, в нем проведена бисектриса BK. На стороне AB взята точка L такая, что прямая KL параллельна прямой BC, а на стороне BC взята точка M такая, что прямая KM параллельна прямой AB. Оказалось, что угол ALK в шесть раз больше угла BML. Найдите самый большой угол треугольника ABC (в градусах).

Ответ: 135

Задача 7. (3 балла)

1. Сколько существует трёхзначных чисел, с суммой цифр, равной 13?

Ответ: 69

2. Сколько существует трёхзначных чисел, с суммой цифр, равной 12?

Ответ: 66

3. Сколько существует трёхзначных чисел, с суммой цифр, равной 11?

Ответ: 61

Задача 8. (3 балла)

1. На пастбищах A, B, C пасутся овцы. Вид и размеры пастбищ указаны на рисунке. Известно, что плотность овец на пастбище C в 4 раза меньше, чем на пастбище A. Плотность овец на пастбище B на 10 процентов меньше, чем на пастбище A. Известно, что общее количество овец, которые пасутся на пастбищах B и C, равно 51. Чему равно общее количество овец, которые пасутся на всех трех пастбищах? Плотность овец — количество овец на единицу площади.

Ответ: 71

2. На пастбищах A, B, C (вид и размеры пастбищ указаны на рисунке). Известно, что плотность овец на пастбище C в 3 раза меньше, чем на пастбище A. Плотность овец на пастбище B на 20 процентов больше, чем на пастбище A. Известно, что общее количество овец, которые пасутся на пастбищах B и C, равно 74. Чему равно общее количество овец, которые пасутся на всех трех пастбищах? Плотность овец - количество овец на единицу площади.

Ответ: 89

3. На пастбищах A, B, C (вид и размеры пастбищ указаны на рисунке). Известно, что плотность овец на пастбище C в 2 раза меньше, чем на пастбище A. Плотность овец на пастбище B на 10 процентов больше, чем на пастбище A. Известно, что общее количество овец, которые пасутся на пастбищах B и C, равно 69. Чему равно общее количество овец, которые пасутся на всех трех пастбищах? Плотность овец — количество овец на единицу площади.

Ответ: 79

Задача 9. (4 балла)

1. Дан клетчатый прямоугольник 10×10. Сколько различных клетчатых многоугольников периметра 8 можно нарисовать по линиям сетки внутри этого прямоугольника?

Ответ: 565

2. Дан клетчатый прямоугольник 8×8. Сколько различных клетчатых многоугольников периметра 8 можно нарисовать по линиям сетки внутри этого прямоугольника?

Ответ: 341

3. Дан клетчатый прямоугольник 9×9. Сколько различных клетчатых многоугольников периметра 8 можно нарисовать по линиям сетки внутри этого прямоугольника?

Ответ: 446

Задача 10. (4 балла)

1. В клетках шахматной доски 8×8 расставили неотрицательные числа. Оказалось, что куда бы мы не поставили шахматного короля, сумма чисел на клетке на которой он стоит, и клетках, которые он бьёт, хотя бы 16.

Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на всей доске?

Ответ: 144

2. В клетках шахматной доски 11×11 расставили неотрицательные числа. Оказалось, что куда бы мы не поставили шахматного короля, сумма чисел на клетке на которой он стоит, и клетках, которые он бьёт, хотя бы 12.

Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на всей доске?

Ответ: 192

3. В клетках шахматной доски 14×14 расставили неотрицательные числа. Оказалось, что куда бы мы не поставили шахматного короля, сумма чисел на клетке на которой он стоит, и клетках, которые он бьёт, хотя бы 8.

Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на всей доске?

Ответ: 200

2.5 Задания для 7 класса

Задача 1. (2 балла)

1. ABC — равнобедренный треугольник, $AB = BC$, $\angle A = 70°$, $\angle B = 40°$. Точка D взята на луче CA за точкой A так, что $AD = BD$. Найдите $\angle DBA$ (в градусах).

Ответ: 30

2. ABC — равнобедренный треугольник, $AB = AC$, $\angle B = 75°$, $\angle A = 30°$. Точка D взята на луче CB за точкой B так, что $AD = BD$. Найдите $\angle DAB$ (в градусах).

Ответ: 45

3. ABC — равнобедренный треугольник, $AB = BC$, $\angle A = 80°$, $\angle B = 20°$. Точка D взята на луче CA за точкой A так, что $AD = BD$. Найдите $\angle DBA$ (в градусах).

Ответ: 60

Задача 2. (2 балла)

1. По кругу стоят 2018 камней, на одном из которых сидит лягушка. Лягушка умеет прыгать на 32 камня вперед по часовой стрелке и на 26 камней против часовой стрелке. Сколько камней может посетить лягушка с учетом того камня, на котором она изначально сидит?

Ответ: 1009

2. По кругу стоят 2019 камней, на одном из которых сидит лягушка. Лягушка умеет прыгать на 21 камня вперед по часовой стрелке и на 15 камней против часовой стрелке. Сколько камней может посетить лягушка с учетом того камня, на котором она изначально сидит?

Ответ: 673

3. По кругу стоят 2020 камней, на одном из которых сидит лягушка. Лягушка умеет прыгать на 28 камня вперед по часовой стрелке и на 20 камней против часовой стрелке. Сколько камней может посетить лягушка с учетом того камня, на котором она изначально сидит?

Ответ: 505

Задача 3. (3 балла)

1. В понедельник открылись несколько фирм, акции которых стоили одинаково. Каждый следующий день акции каждой фирмы дорожали либо на 10%, либо на 21%. Во вторник на следующей неделе, оказалось что акции всех фирм стоят по-разному. Какое наибольшее количество фирм могло быть открыто?

Ответ: 9

2. В понедельник открылись несколько фирм, акции которых стоили одинаково. Каждый следующий день акции каждой фирмы дорожали либо на 20%, либо на 44%. В среду на следующей неделе оказалось, что акции всех фирм стоят по-разному. Какое наибольшее количество фирм могло быть открыто?

Ответ: 10

3. В понедельник открылись несколько фирм, акции которых стоили одинаково. Каждый следующий день акции каждой фирмы дешевели либо на 10%, либо на 19%. В четверг на следующей неделе оказалось, что акции всех фирм стоят по-разному. Какое наибольшее количество фирм могло быть открыто?

Ответ: 11

Задача 4. (3 балла)

1. В комнате находятся рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут, всего 20 человек (и те, и другие присутствуют). Каждого из них спросили, сколько в комнате рыцарей. Прозвучали все возможные ответы от 1 до некоторого k, каждый ответ прозвучал одинаковое количество раз.

Сколько рыцарей могло быть на самом деле? Перечислите все возможные ответы в порядке возрастания или убывания через запятую.

Ответ: 1, 2, 4 || 4, 2, 1

2. В комнате находятся рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут, всего 45 человек (и те, и другие присутствуют). Каждого из них спросили, сколько в комнате рыцарей. Прозвучали все возможные ответы от 1 до некоторого k, каждый ответ прозвучал одинаковое количество раз.

Сколько рыцарей могло быть на самом деле? Перечислите все возможные ответы в порядке возрастания или убывания через запятую.

Ответ: 1, 3, 5 || 5, 3, 1

3. В комнате находятся рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут, всего 50 человек (и те, и другие присутствуют). Каждого из них спросили, сколько в комнате рыцарей. Прозвучали все возможные ответы от 1 до некоторого k, каждый ответ прозвучал одинаковое количество раз.

Сколько рыцарей могло быть на самом деле? Перечислите все возможные ответы в порядке возрастания или убывания через запятую.

Ответ: 1, 2, 5 || 5, 2, 1

Задача 5. (3 балла)

1. Участники ралли стартуют каждый час, начиная с полуночи. Первая машина едет со скоростью 100 км/ч, каждая следующая — на 5 км/ч быстрее предыдущей.

Какая по счёту машина будет дальше от старта ровно через двое суток после старта начала ралли? (У каждой машины несколько водителей, поэтому они едут без остановок).

Ответ: 15

2. Участники ралли стартуют каждый час, начиная с полуночи. Первая машина едет со скоростью 80 км/ч, каждая следующая — на 4 км/ч быстрее предыдущей.

Какая по счёту машина будет дальше от старта ровно через трое суток после старта начала ралли? (У каждой машины несколько водителей, поэтому они едут без остановок).

Ответ: 27

3. Участники ралли стартуют каждый час, начиная с полуночи. Первая машина едет со скоростью 60 км/ч, каждая следующая — на 1 км/ч быстрее предыдущей.

Какая по счёту машина будет дальше от старта ровно через четверо суток после старта начала ралли? (У каждой машины несколько водителей, поэтому они едут без остановок).

Ответ: 19

Задача 6. (3 балла)

1. На плоскости нарисовано 5 различных прямых. Любые две пересекаются, никакие четыре не пересекаются в одной точке. Какое наименьшее количество точек пересечения они могут образовывать?

Ответ: 6

2. На плоскости нарисовано 6 различных прямых. Любые две пересекаются, никакие четыре не пересекаются в одной точке. Какое наименьшее количество точек пересечения они могут образовывать?

Ответ: 7

3. На плоскости нарисовано 5 различных прямых. Любые две пересекаются, но все прямые не пересекаются в одной точке. Какое наименьшее количество точек пересечения они могут образовывать?

Ответ: 5

Задача 7. (3 балла)

1. У Ани есть число 13. Сначала Аня записала последнюю цифру числа 13, затем возвела 13 в квадрат и записала последнюю цифру, затем возвела 13 в куб и записала

последнюю цифру и так далее до тех пор, пока Аня не записала последнюю цифру числа 13^{2018}. Сколько среди написанных цифр кратных трем?

Ответ: 1010

2. У Ани есть число 17. Сначала Аня записала последнюю цифру числа 17, затем возвела 17 в квадрат и записала последнюю цифру, затем возвела 17 в куб и записала последнюю цифру и так далее до тех пор, пока Аня не записала последнюю цифру числа 17^{2018}. Сколько среди написанных цифр кратных трем?

Ответ: 1009

3. У Ани есть число 18. Сначала Аня записала последнюю цифру числа 18, затем возвела 18 в квадрат и записала последнюю цифру, затем возвела 18 в куб и записала последнюю цифру и так далее до тех пор, пока Аня не записала последнюю цифру числа 18^{2018}. Сколько среди написанных цифр не кратных четырем?

Ответ. 1008

Задача 8. (3 балла)

1. Дан четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = 6$, $BC = 9$, $AD = 2$. Найдите сумму всех возможных значений стороны CD, если известно, что длины AC и CD — это некоторые натуральные числа.

Ответ: 117

2. Дан четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = 5$, $BC = 8$, $AD = 3$. Найдите сумму всех возможных значений стороны CD, если известно, что длины AC и CD — это некоторые натуральные числа.

Ответ: 104

3. Дан четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = 6$, $BC = 7$, $AD = 2$. Найдите сумму всех возможных значений стороны CD, если известно, что длины AC и CD — это некоторые натуральные числа.

Ответ: 91

Задача 9. (3 балла)

1. У пришельца на лапе 16 пальцев. Каждый из пальцев имеет свое уникальное название, для простоты присвоим каждому пальцу свой уникальный номер от 1 до 16. Пришелец стал считать следующим образом: 1 — палец №1, 2 — палец №2, ..., 16 — палец №16, затем в обратном поряде: 17 — палец №15, 18 — палец №14 и так далее (как только пришелец натыкался на крайний палец, то есть палец №1 или палец №16, он продолжал считать в другом направлении).

Какой палец будет посчитан 2018-ым?

Ответ: 8

2. У пришельца на лапе 18 пальцев. Каждый из пальцев имеет свое уникальное название, для простоты присвоим каждому пальцу свой уникальный номер от 1 до 18. Пришелец стал считать следующим образом: 1 — палец №1, 2 — палец №2, ..., 18 — палец №18, затем в обратном поряде: 19 — палец №17, 20 — палец №16 и так далее (как только пришелец натыкался на крайний палец, то есть палец №1 или палец №18, он продолжал считать в другом направлении).

Какой палец будет посчитан 2018-ым?

Ответ: 12

3. У пришельца на лапе 20 пальцев. Каждый из пальцев имеет свое уникальное название, для простоты присвоим каждому пальцу свой уникальный номер от 1 до 20. Пришелец стал считать следующим образом: 1 — палец №1, 2 — палец №2, ..., 20 — палец №20, затем в обратном поряде: 21 — палец №19, 22 — палец №18 и так далее (как только пришелец натыкался на крайний палец, то есть палец №1 или палец №20, он продолжал считать в другом направлении).

Какой палец будет посчитан 2018-ым?

Ответ. 4

Задача 10. (5 баллов)

1. В клетках шахматной доски 8×8 расставили неотрицательные числа. Оказалось, что куда бы мы не поставили шахматного короля, сумма чисел на клетке на которой он стоит, и клетках, которые он бьёт, хотя бы 16.

Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на всей доске?

Ответ: 144

2. В клетках шахматной доски 11×11 расставили неотрицательные числа. Оказалось, что куда бы мы не поставили шахматного короля, сумма чисел на клетке на которой он стоит, и клетках, которые он бьёт, хотя бы 12.

Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на всей доске?

Ответ: 192

3. В клетках шахматной доски 14×14 расставили неотрицательные числа. Оказалось, что куда бы мы не поставили шахматного короля, сумма чисел на клетке на которой он стоит, и клетках, которые он бьёт, хотя бы 8.

Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на всей доске?

Ответ: 200

3 Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады

3.1 Задания для 11 класса

Задача 1. (2 балла)

1. Известно, что $\log_c a = 5(\log_b a + \log_c b)$. Найдите $\log_a b + \log_b c$.

Ответ: 0,2 || 1/5

2. Известно, что $\log_c b = 4(\log_a b + \log_c a)$. Найдите $\log_b a + \log_a c$.

Ответ: 0,25 || 1/4

3. Известно, что $\log_b c = 2(\log_a c + \log_b a)$. Найдите $\log_c a + \log_a b$.

Ответ: 0,5 || 1/2

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления

Задача 2. (2 балла)

1. Координаты двух векторов в пространстве — шесть различных натуральных чисел. Какое наименьшее значение может принимать их скалярное произведение?

Ответ: 28

2. Координаты двух векторов в пространстве — шесть различных нечётных натуральных чисел. Какое наименьшее значение может принимать их скалярное произведение?

Ответ: 73

3. Координаты двух векторов в пространстве — шесть различных чётных натуральных чисел. Какое наименьшее значение может принимать их скалярное произведение?

Ответ: 112

Ко вводу разрешены цифры

Задача 3. (2 балла)

1. Положительная последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет соотношению $x_{n+1}^2 + x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 1$ и начальному условию $x_1 = 3$. Найдите x_{331}.

Ответ: 18

2. Положительная последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет соотношению $x_{n+1}^2 + x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 2$ и начальному условию $x_1 = 2$. Найдите x_{251}.

Ответ: 22

3. Положительная последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет соотношению $x_{n+1}^2 + x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 3$ и начальному условию $x_1 = 1$. Найдите x_{331}.

Ответ: 31

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления

Задача 4. (3 балла)

1. В классе учатся 20 учеников. У каждого из них спросили, сколько у него друзей в классе. Каждое число n либо прозвучало в ответ ровно n раз, либо не прозвучало вовсе. Какое наибольшее значения может принимать сумма всех названных чисел?

Ответ: 272.

2. В классе учатся 30 учеников. У каждого из них спросили, сколько у него друзей в классе. Каждое число n либо прозвучало в ответ ровно n раз, либо не прозвучало вовсе. Какое наибольшее значения может принимать сумма всех названных чисел?

Ответ: 650.

3. В классе учатся 12 учеников. У каждого из них спросили, сколько у него друзей в классе. Каждое число n либо прозвучало в ответ ровно n раз, либо не прозвучало вовсе. Какое наибольшее значения может принимать сумма всех названных чисел?

Ответ: 90

Ко вводу разрешены цифры.

Задача 5.(3 балла)

1. Функция $f(x,y)$ такова, что $f(x+y,x-y) = 2f(x,y) = 2f(y,x)$. Известно, что $f(128,32) = 64000$. Найдите $f(5,-3)$.

Ответ: 125

2. Функция $f(x,y)$ такова, что $f(x+y,x-y) = 2f(x,y) = 2f(y,x)$. Известно, что $f(224,32) = 10240$. Найдите $f(-3,4)$.

Ответ: 5

3. Функция $f(x,y)$ такова, что $f(x+y,x-y) = 2f(x,y) = 2f(y,x)$. Известно, что $f(128,32) = 32000$. Найдите $f(5,-3)$.

Ответ: 125/2 || 62,5

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления

Задача 6. (3 балла)

1. Числа x, y, z удовлетворяют соотношениям $\sin(x+y+z) = \frac{7}{25}$ и $\cos x \cos y \cos z = \frac{6}{25}$. Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x$.

Если возможны несколько вариантов ответа, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -3; 5 || 5; -3

2. Числа x, y, z удовлетворяют соотношениям $\sin(x+y+z) = \frac{12}{37}$ и $\cos x \cos y \cos z = \frac{5}{37}$. Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x$.

Если возможны несколько вариантов ответа, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -6; 8 || 8; -6

3. Числа x, y, z удовлетворяют соотношениям $\sin(x+y+z) = \frac{9}{41}$ и $\cos x \cos y \cos z = \frac{5}{41}$. Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x$.

Если возможны несколько вариантов ответа, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -7; 9 || 9; -7

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления, точка с запятой

Задача 7. (3 балла)

1. Решите уравнение $p^2 + q^2 = r^2 + 6p$ в несоставных натуральных числах. В ответе укажите $p+q+r$. Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 6; 10 || 10; 6

2. Решите уравнение $p^2 + q^2 = r^2 + 10p$ в несоставных натуральных числах. В ответе укажите $p+q+r$. Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 14; 10 || 10; 14

3. Решите уравнение $p^2 + q^2 = r^2 + 6p + 4q$ в несоставных натуральных числах. В ответе укажите $p+q+r$. Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 12; 10 || 10; 12

Ко вводу разрешены цифры, точка с запятой

Задача 8. (3 балла)

1. Каждую из вершин тетраэдра объёма 108 симметрично отразили относительно точки пересечения медиан противоположной грани. Получившиеся четыре точки образовали новый тетраэдр. Найдите его объём.

Ответ: 500

2. Каждую из вершин тетраэдра объёма 5,4 симметрично отразили относительно точки пересечения медиан противоположной грани. Получившиеся четыре точки образовали новый тетраэдр. Найдите его объём.

Ответ: 25

3. Каждую из вершин тетраэдра объёма 216 симметрично отразили относительно точки пересечения медиан противоположной грани. Получившиеся четыре точки образовали новый тетраэдр. Найдите его объём.

Ответ: 1000

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления

Задача 9. (4 балла)

1. Окружность S_1 пересекает окружность S_2 в точках A и B и касается окружности S_3 в точке X. Общая касательная окружностей S_1 и S_3 пересекает прямую AB в точке C. Также через C проходит прямая YZ, касающаяся окружности S_2 в точке Y и окружности S_3 в точке Z.

Известно, что $AB = 6$, $BC = 5$, $XZ = 2\sqrt{30}$. Найдите XY.

Предполагается, что точки обозначенные разными буквами, не совпадают. Если возможны несколько вариантов ответа, выпишите их в любом порядке через запятую или точку с запятой.

Ответ: 10

2. Окружность S_1 пересекает окружность S_2 в точках A и B и касается окружности S_3 в точке X. Общая касательная окружностей S_1 и S_3 пересекает прямую AB в точке C. Также через C проходит прямая YZ, касающаяся окружности S_2 в точке Y и окружности S_3 в точке Z.

Известно, что $AB = 7$, $AC = 6$, $XZ = 2\sqrt{14}$. Найдите XY.

Предполагается, что точки обозначенные разными буквами, не совпадают. Если возможны несколько вариантов ответа, выпишите их в любом порядке через запятую или точку с запятой.

Ответ: 16

3. Окружность S_1 пересекает окружность S_2 в точках A и B и касается окружности S_3 в точке Z. Общая касательная окружностей S_1 и S_3 пересекает прямую AB в точке C. Также через C проходит прямая XY, касающаяся окружности S_2 в точке X и окружности S_3 в точке Y.

Известно, что $AB = 7$, $BC = 5$, $XZ = 4\sqrt{6}$. Найдите YZ.

Предполагается, что точки обозначенные разными буквами, не совпадают. Если возможны несколько вариантов ответа, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 12

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления, точка с запятой

Задача 10. (5 баллов)

1. Найдите общую площадь всех областей на декартовой плоскости, в которых выполняется неравенство

$$\{\max(|x|,|y|)\}^2 + 2\{\max(|x|,|y|)\}[\max(|x|,|y|)] \leqslant 3^{-[\max(|x|,|y|)]}.$$

Квадратные скобки обозначают целую часть числа, фигурные — дробную.

Ответ: 6

2. Найдите общую площадь всех областей на декартовой плоскости, в которых выполняется неравенство

$$\{\max(|x|,|y|)\}^2 + 2\{\max(|x|,|y|)\}[\max(|x|,|y|)] \leqslant 4^{-[\max(|x|,|y|)]}.$$

Ответ: 16/3

Квадратные скобки обозначают целую часть числа, фигурные — дробную.

3. Найдите общую площадь всех областей на декартовой плоскости, в которых выполняется неравенство

$$\{\max(|x|,|y|)\}^2 + 2\{\max(|x|,|y|)\}[\max(|x|,|y|)] \leqslant 5^{-[\max(|x|,|y|)]}.$$

Ответ: 5

Квадратные скобки обозначают целую часть числа, фигурные — дробную.

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления

3.2 Задания для 10 класса

Задача 1. (1 балл)

1. Координаты двух векторов на плоскости — четыре различных натуральных числа. Какое наименьшее значение может принимать их скалярное произведение?

Ответ: 10

2. Координаты двух векторов на плоскости — четыре различных нечётных натуральных числа. Какое наименьшее значение может принимать их скалярное произведение?

Ответ: 22

3. Координаты двух векторов на плоскости — четыре различных чётных натуральных числа. Какое наименьшее значение может принимать их скалярное произведение?

Ответ: 40

Ко вводу разрешены цифры

Задача 2. (2 балла)

1. Известно, что в некотором треугольнике радиусы его вневписанных окружностей равны $\frac{11\sqrt{6}}{2}$, $\frac{11\sqrt{6}}{3}$ и $\frac{11\sqrt{6}}{6}$. Найдите квадрат радиуса вписанной окружности для этого треугольника.

Ответ: 6

2. Известно, что в некотором треугольнике радиусы его вневписанных окружностей равны $\frac{3\sqrt{14}}{5}$, $\frac{2\sqrt{14}}{3}$ и $\frac{6\sqrt{14}}{5}$. Найдите квадрат радиуса вписанной окружности для этого треугольника.

Ответ: 0,875 || 7/8

3. Известно, что в некотором треугольнике радиусы его вневписанных окружностей равны $\frac{4\sqrt{5}}{3}$, $\frac{12\sqrt{5}}{7}$ и $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. Найдите квадрат радиуса вписанной окружности для этого треугольника.

Ответ: 1,25 || 5/4

Ко вводу разрешены цифры, минус и знак деления, точка или запятая в качетсве десятичного разделителя

Задача 3. (3 балла)

1. Окружность, радиус которой равен 3, касается гипотенузы прямоугольного треугольника, а также продолжений его обоих катетов. Найдите периметр треугольника.

Ответ: 6

2. Окружность, радиус которой равен 4, касается гипотенузы прямоугольного треугольника, а также продолжений его обоих катетов. Найдите периметр треугольника.

Ответ: 8

3. Окружность, радиус которой равен 5, касается гипотенузы прямоугольного треугольника, а также продолжений его обоих катетов. Найдите периметр треугольника.

Ответ: 10

Ко вводу разрешены цифры, знак деления, точка или запятая в качестве десятичного разделителя

Задача 4. (3 балла)

1. Вычислите сумму: $\frac{1\cdot 2018!}{2018!} + \frac{2\cdot 2018!}{1!\cdot 2017!} + \frac{4\cdot 2018!}{2!\cdot 2016!} + \frac{8\cdot 2018!}{3!\cdot 2015!} + \ldots + \frac{2^{2017}\cdot 2018!}{2017!\cdot 1!} + \frac{2^{2018}\cdot 2018!}{2018!}$

Для обозначения степени используйте значок $\wedge$.

Примеры записи ответа: 390625, 5^8

Ответ: 3^{2018}

2. Вычислите сумму: $\frac{1\cdot 2018!}{2018!} + \frac{3\cdot 2018!}{1!\cdot 2017!} + \frac{9\cdot 2018!}{2!\cdot 2016!} + \frac{27\cdot 2018!}{3!\cdot 2015!} + \ldots + \frac{3^{2017}\cdot 2018!}{2017!\cdot 1!} + \frac{3^{2018}\cdot 2018!}{2018!}$

Для обозначения степени используйте значок $\wedge$.

Примеры записи ответа: 390625, 5^8

Ответ: 4^{2018}

3. Вычислите сумму: $\frac{1\cdot 2019!}{2019!}+\frac{2\cdot 2019!}{1!\cdot 2018!}+\frac{4\cdot 2019!}{2!\cdot 2017!}+\frac{8\cdot 2019!}{3!\cdot 2016!}+\ldots+\frac{2^{2018}\cdot 2019!}{2018!\cdot 1!}+\frac{2^{2019}\cdot 2019!}{2019!}$

Ответ: 3^{2019}

Для обозначения степени используйте значок $\wedge$.

Примеры записи ответа: 390625, 5^8

Ко вводу разрешены цифры, шляпка для обозначения степени

Задача 5. (3 балла)

1. Пусть $m(a)$ и $M(a)$ — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=x^2+2ax-a-3$ на отрезке $[-2;1]$. Решите уравнение $m(a)+M(a)=-9$.

Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 2

2. Пусть $m(a)$ и $M(a)$ - наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=x^2-2ax+a-3$ на отрезке $[-1;2]$. Решите уравнение $m(a)+M(a)=-2$.

Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 0

3. Пусть $m(a)$ и $M(a)$ — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=x^2+2ax+a+3$ на отрезке $[-2;-1]$. Решите уравнение $m(a)+M(a)=4\frac{3}{4}$.

Ответ: 1.5 || 3/2

Ко вводу разрешены цифры, минус и знак деления, точка или запятая в качестве десятичного разделителя, точка с запятой

Задача 6. (3 балла)

1. Многочлен $P(x)=(x+3)^4(x^2+3x+1)^5$ представлен в виде $\sum\limits_{k=0}^{14}a_k(x+1)^k$. Найдите $a_0+a_2+\ldots+a_{14}$.

Ответ: 81

2. Многочлен $P(x)=(x+1)^6(x^2-2x-2)^4$ представлен в виде $\sum\limits_{k=0}^{14}a_k(x+1)^k$. Найдите $a_0+a_2+\ldots+a_{14}$.

Ответ: 16

3. Многочлен $P(x)=(x-4)^4(x^2+\frac{3}{2}x-1)^5$ представлен в виде $\sum\limits_{k=0}^{14}a_k(x+1)^k$. Найдите $a_0+a_2+\ldots+a_{14}$.

Ответ: -256

Ко вводу разрешены цифры, минус и знак деления, точка или запятая в качетсве десятичного разделителя

Задача 7. (3 балла)

1. На плоскости отмечены несколько прямых, среди которых нет параллельных друг другу. На каждой из прямых ровно три точки пересечения с другими отмеченными прямыми.

Найдите наименьшее и наибольшее количество прямых, которые могли бы быть отмечены. В ответе укажите эти числа через точку с запятой

Ответ: 4; 6 || 6; 4

2. На плоскости отмечены несколько прямых. На каждой из прямых ровно две точки пересечения с другими отмеченными прямыми.

Найдите наименьшее и наибольшее количество прямых, которые могли бы быть отмечены. В ответе укажите эти числа через точку с запятой

Ответ: 3; 5 || 5; 3

3. На плоскости отмечены несколько прямых, не пересекающихся в одной точке. На каждой из прямых не больше двух точек пересечения с другими отмеченными прямыми, причём есть прямые и с одной, и с двумя такими точками.

Найдите наименьшее и наибольшее количество прямых, которые могли бы быть отмечены. В ответе укажите эти числа через точку с запятой

Ответ: 3; 4 || 4; 3

Ко вводу разрешены цифры, точка с запятой

Задача 8. (3 балла)

1. Сколько существует пар натуральных чисел, для которых число 1000 является НОК? (Числа в паре могут быть одинаковыми, порядок чисел в паре не важен)

Ответ: 25

2. Сколько существует пар натуральных чисел, для которых число 400 является НОК? (Числа в паре могут быть одинаковыми, порядок чисел в паре не важен)

Ответ: 23

3. Сколько существует пар натуральных чисел, для которых число 392 является НОК? (Числа в паре могут быть одинаковыми, порядок чисел в паре не важен)

Ответ: 18

Ко вводу разрешены цифры

Задача 9. (4 балла)

1. Дана дробно-линейная (не постоянная и не линейная) функция $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Оказалось, что $f(f(x)) = 2f(2x)$ и $bc = -48$. Найдите d. Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -8; 8 || 8; -8

2. Дана дробно-линейная (не постоянная и не линейная) функция $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Оказалось, что $f(f(x)) = 3f(3x)$ и $bc = -63$. Найдите a. Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -3; 3 || 3; -3

3. Дана дробно-линейная (не постоянная и не линейная) функция $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Оказалось, что $f(f(x)) = \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}x)$ и $bc = -12$. Найдите d. Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -2; 2 || 2; -2

Ко вводу разрешены цифры, минус и знак деления, точка или запятая в качестве десятичного разделителя, точка с запятой

Задача 10. (4 балла)

1. Гномы выкопали систему туннелей, которая имела вид прямоугольной сетки 8 на 2. Главный вход расположен в левой нижней вершине $(0, 0)$, а главный выход — в правой верхней вершине $(8, 2)$. Тунели пронумерованы следующим образом: туннель, соединяющий вершины (x, k) и $(x + 1, k)$, имеет номер равный $8k + x + 1$, а туннель, соединяющий вершины (m, y) и $(m, y + 1)$, имеет номер равный $24 + 9y + m + 1$. Произошел обвал, в результате которого все туннели, номера которых являлись простыми числами, стали нерабочими. Гномы смогли восстановить туннель с номером 3. Сколькими способами теперь можно пройти от главного входа до главного выхода, пройдя по каждому туннелю не более одного раза?

Ответ: 16

2. Гномы выкопали систему туннелей, которая имела вид прямоугольной сетки 9 на 2. Главный вход расположен в левой нижней вершине $(0, 0)$, а главный выход — в правой верхней вершине $(9, 2)$. Тунели пронумерованы следующим образом: туннель, соединяющий вершины (x, k) и $(x + 1, k)$, имеет номер равный $9k + x + 1$, а туннель, соединяющий вершины (m, y) и $(m, y + 1)$, имеет номер равный $27 + 10y + m + 1$. Произошел обвал,

в результате которого все туннели, номера которых являлись простыми числами, стали нерабочими, а так же нерабочим оказался туннель под номером 34. Сколькими способами теперь можно пройти от главного входа до главного выхода, пройдя по каждому туннелю не более одного раза?

Ответ: 3

3. Гномы выкопали систему туннелей, которая имела вид прямоугольной сетки 7 на 2. Главный вход расположен в левой нижней вершине $(0, 0)$, а главный выход — в правой верхней вершине $(7, 2)$. Тунели пронумерованы следующим образом: туннель, соединяющий вершины (x, k) и $(x + 1, k)$, имеет номер равный $7k + x + 1$, а туннель, соединяющий вершины (m, y) и $(m, y + 1)$, имеет номер равный $21 + 8y + m + 1$. Произошел обвал, в результате которого все туннели, номера которых являлись простыми числами, стали нерабочими. Сколькими способами теперь можно пройти от главного входа до главного выхода, пройдя по каждому туннелю не более одного раза?

Ответ: 8

Ко вводу разрешены цифры

3.3 Задания для 9 класса

Задача 1. (1 балл)

1. Координаты двух векторов на плоскости — четыре различных натуральных числа. Какое наименьшее значение может принимать их скалярное произведение?

Ответ: 10

2. Координаты двух векторов на плоскости — четыре различных нечётных натуральных числа. Какое наименьшее значение может принимать их скалярное произведение?

Ответ: 22

3. Координаты двух векторов на плоскости — четыре различных чётных натуральных числа. Какое наименьшее значение может принимать их скалярное произведение?

Ответ: 40

Ко вводу разрешены цифры

Задача 2. (3 балла)

1. На конференции присутствовали 20 рас пришельцев. Каждый пришелец поздоровался как минимум с 15 представителями из каждой расы (в том чисел и с представителями из своей расы). Какое наибольшее количество пришельцев одной расы могло быть на конференции, если всего участников было 2018?

Ответ: 1714

2. На конференции присутствовали 25 рас пришельцев. Каждый пришелец поздоровался как минимум с 30 представителями из каждой расы (в том чисел и с представителями из своей расы). Какое наибольшее количество пришельцев одной расы могло быть на конференции, если всего участников было 2019?

Ответ: 1275

3. На конференции присутствовали 15 рас пришельцев. Каждый пришелец поздоровался как минимум с 30 представителями из каждой расы (в том чисел и с представителями из своей расы). Какое наибольшее количество пришельцев одной расы могло быть на конференции, если всего участников было 2018?

Ответ: 1584

Ко вводу разрешены цифры

Задача 3. (3 балла)

1. Найдите наибольшее трехзначное число, которое при делении на 13 дает остаток 2, а при делении на 15 остаток равен 6.

Ответ: 951

2 вариант. Найдите наибольшее трехзначное число, которое при делении на 13 дает остаток 3, а при делении на 14 остаток равен 2.

Ответ: 926

3 вариант. Найдите наибольшее трехзначное число, которое при делении на 14 дает остаток 5, а при делении на 15 остаток равен 3

Ответ: 873

Ко вводу разрешены цифры

Задача 4. (3 балла)

1. Два квадратных трёхчлена имеют общий корень -5, причём у одного из них это больший корень, а у другого — меньший. Длина отрезка, отсекаемого графиками этих трёхчленов на оси ординат равна 15. Найдите длину отрезка, высекаемого графиками трёхчленов на оси абсцисс.

Ответ: 3

2. Два квадратных трёхчлена имеют общий корень -7, причём у одного из них это больший корень, а у другого — меньший. Длина отрезка, отсекаемого графиками этих

трёхчленов на оси ординат равна 14. Найдите длину отрезка, высекаемого графиками трёхчленов на оси абсцисс.

Ответ: 2

3. Два квадратных трёхчлена имеют общий корень -3, причём у одного из них это больший корень, а у другого — меньший. Длина отрезка, отсекаемого графиками этих трёхчленов на оси ординат равна 12. Найдите длину отрезка, высекаемого графиками трёхчленов на оси абсцисс.

Ответ: 4

Ко вводу разрешены цифры, знак деления, точка или запятая в качестве десятичного разделителя

Задача 5. (3 балла)

1. На доске было записано стозначное число. За один ход можно было либо вычесть из любой цифры записанного на доске числа 7, либо заменить две соседние цифры на их сумму, если она меньше 10 (уменьшив таким образом количество цирф на одну).

После 150 ходов на доске оказалось число 7. Какой остаток давало исходное число при делении на 9?

Ответ: 4

2. На доске было записано стопятидесятизначное число. За один ход можно было либо вычесть из любой цифры записанного на доске числа 8, либо заменить две соседние цифры на их сумму, если она меньше 10 (уменьшив таким образом количество цирф на одну).

После 250 ходов на доске оказалось число 8. Какой остаток давало исходное число при делении на 9?

Ответ: 6

3. На доске было записано стосороказначное число. За один ход можно было либо вычесть из любой цифры записанного на доске числа 6, либо заменить две соседние цифры на их сумму, если она меньше 10 (уменьшив таким образом количество цирф на одну).

После 200 ходов на доске оказалось число 5. Какой остаток давало исходное число при делении на 9?

Ответ: 2

Ко вводу разрешены цифры

Задача 6. (3 балла)

1. Известно, что в некотором треугольнике радиусы его вневписанных окружностей равны $\frac{11\sqrt{6}}{2}$, $\frac{11\sqrt{6}}{3}$ и $\frac{11\sqrt{6}}{6}$. Найдите квадрат радиуса вписанной окружности для этого треугольника.

Ответ: 6

2. Известно, что в некотором треугольнике радиусы его вневписанных окружностей равны $\frac{3\sqrt{14}}{5}$, $\frac{2\sqrt{14}}{3}$ и $\frac{6\sqrt{14}}{5}$. Найдите квадрат радиуса вписанной окружности для этого треугольника.

Ответ: 0,875 || 7/8

3. Известно, что в некотором треугольнике радиусы его вневписанных окружностей равны $\frac{4\sqrt{5}}{3}$, $\frac{12\sqrt{5}}{7}$ и $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. Найдите квадрат радиуса вписанной окружности для этого треугольника.

Ответ: 1,25 || 5/4

Ко вводу разрешены цифры, минус и знак деления, точка или запятая в качетсве десятичного разделителя

Задача 7. (3 балла)

1. Окружность, радиус которой равен 3, касается гипотенузы прямоугольного треугольника, а также продолжений его обоих катетов. Найдите периметр треугольника.

Ответ: 6

2. Окружность, радиус которой равен 4, касается гипотенузы прямоугольного треугольника, а также продолжений его обоих катетов. Найдите периметр треугольника.

Ответ: 8

3. Окружность, радиус которой равен 5, касается гипотенузы прямоугольного треугольника, а также продолжений его обоих катетов. Найдите периметр треугольника.

Ответ: 10

Ко вводу разрешены цифры, знак деления, точка или запятая в качестве десятичного разделителя

Задача 8. (3 балла)

1. На плоскости отмечены несколько прямых, среди которых нет параллельных друг другу. На каждой из прямых ровно три точки пересечения с другими отмеченными прямыми.

Найдите наименьшее и наибольшее количество прямых, которые могли бы быть отмечены. В ответе укажите эти числа через точку с запятой

Ответ: 4; 6 || 6; 4

2. На плоскости отмечены несколько прямых. На каждой из прямых ровно две точки пересечения с другими отмеченными прямыми.

Найдите наименьшее и наибольшее количество прямых, которые могли бы быть отмечены. В ответе укажите эти числа через точку с запятой

Ответ: 3; 5 || 5; 3

3. На плоскости отмечены несколько прямых, не пересекающихся в одной точке. На каждой из прямых не больше двух точек пересечения с другими отмеченными прямыми, причём есть прямые и с одной, и с двумя такими точками.

Найдите наименьшее и наибольшее количество прямых, которые могли бы быть отмечены. В ответе укажите эти числа через точку с запятой

Ответ: 3; 4 || 4; 3

Ко вводу разрешены цифры, точка с запятой

Задача 9. (3 балла)

1. Сколько существует пар натуральных чисел, для которых число 1000 является НОК? (Числа в паре могут быть одинаковыми, порядок чисел в паре не важен)

Ответ: 25

2. Сколько существует пар натуральных чисел, для которых число 400 является НОК? (Числа в паре могут быть одинаковыми, порядок чисел в паре не важен)

Ответ: 23

3. Сколько существует пар натуральных чисел, для которых число 392 является НОК? (Числа в паре могут быть одинаковыми, порядок чисел в паре не важен)

Ответ: 18

Ко вводу разрешены цифры

Задача 10. (4 балла)

1. Гномы выкопали систему туннелей, которая имела вид прямоугольной сетки 8 на 2. Главный вход расположен в левой нижней вершине $(0,0)$, а главный выход — в правой верхней вершине $(8,2)$. Тунели пронумерованы следующим образом: туннель, соединяющий вершины (x,k) и $(x+1,k)$, имеет номер равный $8k+x+1$, а туннель, соединяющий вершины (m,y) и $(m,y+1)$, имеет номер равный $24+9y+m+1$. Произошел обвал, в результате которого все туннели, номера которых являлись простыми числами, стали нерабочими. Гномы смогли восстановить туннель с номером 3. Сколькими способами теперь можно пройти от главного входа до главного выхода, пройдя по каждому туннелю не более одного раза?

Ответ: 16

2. Гномы выкопали систему туннелей, которая имела вид прямоугольной сетки 9 на 2. Главный вход расположен в левой нижней вершине $(0, 0)$, а главный выход — в правой верхней вершине $(9, 2)$. Тунели пронумерованы следующим образом: туннель, соединяющий вершины (x, k) и $(x + 1, k)$, имеет номер равный $9k + x + 1$, а туннель, соединяющий вершины (m, y) и $(m, y + 1)$, имеет номер равный $27 + 10y + m + 1$. Произошел обвал, в результате которого все туннели, номера которых являлись простыми числами, стали нерабочими, а так же нерабочим оказался туннель под номером 34. Сколькими способами теперь можно пройти от главного входа до главного выхода, пройдя по каждому туннелю не более одного раза?

Ответ: 3

3. Гномы выкопали систему туннелей, которая имела вид прямоугольной сетки 7 на 2. Главный вход расположен в левой нижней вершине $(0, 0)$, а главный выход — в правой верхней вершине $(7, 2)$. Тунели пронумерованы следующим образом: туннель, соединяющий вершины (x, k) и $(x + 1, k)$, имеет номер равный $7k + x + 1$, а туннель, соединяющий вершины (m, y) и $(m, y + 1)$, имеет номер равный $21 + 8y + m + 1$. Произошел обвал, в результате которого все туннели, номера которых являлись простыми числами, стали нерабочими. Сколькими способами теперь можно пройти от главного входа до главного выхода, пройдя по каждому туннелю не более одного раза?

Ответ: 8

Ко вводу разрешены цифры

3.4 Задания для 8 класса

Задача 1. (2 балла)

1. В параллелограммах $ABCD$ и $AEFD$ провели высоты $BP = 7$ и $FQ = 10$ к стороне AD. Найдите длину перпендикуляра из сточки C на EF. Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 3; 17 || 17; 3

2. В параллелограммах $ABCD$ и $AEFD$ провели высоты $BP = 5$ и $FQ = 7$ к стороне AD. Найдите длину перпендикуляра из сточки C на EF. Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 2; 12 || 12; 2

3. В параллелограммах $ABCD$ и $AEFD$ провели высоты $BP = 5$ и $FQ = 9$ к стороне AD. Найдите длину перпендикуляра из сточки C на EF. Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 4; 14 || 14; 4

Задача 2. (2 балла)

1. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D. Оказалось, что $BC > AB = 5$, $BD = 4$, треугольники ABD и BCD равнобедренные. Найдите AC. Если вариантов ответа несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 9; 10 || 10; 9

2. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D. Оказалось, что $AB > BC = 6$, $BD = 7$, треугольники ABD и BCD равнобедренные. Найдите AC. Если вариантов ответа несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 12; 13 || 13; 12

3. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка D. Оказалось, что $AB > AC = 4$, $AD = 3$, треугольники ABD и ACD равнобедренные. Найдите BC. Если вариантов ответа несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 7; 8 || 8; 7

Разрешены ко вводу: цифры, точка или запятая как десятичный разделитель, знак деления, точка с запятой

Задача 3. (3 балла)

1. В шестиугольнике $ABCDEF$ стороны — различные натуральные числа от 1 до 6. Какое наибольшее целочисленное значение может принимать периметр треугольника ACE, если все его стороны целые?

Ответ: 18

2. В шестиугольнике $ABCDEF$ стороны — различные натуральные числа от 2 до 7. Какое наибольшее целочисленное значение может принимать периметр треугольника ACE, если все его стороны целые?

Ответ: 24

3. В шестиугольнике $ABCDEF$ стороны — различные натуральные числа от 3 до 8. Какое наибольшее целочисленное значение может принимать периметр треугольника ACE, если все его стороны целые?

Ответ: 30

Задача 4. (3 балла)

1. Сколько существует пар натуральных чисел, для которых число 100 является НОК? (Числа в паре могут быть одинаковыми, порядок чисел в паре не важен)

Ответ: 13

2. Сколько существует пар натуральных чисел, для которых число 80 является НОК? (Числа в паре могут быть одинаковыми, порядок чисел в паре не важен)

Ответ: 14

3. Сколько существует пар натуральных чисел, для которых число 189 является НОК? (Числа в паре могут быть одинаковыми, порядок чисел в паре не важен)

Ответ: 11

Ко вводу разрешены цифры

Задача 5. (3 балла)

1. За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, всего 30 человек. Каждого из них спросили, сколько лжецов среди его соседей. В ответ каждый назвал число от 0 до 2, сумма полученных чисел оказалась равна 40. Какое наименьшее количество лжецов могла быть за столом?

Ответ: 10

2. За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, всего 40 человек. Каждого из них спросили, сколько лжецов среди его соседей. В ответ каждый назвал число от 0 до 2, сумма полученных чисел оказалась равна 48. Какое наименьшее количество лжецов могла быть за столом?

Ответ: 12

3. За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, всего 40 человек. Каждого из них спросили, сколько лжецов среди его соседей. В ответ каждый назвал число от 0 до 2, сумма полученных чисел оказалась равна 36. Какое наименьшее количество лжецов могла быть за столом?

Ответ: 9

Задача 6. (3 балла)

1. Клетки доски 8×8 раскрашены в красный, синий и белый цвета. Для каждой пары цветов посчитали количество пар соседних клеток, одна из которых покрашена в один из этих цветов, а вторая в другой. Получились три числа. Какое наибольшее значение может принимать наименьшее из этих чисел?

Ответ: 37

2. Клетки доски 11×11 раскрашены в красный, синий и белый цвета. Для каждой пары цветов посчитали количество пар соседних клеток, одна из которых покрашена в один из этих цветов, а вторая в другой. Получились три числа. Какое наибольшее значение может принимать наименьшее из этих чисел?

Ответ: 73

3. Клетки доски 14×14 раскрашены в красный, синий и белый цвета. Для каждой пары цветов посчитали количество пар соседних клеток, одна из которых покрашена в один из этих цветов, а вторая в другой. Получились три числа. Какое наибольшее значение может принимать наименьшее из этих чисел?

Ответ: 121

Задача 7. (3 балла)

1. На конференции присутствовали 20 рас пришельцев. Каждый пришелец поздоровался как минимум с 15 представителями из каждой расы (в том чисел и с представителями из своей расы). Какое наибольшее количество пришельцев одной расы могло быть на конференции, если всего участников было 2018?

Ответ: 1714

2. На конференции присутствовали 25 рас пришельцев. Каждый пришелец поздоровался как минимум с 30 представителями из каждой расы (в том чисел и с представителями из своей расы). Какое наибольшее количество пришельцев одной расы могло быть на конференции, если всего участников было 2019?

Ответ: 1275

3. На конференции присутствовали 15 рас пришельцев. Каждый пришелец поздоровался как минимум с 30 представителями из каждой расы (в том чисел и с представителями из своей расы). Какое наибольшее количество пришельцев одной расы могло быть на конференции, если всего участников было 2018?

Ответ: 1584

Ко вводу разрешены цифры

Задача 8. (3 балла)

1. Найдите наибольшее трехзначное число, которое при делении на 13 дает остаток 2, а при делении на 15 остаток равен 6.

Ответ: 951

2 вариант. Найдите наибольшее трехзначное число, которое при делении на 13 дает остаток 3, а при делении на 14 остаток равен 2.

Ответ: 926

3 вариант. Найдите наибольшее трехзначное число, которое при делении на 14 дает остаток 5, а при делении на 15 остаток равен 3

Ответ: 873

Ко вводу разрешены цифры

Задача 9. (4 балла)

1. Все трёхзначные числа выписали в таком порядке: 100, 101, 110, 102, 111, 120, 201, ...— числа упорядочены сначала по сумме цифр, потом по возрастанию.

Какое число будет на четыреста десятом месте?

Ответ: 850

2. Все трёхзначные числа выписали в таком порядке: 100, 101, 110, 102, 111, 120, 201, ...— числа упорядочены сначала по сумме цифр, потом по возрастанию.

Какое число будет на четыреста двадцатом месте?

Ответ: 185

3. Все трёхзначные числа выписали в таком порядке: 999, 998, 989, 899, 997, 988, 979, 898, ...— числа упорядочены сначала по сумме цифр, потом по возрастанию.

Какое число будет на четыреста девяностом месте?

Ответ: 904

Задача 10. (4 балла)

1. На доске было записано стозначное число. За один ход можно было либо вычесть из любой цифры записанного на доске числа 7, либо заменить две соседние цифры на их сумму, если она меньше 10 (уменьшив таким образом количество цирф на одну).

После 150 ходов на доске оказалось число 7. Какой остаток давало исходное число при делении на 9?

Ответ: 4

2. На доске было записано стопятидесятизначное число. За один ход можно было либо вычесть из любой цифры записанного на доске числа 8, либо заменить две соседние цифры на их сумму, если она меньше 10 (уменьшив таким образом количество цирф на одну).

После 250 ходов на доске оказалось число 8. Какой остаток давало исходное число при делении на 9?

Ответ: 6

3. На доске было записано стосороказначное число. За один ход можно было либо вычесть из любой цифры записанного на доске числа 6, либо заменить две соседние цифры на их сумму, если она меньше 10 (уменьшив таким образом количество цирф на одну).

После 200 ходов на доске оказалось число 5. Какой остаток давало исходное число при делении на 9?

Ответ: 2 Ко вводу разрешены цифры

3.5 Задания для 7 класса

Задача 1. (2 балла)

1. Поезд должен был пройти 300 км. Пройдя с некоторой скоростью 285 км, он затем уменьшил скорость на 80 км/ч. В итоге поезд пришел на 1 час 20 минут позже намеченного времени. Найдите первоначальную скорость поезда. Ответ запишите в км/ч.

Ответ: 90

2. Поезд должен был пройти 300 км. Пройдя с некоторой скоростью 212 км, он затем уменьшил скорость на 50 км/ч. В итоге поезд пришел на 40 минут позже намеченного времени. Найдите первоначальную скорость поезда. Ответ запишите в км/ч.

Ответ: 110

3 вариант. Поезд должен был пройти 300 км. Пройдя с некоторой скоростью 50 км, он затем уменьшил скорость на 40 км/ч. В итоге поезд пришел на 1 час 40 минут позже намеченного времени. Найдите первоначальную скорость поезда. Ответ запишите в км/ч.

Ответ: 100

Задача 2. (2 балла)

1. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D. Оказалось, что $BC > AB = 5$, $BD = 4$, треугольники ABD и BCD равнобедренные. Найдите AC. Если вариантов ответа несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 9; 10 || 10; 9

2. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D. Оказалось, что $AB > BC = 6$, $BD = 7$, треугольники ABD и BCD равнобедренные. Найдите AC. Если вариантов ответа несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 12; 13 || 13; 12

3. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка D. Оказалось, что $AB > AC = 4$, $AD = 3$, треугольники ABD и ACD равнобедренные. Найдите BC. Если вариантов ответа несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 7; 8 || 8; 7

Разрешены ко вводу: цифры, точка или запятая как десятичный разделитель, знак деления, точка с запятой

Задача 3. (3 балла)

1. В шестиугольнике $ABCDEF$ стороны — различные натуральные числа от 1 до 6. Какое наибольшее целочисленное значение может принимать периметр треугольника ACE, если все его стороны целые?

Ответ: 18

2. В шестиугольнике $ABCDEF$ стороны — различные натуральные числа от 2 до 7. Какое наибольшее целочисленное значение может принимать периметр треугольника ACE, если все его стороны целые?

Ответ: 24

3. В шестиугольнике $ABCDEF$ стороны — различные натуральные числа от 3 до 8. Какое наибольшее целочисленное значение может принимать периметр треугольника ACE, если все его стороны целые?

Ответ: 30

Задача 4. (3 балла)

1. Сколько существует пар натуральных чисел, для которых число 100 является НОК? (Числа в паре могут быть одинаковыми, порядок чисел в паре не важен)

Ответ: 13

2. Сколько существует пар натуральных чисел, для которых число 80 является НОК? (Числа в паре могут быть одинаковыми, порядок чисел в паре не важен)

Ответ: 14

3. Сколько существует пар натуральных чисел, для которых число 189 является НОК? (Числа в паре могут быть одинаковыми, порядок чисел в паре не важен)

Ответ: 11

Ко вводу разрешены цифры

Задача 5. (3 балла)

1. За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, всего 30 человек. Каждого из них спросили, сколько лжецов среди его соседей. В ответ каждый назвал число от 0 до 2, сумма полученных чисел оказалась равна 40. Какое наименьшее количество лжецов могла быть за столом?

Ответ: 10

2. За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, всего 40 человек. Каждого из них спросили, сколько лжецов среди его соседей. В ответ каждый назвал число от 0 до 2, сумма полученных чисел оказалась равна 48. Какое наименьшее количество лжецов могла быть за столом?

Ответ: 12

3. За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, всего 40 человек. Каждого из них спросили, сколько лжецов среди его соседей. В ответ каждый назвал число от 0 до 2, сумма полученных чисел оказалась равна 36. Какое наименьшее количество лжецов могла быть за столом?

Ответ: 9

Задача 6. (3 балла)

1. Клетки доски 8×8 раскрашены в красный, синий и белый цвета. Для каждой пары цветов посчитали количество пар соседних клеток, одна из которых покрашена в один из этих цветов, а вторая в другой. Получились три числа. Какое наибольшее значение может принимать наименьшее из этих чисел?

Ответ: 37

2. Клетки доски 11×11 раскрашены в красный, синий и белый цвета. Для каждой пары цветов посчитали количество пар соседних клеток, одна из которых покрашена в один из этих цветов, а вторая в другой. Получились три числа. Какое наибольшее значение может принимать наименьшее из этих чисел?

Ответ: 73

3. Клетки доски 14×14 раскрашены в красный, синий и белый цвета. Для каждой пары цветов посчитали количество пар соседних клеток, одна из которых покрашена в один из этих цветов, а вторая в другой. Получились три числа. Какое наибольшее значение может принимать наименьшее из этих чисел?

Ответ: 121

Задача 7. (3 балла)

1. Сколько минут в течение дня на электронных часах восьмёрок больше, чем пятёрок?

Ответ: 192

2. Сколько минут в течение дня на электронных часах шестёрок больше, чем двоек?

Ответ: 172

3. Сколько минут в течение дня на электронных часах семёрок больше, чем троек?

Ответ: 187

Задача 8. (3 балла)

1. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{7}$?

Ответ: 8

2. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{9}$?

Ответ: 12

3. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{15}$?
Ответ: 20

Задача 9. (4 балла)

1. У Васи в шкафу лежали 1000 конфет. Каждый день он забирал из шкафа несколько конфет, причём каждый раз это было целое число процентов от имеющихся. Сколько дней Вася мог так делать?

Ответ: 12

2. У Васи в шкафу лежали 500 конфет. Каждый день он забирал из шкафа несколько конфет, причём каждый раз это было целое число процентов от имеющихся. Сколько дней Вася мог так делать?

Ответ: 11

3. У Васи в шкафу лежали 400 конфет. Каждый день он забирал из шкафа несколько конфет, причём каждый раз это было целое число процентов от имеющихся. Сколько дней Вася мог так делать?

Ответ: 10

Задача 10. (4 балла)

1. Все трёхзначные числа выписали в таком порядке: 100, 101, 110, 102, 111, 120, 201, ... — числа упорядочены сначала по сумме цифр, потом по возрастанию.

Какое число будет на четыреста десятом месте?

Ответ: 850

2. Все трёхзначные числа выписали в таком порядке: 100, 101, 110, 102, 111, 120, 201, ... — числа упорядочены сначала по сумме цифр, потом по возрастанию.

Какое число будет на четыреста двадцатом месте?

Ответ: 185

3. Все трёхзначные числа выписали в таком порядке: 999, 998, 989, 899, 997, 988, 979, 898, ... — числа упорядочены сначала по сумме цифр, потом по возрастанию.

Какое число будет на четыреста девяностом месте?

Ответ: 904