Открытая олимпиада школьников (математика)
(№64 Перечня олимпиад школьников, 2020/2021 уч.год)

Оглавление

1 Задания для 11 класса

1.1 Заключительный этап 11 класса

(приведен один из вариантов заданий) **Задача 1. (2 балла)**

Кубический многочлен имеет три корня. Наибольшее его значение на отрезке $[4; 9]$ достигается при $x = 5$, а наименьшее при $x = 7$. Найдите сумму корней многочлена.

Ответ: 18

Решение:

Поскольку в условиях всех вариантов минимум и максимум на отрезке достигаются не в его концах, они достигаются в корнях производной многочлена. Пусть многочлен имеет вид $ax^3 + bx^2 + cx + d$, а его производная, соответственно, $3ax^2 + 2bx + c$. В таком случае сумма корней многочлена равна $\dfrac{-b}{a}$, а сумма корней производной $\dfrac{-2b}{3a}$, то есть составляет $\frac{2}{3}$ от суммы корней многочлена.

Значит, сумма корней многочлена составляет $\frac{3}{2}(x_1 + x_2)$.

x_0	4
x_1	5
x_2	7
x_3	9
Ответ	18

Задача 2. (3 балла)

Найдите сумму натуральных чисел от 1 до 3000 включительно, имеющих с числом 3000 общие делители, большие 1.

Ответ: 3301500

Решение:

$3000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$, то есть нас интересуют числа, деляющиеся на 2, 3 или 5. Найдём сначала количество таких чисел. Для этого воспользуемся принципом включений и исключений. Чётных чисел от 1 до 3000 ровно $\dfrac{3000}{2} = 1500$, кратных трём — $\dfrac{3000}{3} = 1000$, кратных пяти — $\dfrac{3000}{5} = 600$. Однако, если просто сложить числа 1500, 1000 и 600, мы посчитаем некоторые числа 2 раза, а именно, числа, делящиеся на $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 5 = 10$ и $3 \cdot 5 = 15$, поэтому из полученной суммы надо вычесть $\dfrac{3000}{6} = 500$, $\dfrac{3000}{10} = 300$ и $\dfrac{3000}{15} = 200$. Однако, $1500+1000+600-500-300-200 = 2100$ всё ещё неправильный ответ, поскольку в этом выражение числа, имеющие все три простых множителя, сначала считаются три раза, а потом их количество вычитается опять же три раза, поэтому надо снова добавить эти числа. Количество таких чисел — $\dfrac{3000}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 100$, значит, количество чисел, имеющих с 3000 общие делители и не превосходящих его, это 2200.

Заметим теперь, что если какое-то число x имеет с числом N общие делители, то число $N - x$ тоже имеет с N те же самые общие делители. Значит, все интересующие нас числа, кроме чисел 1500 и 3000, разбиваются на пары с суммой 3000 (числу 3000 в пару пришлось бы сопоставить 0, а числу 1500 — само себя). Таких пар получааестя 1099, поэтому итоговый ответ $1099 \cdot 3000 + 3000 + 1500 = 1100 \cdot 3000 + 1500 = 3301500$.

Замечание: числа, меньшие 3000 и взаимно простые с ним разбиваются на пары таким же образом, поэтому участники, знакомые с функцией Эйлера, могли получить формулу для ответа в виде $\dfrac{N(N+1) - N \cdot \varphi(N)}{2}$.

Задача 3. (3 балла)

Палиндром — это слово, которое не меняется, если в нём переставить буквы в обратном порядке, например *abcba*. Сколько различных 11-буквенных слов можно составить из букв a, b, c, d, e так, чтобы они не содержали палиндромов длины больше 1?

Ответ: 393660

Решение:

Заметим, что две центральные буквы любого палиндрома чётной длины одинаковы, то есть образуют палиндром длины два. Точно так же три центральные буквы палиндрома нечётной длины образуют палиндромы длины три. Таким образом, отсутствие в слове палиндромов равносильно отсутствию палиндромов длины 2 и 3. Это, в свою очередь, равносильно тому, что любые три подряд идущие буквы в слове различны.

Первая буква в слове выбирается k способами, для следующей остаётся $k-1$ способ. Каждая из последующих букв не может совпадать с двумя предыдущими, поэтому для неё остаётся $k-2$ спрособов. Все эти числа надо перемножить, поэтому мы получаем формулу $k(k-1)(k-2)^{n-2}$.

n	11
k	5
Формула	$5 \cdot 4 \cdot 3^9$
Ответ	393600

Задача 4. (3 балла)

Положительные числа x, y и z таковы, что $xyz = 8$ и $x \leqslant z$. Докажите неравенство $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6} \geqslant \frac{2x}{z}$

Решение:

Заметим, что сумма коэффициентов в левой части равна единице. Применим неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического для чисел x, x, x, y, y, z:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6} \geqslant \sqrt[6]{x^3y^2z} = \sqrt[6]{x^2y^2z^2 \cdot \frac{x}{z}} = 2\sqrt[6]{\frac{x}{z}}$$

.

Поскольку $x \leqslant z$, $\frac{x}{z} < 1$ и, следовательно, $\sqrt[6]{\frac{x}{z}} \geqslant \frac{x}{z}$.

Задача 5. (3 балла)

Вася выбрал четыре числа и для каждой пары вычислил логарифм большего по основанию меньшего. Получилось шесть логарифмов. Четыре из них равны 15, 20, 21 и 28. Какие значения может принимать наибольший из всех шести логарифмов?

Ответ: 28;420 || 420;28

Решение:

Пусть четыре исходные числа — это $x \leqslant y \leqslant z \leqslant t$. Обозначим $a = \log_x y$, $b = \log_y z$, $c = \log_z t$. Тогда $\log_x z = ab$, $\log_y t = bc$, $\log_x t = abc$, то есть наши шесть логарифмов равны a, b, c, ab, bc и abc. Наибольший из них при этом abc и именно его нам надо найти.

Заметим, что среди наших четырёх логарифмов ни один не является произведением двух других. Это значит, что в каждой тройке (a, b, ab), (b, c, bc), (a, bc, abc), (ab, c, abc) отсутствует хотя бы одно число. Каждое из шести чисел встречается ровно в двух из этих троек, значит, чтобы "разрушить" все тройки, надо удалить два числа, которые вместе в одной тройке не встречаются, то есть, числа, которых мы не знаем, это либо a и c, либо b и abc, либо bc и ab.

Соответственно, у нас есть одна из четвёрок (b, ab, bc, abc), (a, c, ab, bc) и (a, b, c, abc). Третий вариант невозможен, потому что ни одно из наших четырёх чисел не является произведением трёх других. Для того, чтобы четверёка чисел могла соответствовать первому или второму вариантам, необходимо и достаточно, чтобы произведение двух чисел было равно произведению двух оставшихся. Это условие выполняется: $15 \cdot 28 = 20 \cdot 21$.

В первом случае мы имеем $b \cdot abc = ab \cdot bc$, и abc — это наибольшее из наших четырёх чисел. Во втором случае $a \cdot bc = b \cdot ac$ и abc — это как раз искомое произведение. Значит, мы имеем два возможных ответа: 28 и 420.

Задача 6. (4 балла)

Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке O. K, L, M, N — точки касания сторон AB, BC, CD и AD соответственно, KP, LQ, MR и NS — высоты в треугольниках OKB, OLC, OMD, ONA. $OP = 15$, $OA = 32$, $OB = 64$.

Найдите длину отрезка QR.

Ответ: 30

Решение:

Треугольники OKA и ONA — прямоугольные с общей гипотенузой и катетом, равным радиусу окружности, поэтому они равны. Значит, их высоты падают в одну точку общей гипотенузы, то есть KS — высота в треугольнике OKA. Поэтому точки S и P лежат на окружности с диаметром OK. Аналогично точки R и S лежат на окружности с диаметром ON. Поскольку диаметры этих окружностей равны, градусные меры дуги OS в этих окружностях совпадают. В первой окружности на эту дугу опирается $\angle OPS$, а во второй — $\angle ORS$, значит, эти углы равны. (Именно равны, а не дополняют друг друга до $180°$, потому что точки P и R лежат по разные стороны от прямой OS, а окружности симметричны относительно неё).

Аналогично $\angle OPQ = \angle ORQ$. Сложив это с предыдущим равенством, получим $\angle SPQ = \angle SRQ$. Аналогично $\angle PSR = \angle PQR$, то есть четырёхугольник $PRQS$ — параллелограмм. Значит, вместо длины отрезка QR мы можем найти длину отрезка PS.

(Для участников, знакомых с понятием инверсии: можно понять, что вершины четырёхугольника $PQRS$ инверсны вершинам четырёхугольника $ABCD$ относительно нашей окружности, то есть мы только что повторили доказательсьтво теоремы о том, что четырёхугольник, инверсный описанному, является параллелограммом).

По свойству высоты прямоугольного треугольника, $OK^2 = OS \cdot OA$. Аналогично $OK^2 = OP \cdot OB$, откуда $\dfrac{OS}{OB} = \dfrac{OP}{OA} = k$. Кроме того, угол $\angle O$ в треугольниках OBA и OSP общий, поэтому они подобны с коэффициентом k. Значит, $PS = k \cdot AB = k(AK + KB) = k(\sqrt{OA^2 - OK^2} + \sqrt{OB^2 - OK^2}) = \dfrac{OP}{OA}(\sqrt{OA^2 - OB \cdot OP} + \sqrt{OB^2 - OB \cdot OP}) = 30$.

Задача 7. (4 балла)

Два куба с ребром $12\sqrt[4]{\dfrac{8}{11}}$ имеют общую грань. Сечение одного из этих кубов некоторой плоскостью — треугольник площади 16. Сечение другого той же плоскостью — четырёхугольник. Какое наибольшее значение может принимать его площадь?

Ответ: 128

Решение:

Пусть наши кубы — это $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $ABCDA_2B_2C_2D_2$ с общей гранью $ABCD$. Пусть также треугольное сечение первого куба — это KLM, где точка K лежит на AA_1, точка L на AB, а точка M — на AD. Одна из сторон четырёхугольного сечения второго куба — отрезок LM. Две другие — продолжения отрезков KL и KM на грани второго куба, назовём эти отрезки LP и MQ. Чтобы сечение было четырёхугольным, точки P и Q должны находиться на одной грани второго куба, а это может быть только грань $A_2B_2C_2D_2$.

Значит, четырёхугольное сечение второго куба — это трапеция $LMQP$. Нахождение её наибольшей площади равносильно нахождение наибольшей площади треугольника KPQ, который подобен треугольнику KLM. Обозначим этот коэффициент подобия $k = \dfrac{KP}{KL}$. Тогда $k^2 = \dfrac{S_{KPQ}}{S_{KLM}} = \dfrac{S_{KPQ}}{S}$. То есть наша задача равносильна задаче о нахождении максимального коэффициента подобия.

С другой стороны, по теореме Фалеса $k = \dfrac{KP}{KL} = \dfrac{KA_2}{KA} = \dfrac{KA + AA_2}{KA} = 1 + \dfrac{AA_2}{KA}$. То есть коэффициент подобия тем больше, чем меньше KA, а значит, наша задача — минимизировать KA, или, что то же самое, минимизировать KA_2.

Пусть у нас есть треугольник, вершины которого расположены на трёх рёбрах куба, выходящих из одной точки, на расстояниях x, y и z. Найдём формулу площади этого треугольника. Это можно делать по-разному, например, через векторное произведение, или посчитав двумя способами площадь тетраэдра, образованного вершинами треугольника и вершиной куба, но мы вычислим эту площадь по формуле Герона, зная стороны треугольника: $a = \sqrt{x^2 + y^2}$, $b = \sqrt{x^2 + z^2}$ и $c = \sqrt{y^2 + z^2}$.

$$S=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+(b-a))(c-(b-a))}}{4}=\frac{\sqrt{((a+b)^2-c^2)(c^2-(b-a)^2)}}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2-2ab)(c^2-a^2-b^2+c^2+2ab)}}{4}=\underbrace{\frac{\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}}{4}}_{\text{Эту формулу тоже иногда называют формулой Герона}}=$$

$$=\frac{\sqrt{4(x^2+y^2)(x^2+z^2)-((x^2+y^2)+(x^2+z^2)-(y^2+z^2))^2}}{4}=\frac{\sqrt{4x^4+4x^2y^2+4x^2z^2+4y^2z^2-(2x^2)^2}}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2}}{2}$$

Посмотрим на эту формулу для треугольника KPQ и отрезков $x=A_2P$, $y=A_2Q$, $z=A_2K$. С одной стороны, нам надо минимизировать z, а с другой — максимизировать площадь. Очевидно, для этого x и y должны быть максимальны, то есть равны ребру ℓ.

Как мы знаем, $k=\dfrac{KA+AA_2}{KA}=\dfrac{KA+\ell}{KA}$, то есть $KA\cdot k=KA+\ell$, откуда $KA=\dfrac{\ell}{k-1}$, $KA_2=KA+\ell=\dfrac{k\ell}{k-1}$.

Подставляя эти значения в формулу, получаем:

$S_{KPQ}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\ell^4+\ell^2\cdot\left(\dfrac{k\ell}{k-1}\right)^2+\ell^2\cdot\left(\dfrac{k\ell}{k-1}\right)^2}=\dfrac{\ell^2}{2(k-1)}\sqrt{(k-1)^2+2k^2}.$

Соответственно, $S=\dfrac{S_{KPQ}}{k^2}=\dfrac{\ell^2\sqrt{(k-1)^2+2k^2}}{2k^2(k-1)}$, откуда $\dfrac{4S^2}{\ell^4}=\dfrac{(k-1)^2+2k^2}{k^4(k-1)^2}=\dfrac{1}{k^4}+\dfrac{2}{k^2(k-1)^2}$. Правая часть этого равенства убывает при $k>1$, а значит, данное уравнение на k имеет не больше одного решения. Конкретное решение в большинстве вариантов легко подбирается из этого равенства, так как оно целочисленное.

Например, в первом варианте мы получаем уравнение $\dfrac{1}{k^4}+\dfrac{2}{k^2(k-1)^2}=\dfrac{4\cdot16^2}{12^4\cdot\dfrac{8}{11}}=\dfrac{11}{2\cdot3^4}$, откуда сразу возникает желание проверить $k=3$, что оказывается верным.

Ответ получается как разность площадей двух треугольников и равен $(k^2-1)S$.

S	16
ℓ	$12\sqrt[4]{\dfrac{8}{11}}$
k	3
Ответ	128

Задача 8. (4 балла)

Гензель и Гретель играют в игру, Гензель ходит первым. Они по очереди ставят фишки на клетчатую доску 7×8 (7 строк и 8 столбцов). Каждый раз, когда Гретель ставит фишку, она получает 4 очка за каждую фишку, уже стоящую в той же строке и 3 очка за каждую фишку, уже стоящую в том же столбце.

На одной клетке может стоять только одна фишка. Игра заканчивается, когда все клетки доски заполнены.

Какое наибольшее количество очков может заработать Гретель вне зависимости от действий Гензеля?

Ответ: 700

Решение:

Давайте скажем, что Гензель тоже получает очки по тому же принципу, что и Гретель. В таком случае, каждая пара клеток в одной строке даст в итоге какому-то из игроков 4 очка, а каждая пара клеток в одном столбце — 3 очка. В одной строке можно найти $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ пар клеток, а в одном столбце — $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ пару. Общая сумма очков, набранных обоими игроками в конце игры, будет равна $7 \cdot 28 \cdot 4 + 8 \cdot 21 \cdot 3 = 1288$.

Приведём стратегию за Гретель, позволяющую ей каждый ход получать на 4 очка больше, чем перед этим Гензель. Для этого разобъём каждую строку на 8 прямоугольников 1×2. Как только Гензель ставит фишку в одну из клеток прямоугольника, Гретель тут же занимает вторую. Столбцы, в которых находятся эти клетки, идентичны из-за стратегии Гретель, а в строке к моменту её хода находится на одну фишку больше — ровно на ту, которую поставил Гензель.

С другой стороны, если Гензель будет каждый раз выбирать клетку, которая приносит максимальное количество очков, Гретель своим следующим ходом сможет набрать максимум на 4 очка больше, так как добавлением одной фишки Гензель повышает "ценность" каждой из оставшихся клеток не более, чем на 4.

Каждый игрок сделает 28 ходов и, при правильной игре, Гретель наберёт на 112 очков больше. Зная сумму и разность двух чисел, можно легко найти сами числа, это 700 и 588.

Во всех остальных вариантах второй игрок всегда получает большее количество очков за фишку в ряду, длина которого чётна, поэтому описанная стратегия за второго игрока всегда работает.

1.2 Отборочный этап 11 класса. 1 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Окружность с центром в точке O построена на стороне AD четырёхугольника $ABCD$ как на диаметре. Остальные стороны лежат на касательных к этой окружности. Точка E — середина BC. Известно, что $AB = 2$, радиус окружности равен 3. Найдите $\frac{S_{ABEO}}{S_{OECD}}$. Ответ запишите в виде несократимой дроби.

Ответ: 21/31

Задача 2. (2 балла)

Для некоторой функции $f(x)$ её значение и значение её производной в точке x_0 — различные натуральные числа. Производная функции $f(x)$ — возрастающая функция. Найдите наименьшее возможное целое значение $f(x_0 + 1)$.

Ответ: 4

Задача 3. (3 балла)

Какое наибольшее количество прямоугольных параллелепипедов $1 \times 1 \times 6$ можно разместить в кубе $15 \times 15 \times 15$?

Ответ: 558

Задача 4. (3 балла)

Сфера S_1 касается трёх граней куба со стороной 2, а сфера S_2 — сферы S_1 и остальных трёх граней. Найдите наименьшую возможную сумму объёмов этих сфер. Ответ округлите до тысячных в любую сторону.

Ответ: 2,134 || 2,135 || 2.134 || 2.135

Задача 5. (3 балла)

На окружности на плоскости с центром в начале координат отметили 105 точек, а затем выписали их координаты. Какое наименьшее количество различных чисел могло получиться?

Ответ: 53

Задача 6. (3 балла)

Известно, что $\log_a b + \log_b c + \log_c a = \log_b a + \log_c b + \log_a c = 4$. Найдите $\log_a^2 b + \log_b^2 c + \log_c^2 a + \log_b^2 a + \log_c^2 b + \log_a^2 c$.

Ответ: 16

Задача 7. (3 балла)

Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 23$, $a_n = 23^{a_{n-1}}$. Найдите остаток от деления a_{91} на 91.

Ответ: 4

Задача 8. (4 балла)

В клубе есть некоторое количество джентльменов, у каждого из них ровно по 5 друзей. В понедельник в клубе двое из джентльменов рассказали один и тот же анекдот всем своим друзьям. Джентльмен, услышавший анекдот во второй раз, на следующий день рассказывает его всем своим друзьям.

Сколько джентльменов могли рассказать анекдот за неделю (с понедельника по воскресенье)? Укажите наибольшее возможное число.

Ответ: 101

Задача 9. (4 балла)

S_1 — окружность с центром в точке O_1 и радиусом 5. S_2 — окружность с центром в точке O_2 и радиусом 4. S_3 — окружность с центром в точке O_3 и радиусом 6. S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке A, прямая AC — их общая касательная. S_2 и S_3 касаются внешним образом в точке B, прямая BC — их общая касательная. Длина отрезка AC равна 8. Найдите длину отрезка O_1O_3. Укажите точный ответ.

Ответ: 17

Задача 10. (4 балла)

Найдите суммарную длину всех отрезков, составляющих множество решений неравенства

$$\left(\sqrt{\left[\frac{x}{2}\right]\{x\}} - 1\right)\left(\left\{\frac{x}{2}\right\} - \frac{1}{2}\right) \geqslant 0$$

на промежутке $[2; 201]$. Здесь $[z]$ обозначает целую часть z, а $\{z\}$ — дробную.

Ответ: 99,1 || 99.1

1.3 Отборочный этап 11 класса. 2 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Найдите сумму

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3\cdot 5}+\sqrt[3]{25}} + \frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5\cdot 7}+\sqrt[3]{49}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{727^2}+\sqrt[3]{727\cdot 729}+\sqrt[3]{729^2}}$$

Ответ: 4

Задача 2. (3 балла)

Вася взял некоторое число и уменьшил его в два раза. Получившееся число он также уменьшил в два раза, и так далее. Через 1000 операций он впервые получил число, меньшее 10. Петя взял то же самое число и уменьшил его в три раза. Получившееся число он также уменьшил в три раза, и так далее. Через какое наименьшее количество операций он мог получить число, меньшее 10?

Ответ: 630

Задача 3. (3 балла)

Найдите $\sin(\cos(\sin(\cos\ldots\sin(\cos 7)\ldots)$.

Синус и косинус в формуле чередуются и повторяются миллиард раз.

Ответ округлите ВНИЗ до десятых.

Ответ: 0,6

Задача 4. (3 балла)

$P(x)$ — многочлен четвёртой степени. $P(7) - P(1) = 16$, $P'(1) = 3$, $P'(7) = 5$. Найдите $P'(4)$.

Ответ: 2

Задача 5. (3 балла)

Сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ размером $20 \times 20 \times 20$ представляет из себя четырёхугольник, содержащий вершины A и C_1, и имеет целочисленную площадь. Какое наименьшее значение может принимать эта площадь?

Ответ: 490

Задача 6. (3 балла)

Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x + 2y + 3z = 100$?

Ответ: 784

Задача 7. (3 балла)

Две окружности пересекаются в точках A и B. Отрезок CD проходит через точку A, а отрезок KM — через точку B, при этом точки C и K лежат на первой окружности, а точки D и M — на второй. Кроме того, $CD \parallel KM$. $AC = 7$, $AD = 6$, $BM = 12$, $S_{ABKC} = 16$. Найдите AB.

Ответ: 5

Задача 8. (3 балла)

В треугольнике ABC проведена медиана BM. Точка D — середина отрезка AM. На прямой BC взята точка E, а на прямой BD — точка F. Оказалось, что BM — медиана и в треугольнике BEF тоже. L — точка пересечения прямых EF и AB. $FL = 4$. Найдите EM.

Ответ: 2

Задача 9. (3 балла)

В клубе собирателей открыток 15 человек, некоторые их них дружат между собой, у каждого есть хотя бы один друг. Каждый из членов клуба взял 60 открыток и разослал их всем своим друзьям, каждому — одинаковое количество. Какое наибольшее число открыток в сумме могли получить два члена клуба от своих друзей (включая, возможно, друг друга)?

Ответ: 805

Задача 10. (5 баллов)

Юра расставляет коней на доске 8×8. После этого он подсчитывает очки следующим образом: за каждого коня Юра получает 15 очков минус количество других коней, которые бьёт этот конь. Запас коней не ограничен.

Какое наибольшее количество очков мог набрать Юра?

Ответ: 632

2 Задания для 10 класса

2.1 Заключительный этап 10 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Пусть p_1, p_2, $\ldots$, p_{97} — простые числа (не обязательно различные). Какое наибольшее целое значение может принимать выражение

$$\sum_{i=1}^{97} \frac{p_i}{p_i^2+1} = \frac{p_1}{p_1^2+1} + \frac{p_2}{p_2^2+1} + \ldots + \frac{p_{97}}{p_{97}^2+1}?$$

Ответ: 38

Решение: Заметим, что функция $\dfrac{x}{x^2+1}$ убывает при $x \geqslant 2$, а значит, $\sum\limits_{i=1}^{97} \dfrac{p_i}{p_i^2+1} \leqslant 97 \cdot \dfrac{2}{2^2+1} = 97 \cdot 0,4 = 38,8$. Таким образом, ответ не может быть больше, чем 38.

При этом $\dfrac{3}{3^2+1}=0,3$, что на $0,1$ меньше значения для $p=2$. Значит, если в вышеприведённой максимальной сумме заменить восемь двоек на тройки, получится как раз 38.

Задача 2. (2 балла)

Сумма синусов пяти углов из промежутка $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ равна 3. Какие наибольшее и наименьшее целые значения может принимать сумма их косинусов?

Ответ: 2;4 || 4;2

Решение:

Заметим, что $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Аргумент синуса принимает значения от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{3\pi}{4}$, значит $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$. Следовательно, $1\leqslant\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{2}$, а сумма пяти синусов и пяти косинусов принимает значения от 5 до $5\sqrt{2}$, что чуть больше 7. Вычитая 3, получаем наименьшее и наибольшее возможные целые значения суммы: 2 и 4 соответственно.

Осталось привести примеры: значение 2 достигается, когда три угла принимают значения 0, другие 2 — значение $\frac{\pi}{2}$. Значение 4 достигается, когда все углы имеют синусы, равные $\frac{3}{5}$ и косинусы, равные $\frac{4}{5}$.

Задача 3. (3 балла)

У Миши есть 10 карточек, на каждой написана одна буква. Он может составить из них $7!=5040$ различных десятибуквенных слов. Сколько у него может быть различных букв на карточках? (Приведите все варианты и докажите, что других нет).

Ответ: 5; 4 || 4; 5

Решение: Количество слов, которое может составить Миша, равно $\dfrac{10!}{a!b!\ldots}$, где числа a, b, $\ldots$ — количество раз, которое повторяется каждая буква.

$7!=\dfrac{10!}{720}$, то есть, наша задача — представить число 720 в виде факториала или произведения нескольких факториалов, больших 1. $720=6!$, это одно из представлений. Кроме того, 720 делится на 5, поэтому остальные Варианты должны включать $5!=120$. Итак, $720=5!\cdot 6=5!\cdot 3$. Легко видеть, что других Вариантов представить число 6 в виде произведения факториалов, нет.

Таким образом, мы получаем два Варианта. В одном из них, соответствующем формуле $\dfrac{10!}{6!}$, одна буква повторяется 6 раз, а остальные 4 уникальны, итого 5 букв. В другом Варианте, задаваемом формулой $\dfrac{10!}{5!3!}$, одна буква встречается 5 раз, другая 3 раза, и есть ещё 2 уникальные буквы, всего 4 различные буквы.

Задача 4. (3 балла)

На стороне BC треугольника ABC отмечены точки A_1 и A_2 такие, что $BA_1=6$, $A_1A_2=8$, $CA_2=4$. На стороне AC отмечены точки B_1 и B_2 такие, что $AB_1=9$, $CB_2=6$. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке K, а AA_2 и BB_2 — в точке L. Точки K, L и C лежат на одной прямой. Найдите B_1B_2.

Ответ: 12

Решение:

Обозначим за M точку пересечения прямой KL и стороны AB. Запишем две теоремы Чевы, для точки K и для точки L:

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1;\quad \frac{AM}{MB}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=1.$$

Отсюда получаем $\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{BA_2}{A_2C}\cdot\dfrac{CB_2}{B_2A}$. Четыре отрезка в данном равенстве нам известны. $A_1C=A_2C\pm A_1A_2=A_2C+A_1A_2$, так как $A_1A_2>A_2C$. Аналогично $BA_2=BA_1+A_1A_2$. Для остальных двух отрезков $AB_2=AB_1\pm B_1B_2$ и $CB_1=CB_2\pm B_1B_2$ (причём знаки $\pm$ одинаковы). Подставляя, получаем

$$\frac{BA_1}{A_2C + A_1A_2} \cdot \frac{CB_2 \pm B_1B_2}{B_1A} = \frac{BA_1 + A_1A_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{AB_1 \pm B_1B_2}$$

$$(CB_2 \pm B_1B_2)(AB_1 \pm B_1B_2) = \frac{(BA_1 + A_1A_2)CB_2(A_2C + A_1A_2)B_1A}{A_2C \cdot BA_1}$$

$$(6 \pm B_1B_2)(9 \pm B_1B_2) = \frac{14 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 9}{4 \cdot 6} = 378.$$

Так как $378 > 6 \cdot 9$, знаки $\pm$ раскрываются как $+$ и мы получаем квадратное уравнение $B_1B_2^2 + 15B_1B_2 - 324 = 0$. Оно имеет корни 12 и -27, из которых нас интересует положительный.

Задача 5. (3 балла)

1. $P(x)$ — многочлен четвёртой степени с целыми коэффициентами, старший из которых положительный. При этом $P(\sqrt{3}) = P(\sqrt{5})$. Найдите x, при котором (или при которых) $P(x)$ принимает наименьшее значение.

Ответ: -2;2 || 2;-2

Решение:

Пусть $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Тогда $P(\sqrt{3}) = 9a + 3\sqrt{3}b + 3c + \sqrt{3}d + e$, $P(\sqrt{5}) = 25a + 5\sqrt{5}b + 5c + \sqrt{5}d + e$. Числа вида $A + B\sqrt{3}$ и $C + D\sqrt{5}$ при целых A, B, C, D могут быть равны только если $B = D = 0$.

Значит, $3b + d = 5b + d = 0$, откуда $b = d = 0$, то есть $P(x) = ax^4 + cx^2 + e$ и можно сказать, что $P(x) = Q(x^2)$, где $Q(t) = at^2 + ct + d$. При этом $Q(3) = Q(5)$, значит, $Q(t)$ достигает минимума при $t = \dfrac{3+5}{2} = 4$, а $P(x)$ — при $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

Задача 6. (3 балла)

1. Последовательность задана начальными условиями $x_1 = 1$, $x_2 = 1,5$, $x_3 = 2$ и соотношением $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{2} + \dfrac{x_{n-2}}{4} + \dfrac{x_{n-3}}{4}$. Докажите, что x_{1001} и x_{1000} отличаются менее чем на 10^{-300}.

Решение:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{2} + \frac{x_{n-1}}{4} + \frac{x_{n-2}}{4} - \frac{x_{n-1}}{2} - \frac{x_{n-2}}{4} - \frac{x_{n-3}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_{n-1}}{2} + \frac{x_{n-2}}{4} + \frac{x_{n-3}}{4}\right) - \frac{x_{n-1}}{4} - \frac{x_{n-3}}{4} = \frac{x_{n-2}}{8} - \frac{x_{n-3}}{8}.$$

Таким образом, $x_{1001} - x_{1000} = \dfrac{1}{8}(x_{998} - x997) = \ldots = \dfrac{1}{8^{333}}(x_2 - x_1) = \dfrac{1}{2^{1000}} = 1024^{-100} < 1000^{-100} = 10^{-300}$.

Задача 7. (4 балла)

1. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка O — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC, отрезки AC и OI пересекаются в точке K.

Оказалось, что $OI = 50$, $IK = 18$, $AK = 24$. Найдите длину биссектрисы угла B в треугольнике ABC.

Ответ: 576/7

Решение:

Центр вписанной окружности лежит на биссектрисе угла $\angle BAC$, центр вневписанной — на биссектрисе внешнего угла $\angle A$. Эти биссектрисы перпендикулярны, поэтому треугольник AIO прямоугольный с прямым углом в точке A. Заметим, что в условии задачи $AK^2 = IK \cdot OK$. Это равенство в прямоугольном треугольнике выполняется тогда и только тогда, когда AK — высота. Поэтому $AK \perp IO$, то есть $AC \perp IO$, но прямая IO — это биссектриса угла $\angle B$, значит, треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$).

Из прямоугольного треугольника AKI найдём $\operatorname{tg} \angle KAI = \dfrac{IK}{AK}$.

Тогда $\operatorname{tg} \angle BAC = \operatorname{tg} 2\angle KAI = \dfrac{2 \operatorname{tg} \angle KAI}{1 - \operatorname{tg}^2 \angle KAI} = \dfrac{\frac{2IK}{AK}}{1 - \left(\frac{IK}{AK}\right)^2} = \dfrac{2 \cdot IK \cdot AK}{AK^2 - IK^2}$

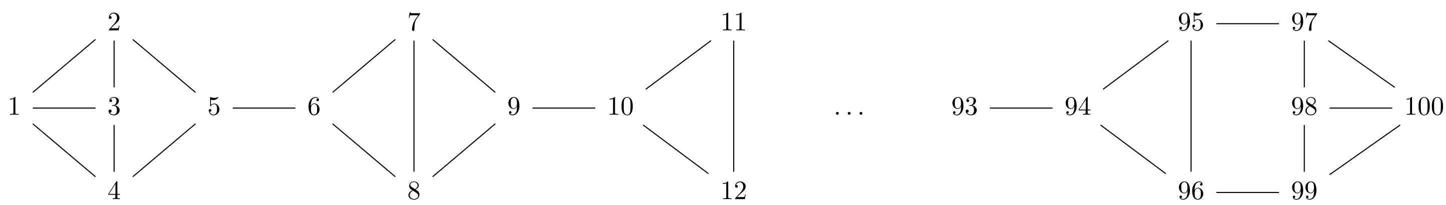
Искомая длина биссектрисы — это $BK = AK \cdot \operatorname{tg} \angle BAC = \dfrac{2 \cdot IK \cdot AK^2}{AK^2 - IK^2}$. Подставляя в эту формулу числа из условия, получаем ответ.

Задача 8. (5 баллов)

В некоторой стране 100 городов. Каждый из них связан двусторонним авиасообщением с тремя другими городами. При этом из любого города можно добраться в любой другой, возможно, с пересадками. Вася хочется добраться из города А в город Б. Какого наименьшего числа перелётов ему гарантированно хватит?

Ответ: 72

Решение:



Перед нами схема авиалиний страны, в которой, чтобы добраться из города 1 в город 100 не хватит 71 перелёта. Основная часть схемы состоит из повторяющихся блоков по 4 города, см. города 5, 6, 7 и 8.

Для того, чтобы попасть из города 1 в город 5, нужно 2 перелёта, затем из города 5 в город 93 по 3 перелёта за каждые 4 гороpда, то есть 66 перелётов, и ещё 4 перелёта, чтобы добраться из города 93 в город 100, итого, минимум 72.

С другой стороны, 72 перелёта всегда достаточно, чтобы добраться от любого города до любого.

Чтобы доказать это, поместим какой-нибудь начальный город на уровень 0, соединённые с ним (будем называть их соседними) города — на уровень 1, их оставшихся соседей — на уровень 2, и так далее. Каждый раз на уровень $k+1$ мы помещаем города, соседние с городами на уровне k, если им ранее не сопоставлен другой уровень. (Приведённый выше пример нарисован как раз по этому принципу).

Каждый город на уровне k может быть соединён только с городами на уровнях $k-1$, k и $k+1$. Это значит, что на каждых трёх подряд идущих уровнях в сумме хотя бы 4 города. Кроме того, на двух первых уровнях не менее 4 городов, как и на двух последних.

Это означает, что у нас не может быть более $2 + 2 + 92 \cdot \frac{3}{4} = 73$ уровей, то есть максимально возможный номер уровня равен 72. Но номер уровня — это и есть количество перелётов, необходимое, чтобы добраться в город на этом уровне из начального города. Поскольку в качестве начального города можно выбрать любой из 100 городов, это значит, что от любого города до любого можно добраться не более, чем за 72 перелёта.

2.2 Отборочный этап 10 класса. 1 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла) График приведённого квадратного трёхчлена $f(x)$ касается прямой $y = 2x$ (то есть имеет с ней единственную общую точку). Кроме того, этот трёхчлен имеет единственный корень. Найдите этот корень.

Ответ: -1/2 || -0,5 || -0.5

Задача 2. (2 балла)

$P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. $P(2) = -11$. Найдите наименьшее возможное положительное значение $P(9)$.

Ответ: 3.

Задача 3. (3 балла)

Числа $p \leqslant q \leqslant r$ простые, и число $s = 3p^4 + 5q^4 + 7r^4$ тоже простое. Найдите s. Если возможных ответов несколько, запишите их в порядке возрастания через запятую.

Ответ: 5023

Задача 4. (3 балла)

На плоскости отметили 5 векторов, координаты которых — различные целые положительные числа. Затем посчитали все их попарные скалярные произведения, всего 10 штук. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех этих скалярных произведений?

Ответ: 564

Задача 5. (3 балла)

Последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ с начальным членом $a_0 = 1$ удовлетворяет следующему условию: для каждого натруального n сумма членов с номерами меньшими $\frac{n}{2}$ равна сумме членов с номерами не меньшими $\frac{n}{2}$, но не превосходящими n. На каком месте в этой последовательности находится число 2048?

Ответ: 4095

Задача 6. (3 балла)

В окружности проведены три хорды: AD, BE, CF. Хорды AD и BE пересекаются в точке X, AD и CF в точке Y, BE и CF в точке Z. $XA = 6$, $XB = 9$, $YC = 48$, $YD = 60$, $ZE = 30$, $ZF = 15$. Треугольник XYZ равносторонний. Найдите его сторону.

Ответ: 30

Задача 7. (4 балла)

Дана дробно-линейная фукнция $f(x)$ не равная константе. Известно, что равенство $f(f(x)) = \frac{6}{f(x)}$ справделиво для всех x, для которых обе части определены. Найдите $f(3)$.

Ответ: 2

Задача 8. (4 балла) В бесконечной геометрической прогрессии первые пять членов — натуральные числа, а остальные — нет. Кроме того, среди членов прогрессии нет натуральных чисел, меньших 20. Какое наименьшее значение может принимать первый член прогрессии?

Ответ: 162

Задача 9. (4 балла)

На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно. Отрезки AF и DE пересекаются в точке M, а отрезки BF и CE в точке N. $S_{AME} = 49$, $S_{ENB} = 1$, $S_{EMFN} = 40$. Найдите S_{CNB}.

Ответ: 5

Задача 10. (5 баллов)

У Вани есть шесть красок. Сколькими способами он может раскрасить вершины куба каждую в свой цвет, если одной грани могут быть вершины максимум двух различных цветов? Все цвета использовать не обязательно, раскраски, отличающиеся поворотом или симметрией считаются разными.

Ответ: 4296

2.3 Отборочный этап 10 класса. 2 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Дан квадрат с вершинами в целых точках, стороны которого параллельны осям координат. Треугольник площади 7, вершины которого также находятся в целых точках, лежит строго внутри квадрата, в частности, вершины треугольника не лежат на границе квадрата. Какое наименьшее значение может принимать сторона квадрата?

Ответ: 6

Задача 2. (3 балла)

$P(x)$ — кубический многочлен. Известно, что $P(2) = -1$, $P(3) = 1$, $P(4) = 4$, $P(6) - P(5) = 11$. Найдите $P(6)$.

Ответ: 21.

Задача 3. (3 балла)

Последовательность задана условиями $a_0 = \sqrt{2021}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n - [a_n]}$. Найдите $[a_{2020}]$.

Квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Ответ: 21

Задача 4. (3 балла)

Какой остаток при делении на 100! даёт число $101^{100!+2}$?

Ответ: 10201

Задача 5. (3 балла)

$ABCD$ — равнобокая (или, что то же самое, равнобедренная) трапеция, $AD = 13$, $BC = 7$. Перпендикуляры BH и BK, опущенные из точки B на прямые AD и CD, оказались равны. M — точка пересечения BC и HK. Найдите BM.

Ответ: 4

Задача 6. (3 балла)

Функция имеет вид $f(x) = \dfrac{ax-b}{bx+a}$, $b \neq 0$. Известно, что $f(f(f(x))) = x$ везде, где левая часть равенства существует. Найдите $f(0)^2$.

Ответ: 3

Задача 7. (3 балла)

В клубе собирателей открыток 15 человек, некоторые их них дружат между собой, у каждого есть хотя бы один друг. Каждый из членов клуба взял 60 открыток и разослал их всем своим друзьям, каждому — одинаковое количество. Какое наибольшее число открыток мог получить член клуба от своих друзей?

Ответ: 720

Задача 8. (3 балла)

Гоша расставляет ферзей на доске 8×8. После этого он подсчитывает очки следующим образом: за каждого ферзя Гоша получает 8 очков минус количество других ферзей, которые бьёт этот ферзь. Запас ферзей не ограничен.

Какое наибольшее количество очков мог набрать Гоша?

Ответ: 92

Задача 9. (4 балла)

$ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Лучи DA и CB пересекаются в точке M. $AM = 8$, $BM = 6$, $AB = 6$, $AD = 9$. Найдите квадрат диагонали AC.

Ответ: 336

Задача 10. (4 балла)

Даны 11 натуральных чисел с суммой 40. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех 55 чисел, обратных к их попарным произведениям?

Ответ запишите в виде правильной или неправильной дроби.

Ответ: 276/48 || 69/16

3 Задания для 9 класса

3.1 Заключительный этап 9 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Пусть x, y, z — попарно взаимно простые трёхзначные натуральные числа. Какое наибольшее значение может принимать НОД$(x+y+z, xyz)$?

Ответ: 2994

Решение:

НОД двух чисел не может быть больше какого-то из них. Наибольшее возможное значение $x + y + z = 997 + 998 + 999 = 2994$ и для этих чисел как раз xyz делится на $x + y + z = 2994 = 3 \cdot 998$.

Задача 2. (2 балла)

На окружности отмечены 10 точек. Любые три из них образуют три вписанных угла. Петя посчитал количество различных значений, которые принимают эти углы. Какое наибольшее число могло у него получиться?

Ответ: 80

Решение:

Любые две точки образуют две дуги. Все вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны. Для двух соседних точек на одной из двух дуг между ними ни одна другая точка не лежит, то есть пара соседних точек даёт нам одно возможное значение угла, а пара несоседних точек — два значения.

Всего у нас 45 пар точек, из них 35 пар несоседних. Получаем ответ $35 \cdot 2 + 10 = 80$.

Пример, очевидно, существует. Достаточно взять длины дуг между соседними точками, которые относятся как $1 : 2 : 4 : 8 \ldots$.

Задача 3. (3 балла)

Пусть $f(x)$ — квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами. При этом $f(\sqrt{3}) - f(\sqrt{2}) = 4$. Найдите $f(\sqrt{10}) - f(\sqrt{7})$.

Ответ: 12

Решение:

Пусть $f(x) = cx^2 + dx + e$. Тогда $f(\sqrt{3}) - f(\sqrt{2}) = 3c + \sqrt{3}d + e - (2c + \sqrt{2}d + e) = c + d(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. Это число может быть целым только при $d = 0$. Значит, $f(x) = cx^2 + e$ и $f(\sqrt{3}) - f(\sqrt{2}) = c$.

Тогда $f(\sqrt{10}) - f(\sqrt{7}) = 10c + e - (7c + e) = 3c = 12$.

Задача 4. (3 балла)

Докажите, что уравнение $15^x + 29^y + 43^z = t^2$ не имеет решений в натуральных числах.

Решение:

Давайте заметим, что все числа в левой части условия дают остаток 1 при делении на 7. Значит, t^2 даёт остаток 3 при делении на 7. Перебором всех возможных остатков легко убедиться, что такого не бывает.

Задача 5. (3 балла)

В треугольнике ABC отмечены середины сторон $AB = 40$ и $BC = 26$ — точки K и L соответственно. Оказалось, что четырёхугольник $AKLC$ — описанный. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 264

Решение:

По теореме о средней линии, $KL = \frac{1}{2}AC$. В описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны, то есть $KL + AC = AK + CL = \dfrac{AB + BC}{2}$, то есть $\dfrac{3AC}{2} = \dfrac{66}{2}$ и $AC = 22$. Зная стороны треугольника, можно вычислить площадь по формуле Герона.

Задача 6. (3 балла)

Положительные числа x, y, z таковы, что $xy + yz + xz = 12$.

Найдите наименьшее возможное значение $x + y + z$.

Ответ: 6

Решение:

Сложив неравенства $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$, $x^2 + z^2 \geqslant 2xz$ и $y^2 + z^2 \geqslant 2yz$ и разделив на 2, мы получаем $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + xz$.

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz) \geqslant 3(xy+yz+xz) = 36$, откуда $x+y+z \geqslant 6$. Равенство достигается при $x = y = z = 2$.

Задача 7. (3 балла)

Из точки K на стороне AC треугольника ABC опустили перпендикуляры KL_1 и KM_1 на стороны AB и BC соответственно. Из точки L_1 опустили перпендикуляр L_1L_2 на BC, а из точки M_1 — перпендикуляр M_1M_2 на AB.

Оказалось, что треугольники BL_1M_1 и BL_2M_2 подобны (точка L_1 в первом треугольнике соответствует точке M_2 во втором). Кроме того, $BL_2 = 6$ и $L_2M_1 = 4$. Найдите L_1L_2.

Ответ: 8

Решение:

Заметим, что четырёхугольник $L_1M_2L_2M_1$ является вписанным, так как $\angle L_1M_2M_1 = \angle L_1L_2M_1 = 90^\circ$. Поэтому $\angle BM_2L_2 = 180^\circ - \angle L_1M_2L_2 = \angle L_2M_1L_1 = \angle BM_1L_1$. Аналогично $\angle BL_2M_2 = \angle BL_1M_1$, поэтому треугольники BL_1M_1 и BL_2M_2 подобны, причём точка L_1 в первом треугольнике соответствует точке L_2 во втором. Однако в условии написано, что они подобны и другим образом, значит, эти два треугольника равнобедренные. Отсюда получаем, что $BL_1 = BM_1 = BL_2 + L_2M_1$ и, по теореме Пифагора, находим $L_1L_2 = \sqrt{BL_1^2 - BL_2^2} = \sqrt{(BL_2 + L_2M_1)^2 - BL_2^2}$.

Задача 8. (5 баллов)

Можно ли в прямоугольной таблице 6×8 расставить натуральные числа от 1 до 48 (каждое — по одному разу) так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 (вертикальном или горизонтальном) сумма чисел была чётной?

Ответ: Да

Решение:

Для того, чтобы придумать пример, заметим сначала следующее: числа в клетках, между которыми по горизонтали или вертикали ровно две клетки, должны быть одной чётности, так как вместе с числами, записанными в двух промежуточных клетках, они должны давать в сумме чётное число. Таким образом, в каждой строке и каждом столбце остатки чисел при делении на два повторяются с периодом три.

Выделим в левом верхнем углу нашей таблицы прямоугольник 3×3 и в каждой его клетке мы отметим, сколько чисел обязаны иметь такой же остаток согласно предыдущему рассуждению.

6	6	4	...
6	6	4	...
6	6	4	...
...	...	...	...

Поскольку от 1 до 48 чётных и нечётных чисел по 24, нам нужно разбить полученные в таблице числа на две группы с общей суммой 24 каждая. При этом в каждом столбце и каждой строке нашей таблицы 3×3 должно быть либо 2 нечётных остатка, либо ни одного. Исходя из этих соображений, выделим жёлтым клетки, соответствующие нечётным числам.

Соответственно, строится и пример (мы не будем писать сами числа, укажем только их чётность):

н	н	ч	н	н	ч	н	н
н	н	ч	н	н	ч	н	н
ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч
н	н	ч	н	н	ч	н	н
н	н	ч	н	н	ч	н	н
ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч

3.2 Отборочный этап 9 класса. 1 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

1. Все звенья десятизвенной ломаной $A_0A_1\dots A_{10}$ имеют целочисленную длину, длина всей ломаной составляет 100. Найдите наибольшую возможную длину ломаной $A_0A_2A_3A_5A_7A_{10}$ если её звенья также целочисленны.

Ответ: 96

Задача 2. (3 балла)

1. Натуральные числа a и b таковы, что НОК(a, b) + НОД$(a, b) = 4(a + b)$. Найдите наименьшее возможное значение числа a.

Ответ: 5

Задача 3. (3 балла)

1. Из числа, записанного на доске, вычитают его наибольшую цифру, после чего получившуюся разность записывают на доску вместо исходного числа. После 11 таких операций на доске оказалось число 9. Какое наибольшее число могло быть записано изначально?

Ответ: 65

Задача 4. (3 балла)

1. По шоссе, представляющему из себя окружность, провели заезд 10 машин. Каждая из машин ехала с постоянной скоростю. Первая машина проехала ровно 11 кругов, вторая — ровно 12, и так далее, последняя — ровно 20. Каждая следующая машина проехала на один круг больше предыдущей. Стартовали и финишировали все машины одновременно в одной и той же точке.

К каждой точке, хотя бы один раз произошёл обгон, поставили флажок. Сколько всего получилось флажков?

Ответ: 28

Задача 5. (3 балла)

1. В некоторой стране 10 городов. Некоторые города были соединены двусторонние авиарейсами, не больше одного рейса между каждыми двумя городами. Из-за пандемии часть авиарейсов закрыли. После этого страна окалась разделена на 6 частей, между которыми не существует авиарейсов. Какое наибольшее число рейсов могло остаться?

Ответ: 10

Задача 6. (3 балла) 1. График приведённого квадратного трёхчлена $f(x)$ касается прямой $y = 2x$ (то есть имеет с ней единственную общую точку). Кроме того, этот трёхчлен имеет единственный корень. Найдите этот корень.

Ответ: -1/2 || -0,5 || -0.5

Задача 7. (3 балла)

1. Числа $p \leqslant q \leqslant r$ простые, и число $s = 3p^4 + 5q^4 + 7r^4$ тоже простое. Найдите s. Если возможных ответов несколько, запишите их в порядке возрастания через запятую.

Ответ: 5023

Задача 8. (3 балла)

1. В окружности проведены три хорды: AD, BE, CF. Хорды AD и BE пересекаются в точке X, AD и CF в точке Y, BE и CF в точке Z. $XA = 6$, $XB = 9$, $YC = 48$, $YD = 60$, $ZE = 30$, $ZF = 15$. Треугольник XYZ равносторонний. Найдите его сторону.

Ответ: 30

Задача 9. (4 балла)

1. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно. Отрезки AF и DE пересекаются в точке M, а отрезки BF и CE в точке N. $S_{AME} = 49$, $S_{ENB} = 1$, $S_{EMFN} = 40$. Найдите S_{CNB}.

Ответ: 5

Задача 10. (5 баллов)

1. У Вани есть шесть красок. Сколькими способами он может раскрасить вершины куба каждую в свой цвет, если одной грани могут быть вершины максимум двух различных цветов? Все цвета использовать не обязательно, раскраски, отличающиеся поворотом или симметрией считаются разными.

Ответ: 4296

3.3 Отборочный этап 9 класса. 2 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

1. Обозначим за $S(n)$ сумму цифр числа n. Найдите наибольшее трёхзначное число n такое, что существует другое трёхзначное число m такое, что $S(n) + n = S(m) + m$.

Ответ: 908

Задача 2. (2 балла)

1. В приведённом квадратном уравнении $x^2 + px + q$ коэффициенты отличаются на 4. Корни этого уравнения также отличаются на 4. Найдите наименьший возможный целый корень этого уравнения.

Ответ: -4

Задача 3. (2 балла)

1. Дан квадрат с вершинами в целых точках, стороны которого параллельны осям координат. Треугольник площади 7, вершины которого также находятся в целых точках, лежит строго внутри квадрата, в частности, вершины треугольника не лежат на границе квадрата. Какое наименьшее значение может принимать сторона квадрата?

Ответ: 6

Задача 4. (3 балла)

1. Коле сообщили НОД и НОК двух чисел. Эти НОД и НОК отличаются в 480 раз. Коля нашёл все возможные пары чисел с такими НОД и НОК. Сколько вариантов у него получилось? (Пары чисел, отличающиеся порядком, мы считаем одинаковыми).

Ответ: 4

Задача 5. (3 балла)

1. У Маши есть 10 красных, 10 синих и одна белая бусинки. Сколькими способами она может составить из них ожерелье так, чтобы в нём было не менее 6 бусинок и бусинки одного цвета не были бы соседними? Ожерелья, отличающиеся поворотом или переворачиванием, считаются одинаковыми.

Ответ: 32

Задача 6. (3 балла)

1. $ABCD$ — равнобокая (или, что то же самое, равнобедренная) трапеция, $AD = 13$, $BC = 7$. Перпендикуляры BH и BK, опущенные из точки B на прямые AD и CD, оказались равны. M — точка пересечения BC и HK. Найдите BM.

Ответ: 4

Задача 7. (3 балла)

1. В клубе собирателей открыток 15 человек, некоторые их них дружат между собой, у каждого есть хотя бы один друг. Каждый из членов клуба взял 60 открыток и разослал их всем своим друзьям, каждому — одинаковое количество. Какое наибольшее число открыток мог получить член клуба от своих друзей?

Ответ: 720

Задача 8. (3 балла)

1. Паша расставляет слонов на доске 8×8. После этого он подсчитывает очки следующим образом: за каждого слона Паша получает 4 очка минус количество других слонов, которые бьёт этот слон. Запас слонов не ограничен.

Какое наибольшее количество очков мог набрать Паша?

Ответ: 60

Задача 9. (4 балла)

1. $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Лучи DA и CB пересекаются в точке M. $AM = 8$, $BM = 6$, $AB = 6$, $AD = 9$. Найдите квадрат диагонали AC.

Ответ: 336

Задача 10. (5 балла)

1. Даны 11 натуральных чисел с суммой 40. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех 55 чисел, обратных к их попарным произведениям?

Ответ запишите в виде правильной или неправильной дроби.

Ответ: 276/48 || 69/16

4 Задания для 8 класса

4.1 Заключительный этап 8 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Петя придумал приведённое квадратное уравнение x^2+px+q, корнями которого являются числа x_1 и x_2. Он сообщил Васе три из четырёх чисел p, q, x_1, x_2, не указав, где какое. Это оказались числа 1, 2, -6. Каким было четвёртое число?

Ответ: -3

Решение:

Заметим, что по теореме Виета $x_1 + x_2 + p = 0$. Однако среди трёх сообщённых чисел нет трёх, которые в сумме дают 0. Значит, четвёртое число должно давать 0 в сумме с какими-то двумя из имеющихся, то есть это либо -3, либо 5, либо 4.

Кроме того, должно выполняться условие $q = x_1x_2$, где q — это число, не входящее в нулевую сумму. Проверив все возможные комбинации, можно убедиться, что подходит только $-6 = (-3) \cdot 2$.

Задача 2. (2 балла)

Докажите, что уравнение $16^x + 21^y + 26^z = t^2$ не имеет решений в натуральных числах.

Решение :

Давайте заметим, что все числа в левой части условия дают остаток 1 при делении на 5. Значит, t^2 даёт остаток 3 при делении на 5. Перебором всех возможных остатков легко убедиться, что такого не бывает.

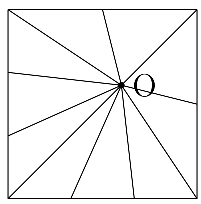
Вместо остатков от деления на 5 можно рассмотреть последние цифры: левая часть всегда заканчивается на 3, а квадрат на 3 заканчиваться не может.

Задача 3. (3 балла)

Можно ли разбить квадрат на 14 равновеликих треугольников, с общей вершиной O и остальными вершинами на границе квадрата?

Ответ: Да

Решение:



Разместим точку O внутри квадрата так, чтобы расстояния от неё до левой и правой сторон относились как $3 : 2$, как и расстояния до нижней и до верхней сторон. При этом левую и нижнюю сторону разделим на три равные части, а верхнюю и правую — на две. Таким образом, у треугольников с основаниями на левой и нижней сторонах основание будет в полтора раза меньше, а высота в полтора раза больше, чем у треугольников с основаниями на правой и верхней сторонах, а значит, площади всех треугольников будут равны.

Задача 4. (3 балла)

По круговой трассе с равными постоянными скоростями движутся три бегуна. Когда два бегуна встречают друг друга, они мгновенно разворачиваются и начинают бежать в противоположные стороны.

В какой-то момент первый бегун встретился со вторым. Через 20 минут второй бегун впервые встретился с третьим. Ещё через полчаса третий бегун впервые встретился с первым.

За сколько минут один бегун пробегает всю трассу?

Ответ: 100

Решение: (в общем виде)

Пусть первый бегун встретился со вторым, потом через a минут второй бегун впервые встретился с третьим, а ещё через b минут третий бегун впервые встретился с первым.

Пусть первый и второй бегуны встретились в точке A, второй и третий — в точке B, первый и третий — в точке C. Кроме того, пусть в момент встречи второго и третьего бегуна первый находился в точке D.

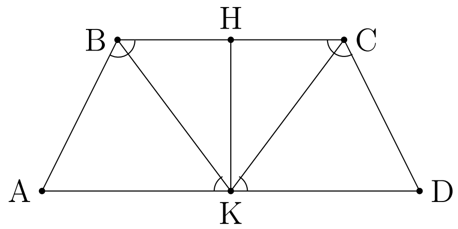
Тогда точки расположены на окружности в таком порядке: D, A, B, C, причём между D и A первый бегун бежал a минут, между A и B второй бегун бежал a минут, между B и C третий бегун бежал b минут и между D и C первый бегун бежал также b минут. Все эти четыре участка вместе образуют всю трассу, значит, она пробегается за $2a + 2b$ минут.

Задача 5. (3 балла)

В равнобедренной трапеции $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекаются на основании AD. $AB = 50$, $BC = 128$. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 5472

Решение:



Пусть K — точка пересечения биссектрис. Углы $\angle B = \angle C$ как углы при основании равнобедренной трапеции, значит, равны и их половины, то есть $\angle KBA = \angle KBC = \angle KCB = \angle KCD$. Кроме того, $\angle KBC = \angle AKB$ и $\angle KCB = \angle DKC$ как накрест лежащие.

Значит, треугольники AKB и KCD равнобедренные и $AD = AK + KD = AB + CD = 2AB$.

Кроме того, треугольники AKB и KBC подобны, значит, $BK^2 = AB \cdot BC$. Вычислим по теореме Пифагора высоту равнобедренного треугольника KBC:

$$KH^2 = BK^2 - BH^2 = AB \cdot BC - \frac{BC^2}{4},$$

откуда площадь трапеции равна $\frac{1}{2}(2AB + BC)\sqrt{AB \cdot BC - \frac{BC^2}{4}}$.

Задача 6. (3 балла)

Натуральные числа x, y, z таковы, что $\text{НОД}(\text{НОК}(x, y), z) \cdot \text{НОК}(\text{НОД}(x, y), z) = 1400$.

Какое наибольшее значение может принимать $\text{НОД}(\text{НОК}(x, y), z)$?

Ответ: 10

Решение:

Заметим, что $\text{НОК}(\text{НОД}(x, y), z)$ делится на z, а z делится на $\text{НОД}(\text{НОК}(x, y), z)$, поэтому $\text{НОК}(\text{НОД}(x$ делится на $\text{НОД}(\text{НОК}(x, y), z)$.

$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ и во второй множитель каждое простое число входит в степени не меньшей, чем в первый. Поэтому максимальное возможное значение $\text{НОД}(\text{НОК}(x, y), z)$ равно $2 \cdot 5 = 10$. Это значение достигается при $x = y = 10$, $z = 140$.

Задача 7. (3 балла)

На острове живут вегетарианцы, которые всегда говорят правду, и каннибалы, которые всегда лгут. 50 жителей острова, среди которых есть как женщины, так и мужчины, собрались у костра. Каждый из них произнёс либо “Все мужчины у этого костра — каннибалы”, либо “Все женщины у этого костра — вегетарианки”, причём обе фразы прозвучали. Какое наибольшее число вегетарианок могло быть у костра?

Ответ: 48

Решение:

Докажем, что если у нас n человек, максимальное количество вегетарианок равно $n-2$.

Во-первых, заметим, что если кто-то назвал кого-то каннибалом, то хотя бы один каннибал у нас точно есть.

Во-вторых, по условию точно есть хотя бы один мужчина. Значит, единственный случай, когда у нас может быть $n-1$ вегетарианок, это случай, в котором оставшийся человек — мужчина-каннибал. Но тогда он не может произнести ни одну из двух фраз из условия. Значит, этот случай невозможен и кроме вегетарианок должно быть хотя бы ещё два человека.

Если у нас $n-2$ вегетарианки, кроме них могут быть либо два мужчины (каннибал и вегетарианец) либо два каннибала (мужчина и женщина).

Задача 8. (5 баллов)

Можно ли в прямоугольной таблице 8×8 расставить натуральные числа от 1 до 64 (каждое — по одному разу) так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 (вертикальном или горизонтальном) сумма чисел была чётной?

Ответ: Нет

Решение:

Заметим сначала следующее: числа в клетках, между которыми по горизонтали или вертикали ровно две клетки, должны быть одной чётности, так как вместе с числами, записанными в двух промежуточных клетках, они должны давать в сумме чётное число. Таким образом, в каждой строке и каждом столбце остатки чисел при делении на два повторяются с периодом три.

Выделим в левом верхнем углу нашей таблицы прямоугольник 3×3 и в каждой его клетке мы отметим, сколько чисел обязаны иметь такой же остаток согласно предыдущему рассуждению.

9	9	6	...
9	9	6	...
6	6	4	...
...	...	...	...

Поскольку от 1 до 64 чётных и нечётных чисел по 32, нам необходимо разбить получившиеся в таблице 3×3 числа на две группы с суммой по 32 в каждой. Однако это сделать невозможно, так как все числа, кроме одного, делятся на 3, значит, при любом разбиении их на две группы одна из сумм будет делиться на 3 и не сможет стать равна 32.

4.2 Отборочный этап 8 класса. 1 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

1. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что $AB=CE$, $BE=AD=5$, $\angle AED=\angle BAD$, $BC=8$. Найдите ED.

Ответ: 3

Задача 2. (2 балла)

1. 18 человек стотят в ряд. Они делятся на рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов которые всегла лгут. Самый левый в ряду промолчал, второй слева сказал: «Слева от меня — рыцарь», третий сказал: «Слева от меня лжец», и так далее. Люди с чётными номерами говорили «Слева от меня — рыцарь», а с нечётными — «Слева от меня лжец». Сколько рыцарей было среди этих 18 человек? Если возможных вариантов несколько, запишите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 8,10 || 10,8 Задача 3. (3 балла)

1. Вася загадал число и написал на доске пять других чисел: 12, 15, 180, 300, 900. Некоторые из этих чисел являются кратными загаданного числа, остальные — делителями (и те, и те присутствуют). Найдите загаданное число. Если возможных вариантов несколько, запишите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 60

Задача 4. (3 балла)

1. Некоторые клетки доски 10×10 покрашены в красный цвет. Оказалось, что куда бы ни поставить ладью, она будет бить не меньше трёх клеток (включая ту, на которой стоит). Какое наименьшее количество клеток могло быть покрашено?

Ответ: 20

Задача 5. (3 балла)

1. Все звенья десятизвенной ломаной $A_0A_1 \dots A_{10}$ имеют целочисленную длину, длина всей ломаной составляет 100. Найдите наибольшую возможную длину ломаной $A_0A_2A_3A_5A_7A_{10}$ если её звенья также целочисленны.

Ответ: 96

Задача 6. (3 балла)

1. Натуральные числа a и b таковы, что $\text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b) = 4(a + b)$. Найдите наименьшее возможное значение числа a.

Ответ: 5

Задача 7. (3 балла)

1. Из числа, записанного на доске, вычитают его наибольшую цифру, после чего получившуюся разность записывают на доску вместо исходного числа. После 11 таких операций на доске оказалось число 9. Какое наибольшее число могло быть записано изначально?

Ответ: 65

Задача 8. (3 балла)

1. По шоссе, представляющему из себя окружность, провели заезд 10 машин. Каждая из машин ехала с постоянной скоростю. Первая машина проехала ровно 11 кругов, вторая — ровно 12, и так далее, последняя — ровно 20. Каждая следующая машина проехала на один круг больше предыдущей. Стартовали и финишировали все машины одновременно в одной и той же точке.

К каждой точке, хотя бы один раз произошёл обгон, поставили флажок. Сколько всего получилось флажков?

Ответ: 28

Задача 9. (4 балла)

1. В некоторой стране 10 городов. Некоторые города были соединены двусторонние авиарейсами, не больше одного рейса между каждыми двумя городами. Из-за пандемии часть авиарейсов закрыли. После этого страна окалась разделена на 6 частей, между которыми не существует авиарейсов. Какое наибольшее число рейсов могло остаться?

Ответ: 10 Задача 10. (4 балла)

1. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно. Отрезки AF и DE пересекаются в точке M, а отрезки BF и CE в точке N. $S_{AME} = 49$, $S_{ENB} = 1$, $S_{CNF} = 25$. Найдите S_{MEF}.

Ответ: 35

4.3 Отборочный этап 8 класса. 2 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

1. У мальчика Кости есть 4 скидочных купона: на 10%, 20%, 25% и 30%. Скидки применяются последовательно: каждая следующая вычисляется с учётом всех предыдущих изменений цены. Каждый купон действует только на один предмет. Костя хочет купить три запырки стоимостью по 300 рублей каждая. Какое наименьшую сумму денег он может за них заплатить, использовав свои купоны?

Ответ: 651

Задача 2. (2 балла)

1. Все звенья десятизвенной ломаной $A_0A_1 \dots A_{10}$ имеют целочисленную длину, длина всей ломаной составляет 100. Найдите наибольшую возможную длину ломаной $A_0A_2A_3A_5A_7A_{10}$ если её звенья также целочисленны.

Ответ: 96

Задача 3. (2 балла)

1. В деревне живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 20 жителей деревни собирали деньги на новый дорожный знак. Каждый из них положил в копилку одну или несколько рублёвых монет и сказал, что положил 5 рублей. В итоге оказалось, что в копилке лежит 83 рубля. Какое наименьшее число лжецов могло быть среди этих 20 человек?

Ответ: 5

Задача 4. (3 балла)

1. В приведённом квадратном уравнении $x^2 + px + q$ коэффициенты отличаются на 4. Корни этого уравнения также отличаются на 4. Найдите наименьший возможный целый корень этого уравнения.

Ответ: -4

Задача 5. (3 балла)

1. Коле сообщили НОД и НОК двух чисел. Эти НОД и НОК отличаются в 480 раз. Коля нашёл все возможные пары чисел с такими НОД и НОК. Сколько вариантов у него получилось? (Пары чисел, отличающиеся порядком, мы считаем одинаковыми).

Ответ: 4

Задача 6. (3 балла)

1. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D, а на отрезке BD — точка M. L — точка пересечения прямых AB и MC. Оказалось, что MD — биссектриса угла AMC, $AC = 5$, $MD = CD = 2$, $AM = CL$. Найдите длину DL.

Ответ: 3

Задача 7. (3 балла)

1. В клубе собирателей открыток 15 человек, некоторые их них дружат между собой, у каждого есть хотя бы один друг. Каждый из членов клуба взял 60 открыток и разослал их всем своим друзьям, каждому — одинаковое количество. Какое наименьшее число открыток мог получить член клуба от своих друзей?

Ответ: 5

Задача 8. (4 балла)

1. У Маши есть 10 красных, 10 синих и одна белая бусинки. Сколькими способами она может составить из них ожерелье так, чтобы в нём было не менее 6 бусинок и бусинки одного цвета не были бы соседними? Ожерелья, отличающиеся поворотом или переворачиванием, считаются одинаковыми.

Ответ: 32

Задача 9. (4 балла)

1. На плоскости проведены две параллельные прямые. На одной из них отмечены три точки, на другой пять. Найдите наибольшее возможное количество равнобедренных треугольников, основания которых лежат на этих прямых, а все вершины — в отмеченных точках.

Ответ: 7

Задача 10. (4 балла)

1. Паша расставляет слонов на доске 8×8. После этого он подсчитывает очки следующим образом: за каждого слона Паша получает 4 очка минус количество других слонов, которые бьёт этот слон. Запас слонов не ограничен.

Какое наибольшее количество очков мог набрать Паша?

Ответ: 60

5 Задания для 5-7 классов

5.1 Заключительный этап 5-7 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Докажите, что ребус КУСЬ + УКСЬ = УКСУС не имеет решений. (В ребусе одинаковые цифры обозначены одинаковыми буквами, разные — разными).

Решение:

Когда мы складываем два четырёхзначных числа и получаем пятизначное, это пятизначное обязательно начинается на 1, поэтому У — это 1. С другой стороны, у чисел КУСЬ и УКСУС разряды сотен совпадают, а значит, УКСЬ больше 900. Противоречие.

Задача 2. (3 балла)

В некоторой фирме 20% самых полезных сотрудников выполняют 80% работы. Какой наименьший процент работы могут выполнять 40% самых полезных сотрудников?

Более полезным мы будем называть сотрудника, выполняющего больше работы.

Ответ: 85%

Решение:

40% самых полезных сотрудников делятся на 20%, которые выполняют 80% работы, и следующие 20%, которые входят в 80%, выполняющих оставшиеся 20%. Эти вторые 20% составляют четверть от 80%. Поскольку среди этих 80% они являются самыми полезными, они выполняют не менее четверти от работы этих 80%, то есть не менее $20\% : 4 = 5\%$ от всей работы.

Значит, 40% самых полезных сотрудников выполняют не менее 85% всей работы. Равенство достигается, когда 80% наименее полезных сотрудников работают одинаково.

Задача 3. (3 балла)

В ряд стоят 30 человек, каждый из них — либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Их пронумеровали слева направо, после чего каждый человек с нечётным номером сказал: “Все люди с большими, чем у меня, номерами — лжецы”, а каждый человек с чётным номером произнёс: “Все люди с меньшими, чем у меня, номерами — лжецы”.

Сколько могло быть лжецов? Если правильных ответов несколько, перечислите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 28

Решение:

Докажем, что при данных условиях рыцарей обязательно двое, а все остальные — лжецы.

Рассмотрим людей с нечётными номерами. Если человек с нечетным номером n говорит правду, то человек с нечётным номером $n+2$ также должен говорить правду, поскольку все люди с номерами, большими, чем у него, лжецы. С другой стороны, если человек с номером n говорит правду, человек с номером $n+2$, согласно его словам, также лжец. Получаем противоречие. Это значит, что единственный человек с нечётным номером, который может говорить правду — человек с самым большим нечётным номером, то есть предпоследний.

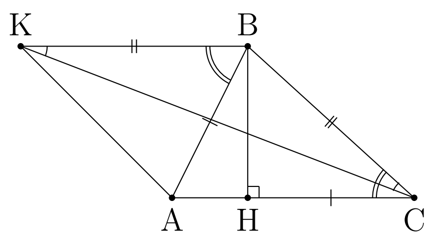
Аналогично доказывается, что единственный человек с чётным номером, который может быть рыцарем — человек номер 2.

При этом, поскольку первый и последний уже точно лжецы, второй и предпоследний говорят правду.

Задача 4. (3 балла)

В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Оказалось, что $AB = CH$. Точка K такова, что $\angle BKC = \angle BCK$ и $\angle ABK = \angle ACB$. Докажите, что $AK \perp AB$.

Решение:



Поскольку $\angle BKC = \angle BCK$, треугольник BCK равнобедренный и $BK = CB$. Кроме того, $\angle ABK = \angle ACB = \angle HCB$ и $AB = HC$, поэтому треугольники ABK и HCB равны, откуда $\angle BAK = \angle CHB = 90°$, что эквивалентно утверждению задачи.

Задача 5. (3 балла)

Можно ли в прямоугольной таблице 6×7 (6 строк и 7 столбцов) расставить натуральные числа от 1 до 42 (каждое — по одному разу) так, чтобы в каждом вертикальном прямоугольнике 1×2 сумма чисел была чётной?

Ответ : Нет

Решение:

Предположим, что у нас получилось расставить числа.

Поскольку в любом вертикальном прямоугольнике сумма чисел чётна, числа, находящиеся в этом прямоугольнике, должны быть одной чётности. Но это значит, что все числа в одном столбце одной чётности.

Таким образом, у нас есть столбцы, полностью состоящие из чётных чисел, и столбцы, полностью состоящие из нечётных чисел. Поскольку чётных и нечётных чисел должно быть поровну, столбцов с чётными и нечётными числами также должно быть поровну. Но это невозможно, так как всего столбцов нечётное число.

Задача 6. (3 балла)

По круговой трассе с равными постоянными скоростями движутся три бегуна. Когда два бегуна встречают друг друга, они мгновенно разворачиваются и начинают бежать в противоположные стороны.

В какой-то момент первый бегун встретился со вторым. Через 15 минут второй бегун впервые встретился с третьим. Ещё через 25 минут третий бегун впервые встретился с первым.

За сколько минут один бегун пробегает всю трассу?

Ответ : 80

Решение:

Пусть первый бегун встретился со вторым, потом через a минут второй бегун впервые встретился с третьим, а ещё через b минут третий бегун впервые встретился с первым.

Пусть первый и второй бегуны встретились в точке A, второй и третий — в точке B, первый и третий — в точке C. Кроме того, пусть в момент встречи второго и третьего бегуна первый находился в точке D.

Тогда точки расположены на окружности в таком порядке: D, A, B, C, причём между D и A первый бегун бежал a минут, между A и B второй бегун бежал a минут, между B и C третий бегун бежал b минут и между D и C первый бегун бежал также b минут. Все эти четыре участка вместе образуют всю трассу, значит, она пробегается за $2a + 2b$ минут.

Задача 7. (4 балла)

Натуральные числа a, b, c таковы, что $\text{НОД}(\text{НОК}(a, b), c) \cdot \text{НОК}(\text{НОД}(a, b), c) = 200$.

Какое наибольшее значение может принимать $\text{НОД}(\text{НОК}(a, b), c)$?

Ответ: 10

Решение:

Заметим, что $\text{НОК}(\text{НОД}(x, y), z)$ делится на z, а z делится на $\text{НОД}(\text{НОК}(x, y), z)$, поэтому $\text{НОК}(\text{НОД}(x$ делится на $\text{НОД}(\text{НОК}(x, y), z)$.

$200 = 2^3 \cdot 5^2$ и во второй множитель каждое простое число входит в степени не меньшей, чем в первый. Поэтому максимальное возможное значение $\text{НОД}(\text{НОК}(x, y), z)$ равно $2 \cdot 5 = 10$. Это значение достигается при $x = y = 10$, $z = 20$.

Задача 8. (5 баллов)

У Васи было 100 отрезков, ни из каких трёх нельзя было составить треугольник. Он сделал себе ещё один отрезок и теперь может составить треугольник несколькими способами. Какое наибольшее количество способов у него может быть?

Ответ: 100

Решение:

Докажем, что если в начале у Васи было n отрезков (где $n \geqslant 6$), то после добавления нового отрезка он сможет составить ровно n треугольников.

В ходе решения будем пользоваться неравенством треугольника, которое гласит, что треугольник из отрезков можно составить тогда и только тогда, когда длина большего отрезка меньше суммы двух оставшихся.

Обозначим длины наших отрезков за $a_1 \leqslant \ldots a_k \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e_1 \leqslant e_m$, где c — длина добавленного отрезка (каких-то отрезков a_i, b, d, e_i при этом может не быть).

Треугольник, составленный из отрезков x, y, z, будем обозначать (x, y, z).

(1) Пусть Вася смог получить треугольник, где c — наименьшая сторона. Допустим, это треугольник $(c, e_i, e_j$, где $j > i$. Это означает, что выполняется неравенство треугольника: $e_i + c > e_j$. Но $e_i + d \geqslant e_i + c > e_j$, поэтому треугольник (d, e_i, e_j) тоже можно составить, что противоречит условию задачи.

Аналогично, если Вася смог получить треугольник (c, d, e_i) где $i > 1$, это значит, что он может получить и треугольник d, e_1, e_i, что противоречит условию задачи. Значит, единственный возможный треугольник, в котором c — наименьшая сторона — это треугольник (c, d, e_1).

(2) Пусть Вася смог получить треугольник, где c — наибольшая сторона. Допустим, это треугольник (a_i, a_j, c). Поскольку $b \leqslant c < a_i + a_j$, это значит, что треугольник (a_i, a_j, b) тоже можно составить, что противоречит условию задачи.

Значит, треугольники, в которых c наибольшая сторона, могут быть только вида (a_i, b, c).

(3) Пусть Вася смог получить треугольник, где c — наибольшая сторона. Допустим, это треугольник (a_i, c, e_i). Но $a_i + d \geqslant a_i + c > e_i$, поэтому треугольник (a_i, d, e_i) тоже можно составить, что противоречит условию задачи.

Если вместо a_i подставить b, предыдущее рассуждение останется верным, значит, вариант b, c, e_i тоже невозможен.

Остаются возможные треугольники вида (a_i, c, d) и (b, c, d)

(4) Таким образом, мы перебрали все варианты и обнаружили, что у нас могут быть только 4 вида треугольников: (c, d, e_1), (a_i, b, c), (a_i, c, d) и (b, c, d).

Пусть теперь Вася может составить одновременно треугольники (a_{k-2}, b, c) и (a_{k-1}, c, d).

Это значит, что выполняются неравенства треугольника $a_{k-2}+b > c$ и $a_{k-1}+c > d$, которые можно переписать как $c-b < a_{k-2}$ и $d-c < a_{k-1}$. Но это значит, что $d-b = (d-c)+(c-b) < a_{k-1}+a_{k-2} < a_k$ (последнее неравенство следует из того, что не существует треугольника (a_{k-2}, a_{k-1}, a_k)).

Перепишем неравенство $d - b < a_k$ как $d < b + a_k$ и получим неравенство треугольника для (a_k, b, d), которое на самом деле должно нарушаться, так как такой треугольник составить нельзя.

Поэтому составить одновременно треугольники (a_{k-2}, b, c) и (a_{k-1}, c, d) невозможно.

Аналогично невозможно составить одновременно треугольники (a_{k-1}, b, c) и (a_{k-2}, c, d). При этом, если мы не можем составить эти треугольники с a_{k-1} или a_{k-2}, значит, мы не можем составить их и с меньшими a_i.

Из 4 треугольников (a_{k-2}, b, c), (a_{k-1}, c, d), (a_{k-1}, b, c) и (a_{k-2}, c, d) можно составить максимум два: либо (a_{k-1}, c, d) и (a_{k-1}, b, c), либо (a_{k-1}, c, d) и (a_{k-2}, c, d), либо (a_{k-1}, b, c) и (a_{k-2}, b, c)

Но в первом случае невозможны (a_{k-2}, b, c) и (a_{k-2}, c, d) и все треугольники с меньшими a_i, то есть мы оставляем себе только 6 возможных треугольников: (c, d, e_1), (a_k, b, c), (a_k, c, d),(a_{k-1}, b, c), (a_{k-1}, c, d) и (b, c, d), что при достаточно больших n нам не интересно.

Во втором и третьем случаях либо треугольник вида (a_i, b, c), либо треугольник (a_i, c, d) можно составить только при $i = k$. То есть остаются возможные треугольники либо (c, d, e_1), (a_k, b, c), (b, c, d) и k треугольников вида (a_i, c, d), либо (c, d, e_1), (a_k, c, d), (b, c, d) и k треугольников вида (a_i, b, c). В любом случае, это максимум $k + 3 \leqslant n$ треугольников при $k \leqslant n - 3$, $k + 2 = n$ треугольников, если $k = n - 2$ (в этом случае не существует e_1) или k треугольников при $k = n - 1$ (в этом случае не существует отрезка d и построенных с его помощью треугольников).

Итак, мы доказали, что больше, чем n треугольников быть не может.

Осталось привести пример: $k = n - 2$, $a_1 = 2$,$\ldots a_i = 2^i$, $\ldots a_k = 2^k$, $b = 2^{k+1}$, $c = b + 1 = 2^{k+1} + 1$, $d = b + a_k = 2^{k+1} + 2^k$. Легко проверить, что в этом случае существуют только треугольники (a_k, c, d),

(b, c, d) и $k = n - 2$ треугольников вида (a_i, b, c).

5.2 Отборочный этап 5-7 класса. 1 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

1. Вдоль кольцевой дороги стоят дома Ани, Бори, Васи, Гали и Димы. От Ани до Бори 7 км, от Бори до Васи 5 км, от Васи до Гали 3 км и от Гали до Димы 4 км, от Димы до Ани тоже 5 км. Все расстояния измеряются по кратчайшему пути вдоль дороги, по часовой стрелке или против — где короче. Разные расстояния могут измеряться в разные стороны.

Найдите наименьшую возможную длину кольцевой дороги (в километрах).

Ответ: 14

Задача 2. (2 балла)

1. У Васи есть электронные часы, которые показывают время от 00:00 до 23:59. Вася радуется, когда видит количество часов и количество минут, состоящие из одинаковых цифр, но, возможно, в разном порядке, например 00:00, 05:05 или 05:50.

Какое наибольшее число минут в в сутки Вася может радоваться благодаря часам?

Ответ: 34

Задача 3. (3 балла)

1. Из числа, записанного на доске, вычитают его наибольшую цифру, после чего получившуюся разность записывают на доску вместо исходного числа. Изначально на доске написано число 1000. Какое число будет на доске после 27 операций?

Ответ: 777

Задача 4. (3 балла)

1. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что $AB = CE$, $BE = AD = 5$, $\angle AED = \angle BAD$, $BC = 8$. Найдите ED.

Ответ: 3

Задача 5. (3 балла)

1. 18 человек стотят в ряд. Они делятся на рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов которые всегла лгут. Самый левый в ряду промолчал, второй слева сказал: «Слева от меня — рыцарь», третий сказал: «Слева от меня лжец», и так далее. Люди с чётными номерами говорили «Слева от меня — рыцарь», а с нечётными — «Слева от меня лжец». Сколько рыцарей было среди этих 18 человек? Если возможных вариантов несколько, запишите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 8,10 || 10,8

Задача 6. (3 балла)

1. Все звенья семизвенной ломаной $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ имеют целочисленную длину, длина всей ломаной составляет 30. Найдите наибольшую возможную длину ломаной $A_0A_2A_4A_7$ если её звенья также целочисленны.

Ответ: 27

Задача 7. (3 балла)

1. В Волшебном Лесу растёт волшебное дерево. Каждый раз, когда волшебник произносит заклинание, высота дерева либо увеличивается на 10%, либо уменьшается на 20%.

Вчера утром оно было 10 метров в высоту. В течение дня волшебник произнём три заклинания, и вечером высота дерева стала меньше, чем была утром. Найдите самую большую возможную высоту дерева вечером (в сантиметрах).

Ответ: 968

Задача 8. (3 балла)

1. Вася загадал число и написал на доске пять других чисел: 12, 15, 180, 300, 900. Некоторые из этих чисел являются кратными загаданного числа, остальные — делителями (и те, и те присутствуют). Найдите загаданное число. Если возможных вариантов несколько, запишите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 60

Задача 9. (4 балла)

1. Некоторые клетки доски 10×10 покрашены в красный цвет. Оказалось, что куда бы ни поставить ладью, она будет бить не меньше трёх клеток (включая ту, на которой стоит). Какое наименьшее количество клеток могло быть покрашено?

Ответ: 20

Задача 10. (4 балла)

1. От клетчатого прямоугольника ширины больше 1 прямолинейным разрезом отрезали 20 клеток. Затем от того, что осталось прямолинейным разрезом отрезали 21 клетку. Какое наименьшее количество клеток могло остаться в конце?

Ответ: 7

5.3 Отборочный этап 5-7 класса. 2 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

1. У мальчика Кости есть 4 скидочных купона: на 10%, 20%, 25% и 30%. Скидки применяются последовательно: каждая следующая вычисляется с учётом всех предыдущих изменений цены. Каждый купон действует только на один предмет. Костя хочет купить три запырки стоимостью по 300 рублей каждая. Какое наименьшую сумму денег он может за них заплатить, использовав свои купоны?

Ответ: 651

Задача 2. (3 балла)

1. Длины сторон треугольника — взаимно простые натуральные числа. Две из них равны 15 и 14. Какое наибольшее значение может принимать третья?

Ответ: 23

Задача 3. (3 балла)

1. Для некоторого числа вычислили остатки от деления на 6, 10 и 15. Оказалось, что сумма этих остатков не равна 28. Какое наибольшее значение она может принимать?

Ответ: 25

Задача 4. (3 балла)

1. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D, а на отрезке BD — точка M. L — точка пересечения прямых AB и MC. Оказалось, что MD — биссектриса угла AMC, $AC = 5$, $MD = CD = 2$, $AM = CL$. Найдите длину DL.

Ответ: 3

Задача 5. (3 балла)

1. Большая кракозябра весит 9 кг, средняя — 6 кг, а маленькая — 1 кг. В одном чемодане можно унести 50 кг. Сколько чемоданов понадобится для переноски 100 больших кракозябр, 140 средних и 60 маленьких?

Ответ: 37

Задача 6. (3 балла)

1. В деревне живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 20 жителей деревни собирали деньги на новый дорожный знак. Каждый из них положил в копилку одну или несколько рублёвых монет и сказал, что положил 5 рублей. В итоге оказалось, что в копилке лежит 83 рубля. Какое наименьшее число лжецов могло быть среди этих 20 человек?

Ответ: 5

Задача 7. (3 балла)

1. В клубе собирателей открыток 15 человек, некоторые их них дружат между собой, у каждого есть хотя бы один друг. Каждый из членов клуба взял 60 открыток и разослал их всем своим друзьям, каждому — одинаковое количество. Какое наименьшее число открыток мог получить член клуба от своих друзей?

Ответ: 5

Задача 8. (3 балла)

1. Дима расставляет ладей на доске 8×8. После этого он подсчитывает очки следующим образом: за каждую ладью Дима получает 4 очка минус количество других ладей, которые бьёт эта ладья. Запас ладей не ограничен.

Какое наибольшее количество очков мог набрать Дима?

Ответ: 32

Задача 9. (4 балла)

1. На плоскости проведены две параллельные прямые. На одной из них отмечены три точки, на другой пять. Найдите наибольшее возможное количество равнобедренных треугольников, основания которых лежат на этих прямых, а все вершины — в отмеченных точках.

Ответ: 7

Задача 10. (4 балла)

1. У Ванечки есть часы, которые показывают время от 00:00 до 23:59. Какая сумма цифр встречается на этих часах чаще всего?

Ответ: 12