

Оглавление

1	Задания для 11 класса	1
1.1	Заключительный этап 11 класса	1
1.2	Отборочный этап 11 класса. 1 тур	6
1.3	Отборочный этап 11 класса. 2 тур	8
2	Задания для 10 класса	10
2.1	Заключительный этап 10 класса	10
2.2	Отборочный этап 10 класса. 1 тур	14
2.3	Отборочный этап 10 класса. 2 тур	16
3	Задания для 9 класса	18
3.1	Заключительный этап 9 класса	18
3.2	Отборочный этап 9 класса. 1 тур	21
3.3	Отборочный этап 9 класса. 2 тур	23
4	Задания для 8 класса	25
4.1	Заключительный этап 8 класса	25
4.2	Отборочный этап 8 класса. 1 тур	28
4.3	Отборочный этап 8 класса. 2 тур	30
5	Задания для 5-7 классов	32
5.1	Заключительный этап 5-7 класса	32
5.2	Отборочный этап 5-7 класса. 1 тур	35
5.3	Отборочный этап 5-7 класса. 2 тур	37

1 Задания для 11 класса

1.1 Заключительный этап 11 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Многочлен $P(x)$ таков, что $P(x^2)$ имеет $2n + 1$ корней. Какое наименьшее количество корней может иметь производная многочлена $P(x)$?

(В обоих случаях имеются в виду различные корни, без учёта кратности).

Ответ: n .

Решение:

Если многочлен $P(x^2)$ имеет корень x_0 , то он также имеет и корень $-x_0$, поэтому количество корней может быть нечётным только если один из корней — это число 0. Для каждой пары корней $x_0, -x_0$ многочлена $P(x^2)$ число x_0^2 является корнем многочлена $P(x)$; число 0 также является его корнем, поэтому у многочлена $P(x)$ не менее $n + 1$ корня (могут быть ещё какие-то отрицательные корни, про них мы ничего не знаем).

Между каждыми двумя корнями многочлена $P(x)$ должен находиться корень производной этого многочлена, поэтому у производной не менее n корней.

Легко убедиться, что это значение достигается, например, для многочлена $x(x-1) \dots (x-n)$.

Задача 2. (2 балла)

Вася придумал новую операцию на множестве положительных чисел: $a \star b = a^{\ln b}$. Найдите логарифм числа $\frac{(ab) \star (ab)}{(a \star a)(b \star b)}$ по основанию $a \star b$.

Ответ: 2

Решение: Заметим, что $a \star b = a^{\ln b} = e^{\ln a \ln b}$. Также $ab = e^{\ln a + \ln b}$, то есть при операции $\star$ логарифмы чисел перемножаются, при умножении чисел — складываются, а при делении — вычитаются.

Обозначим $x = \ln a$ и $y = \ln b$. Тогда, согласно написанному выше, $\ln \frac{(ab) \star (ab)}{(a \star a)(b \star b)} = (x + y)(x + y) - x^2 - y^2 = 2xy$, а $\ln(a \star b) = xy$. Искомое число равно частному этих логарифмов, то есть 2.

Задача 3. (3 балла)

$4^{27000} - 82$ делится на 3^n . Какое наибольшее натуральное значение может принимать n ?

Ответ: 5

Решение:

$$4^{27000} = (1 + 3)^{27000} = 1 + 27000 \cdot 3 + \frac{27000 \cdot 26999 \cdot 3^2}{2} + \frac{27000 \cdot \dots \cdot 26998 \cdot 3^3}{6} + \\ + \frac{27000 \cdot \dots \cdot 26997 \cdot 3^4}{24} + \frac{27000 \cdot \dots \cdot 26996 \cdot 3^5}{120} \dots$$

Два последних выписанных слагаемых делятся на 3^6 , как и все остальные слагаемые, заключённые в многоточие.

$$1 + 27000 \cdot 3 + \frac{27000 \cdot 26999 \cdot 3^2}{2} + \frac{27000 \cdot 26999 \cdot 26998 \cdot 3^3}{6} = 1 + 81000 + \\ + \frac{27000 \cdot 26999 \cdot 3^2 + 27000 \cdot 26999 \cdot 26998 \cdot 3^2}{2}$$

$1 + 81000 = 1 + 81(1 + 999) = 1 + 81 + 81 \cdot 999 = 1 + 82 + 81 \cdot 999$, что даёт остаток 82 при делении на 3^6 , так как последнее слагаемое делится на 3^6 .

$$\frac{27000 \cdot 26999 \cdot 3^2 + 27000 \cdot 26999 \cdot 26998 \cdot 3^2}{2} = \frac{27000 \cdot 26999 \cdot 3^2 \cdot (1 + 26998)}{2},$$
 а это число, очевидно, делится на 3^5 , но не на 3^6 . Значит, $4^{27000} - 82$ также делится на 3^5 , но не на 3^6 .

Задача 4. (3 балла)

Окружности O_1 радиуса b и O_2 радиуса c касаются в точке O — центре окружности O_3 радиуса a . Точка A — одна из точек пересечения окружностей O_1 и O_3 . Окружность O_4 касается окружности O_1 в точке A и окружности O_2 в точке B . Точка C — такая точка на прямой OB , что треугольники OAB и OCA подобны. Найдите AC .

Все указанные в условии касания происходят внешним образом.

Ответ: $\frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$.

Решение: Применим инверсию относительно окружности O_3 . Окружность O_3 перейдёт сама в себя, окружности O_1 и O_2 — в параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 , первая из которых проходит через точку A , переходящую при инверсии переходит сама в себя.

Точки B и C переходят при этой инверсии друг в друга, поскольку $a^2 = OA^2 = OB \cdot OC$ (это равенство следует из подобия треугольников OAB и OCA ; никаким другим образом эти треугольники подобны быть не могут, так как у них общий угол O , а точки B и C мы предполагаем различными).

Окружность O_4 переходит в окружность, касающуюся прямых ℓ_1 и ℓ_2 в точках A и C соответственно. Так как прямые параллельны, это значит, что длина отрезка AC равна расстоянию между этими прямыми.

Опустим из точки O перпендикуляр на прямую ℓ_1 . Это перпендикуляр пересечёт окружность O_1 в точке X , инверсной основанию перпендикуляра H и диаметрально противоположной O . Это значит, что $OH = \frac{a^2}{OX} = \frac{a^2}{2b}$.

Аналогично расстояние от O до ℓ_2 составляет $OH = \frac{a^2}{OX} = \frac{a^2}{2c}$. Искомое расстояние между двумя прямыми составляет сумму этих величин, поскольку точка O находится между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 , так как иначе окружности O_1 и O_2 касались бы внутренним образом.

Задача 5. (3 балла)

Положительные числа x , y и z таковы, что $x + y + z = 5$. Какое наименьшее значение может принимать величина $x^2 + y^2 + 2z^2 - x^2y^2z$?

Ответ: -6

Решение:

Перепишем условие как $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + z = 5$ и запишем для этих пяти чисел неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном:

$$1 = \frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + z}{5} \leq \sqrt{\frac{\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2}{5}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{10}},$$

откуда $x^2 + y^2 + 2z^2 \geq 10$. Теперь запишем для этих же чисел неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$1 = \frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + z}{5} \geq \sqrt[5]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{y}{2} \cdot z},$$

откуда $x^2y^2z \leq 16$. Значит, $x^2 + y^2 + 2z^2 - x^2y^2z \geq 10 - 16 = -6$. Минимум достигается, когда все числа, для которых применяются неравенства о средних, равны между собой, то есть $x = y = 2, z = 1$.

Задача 6. (3 балла)

Дана четырёхугольная пирамида $OABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$. Плоскость α пересекает ребра OA, OB, OC и OD пирамиды в точках A', B', C' и D' соответственно. Известно, что $\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{a}, \frac{OB'}{OB} = \frac{1}{b}, \frac{OC'}{OC} = \frac{1}{c}$. Найдите $\frac{V_{OABCD}}{V_{OA'B'C'D'}}$.

Ответ: $\frac{2abc(a-b+c)}{a+c}$

Решение:

$ABCD$ — параллелограмм, поэтому $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, и, следовательно, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

Если точка X принадлежит плоскости $A'B'C'$, а $\overrightarrow{OX} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, коэффициенты x, y и z удовлетворяют уравнению $ax + by + cz = 1$ (это, как известно, уравнение плоскости, даже если система координат не декартова, а точки A', B' и C' этому уравнению, очевидно, удовлетворяют).

$\overrightarrow{OD'} = t\overrightarrow{OD} = t\overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{OA} - t\overrightarrow{OB}$, поэтому $at - bt + ct = 1$, откуда $t = \frac{1}{a-b+c}$.

Поскольку треугольники ABC и ACD равны, $V_{OABC} = V_{OACD} = \frac{1}{2}V_{OABCD}$.

Объём пирамиды, образованной тремя векторами, в 6 раз меньше объёма параллелограмма, натянутого на эти векторы, а этот объём, в свою очередь, (при одинаковых направлениях) пропорционален длине этих векторов.

Поэтому $\frac{V_{OA'B'C'}}{V_{OABC}} = \frac{1}{abc}$, а $\frac{V_{OA'C'D'}}{V_{OACD}} = \frac{t}{ac} = \frac{1}{ac(a-b+c)}$.

Значит, $\frac{V_{OA'B'C'D'}}{V_{OABCD}} = \frac{V_{OA'B'C'}}{V_{OABCD}} + \frac{V_{OA'C'D'}}{V_{OABCD}} = \frac{V_{OA'B'C'}}{2V_{OABC}} + \frac{V_{OA'C'D'}}{2V_{OACD}} = \frac{1}{2abc} + \frac{1}{2ac(a-b+c)} = \frac{a-b+c+b}{2abc(a-b+c)} = \frac{a+c}{2abc(a-b+c)}$. Обратная величина является ответом к задаче.

Задача 7. (4 балла)

Дан правильный n -угольник, в котором проведены все диагонали. Докажите, что они образуют не больше

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} - \frac{n}{4} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) + 1 - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{n}{2} - 3\right)$ точек пересечения (не считая вершин).

Число n во всех вариантах задачи представляется в виде $n = 4k + 2$, где k натуральное число.

Доказательство:

Если бы все точки пересечения диагоналей были различны, для их подсчёта достаточно было бы посчитать общее количество способов выбрать 4 вершины n -угольника. Действительно, каждая пара пересекающихся диагоналей даёт нам 4 вершины; с другой стороны, для каждых 4 вершин отрезок, соединяющий первую и третью по часовой стрелке, и отрезок, соединяющий вторую и четвёртую, будут пересекающимися диагоналями (сторонами они не могут быть, так как стороны ни с чем не пересекаются). Количество таких способов составляет $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$. Однако, при таком подсчёте точки, в которых пересекаются больше двух диагоналей, посчитаны несколько раз.

Во-первых, поскольку количество вершин чётно, $\frac{n}{2}$ “длинных” диагоналей (соединяющих противоположные вершины многоугольника) пересекаются в центре многоугольника.

Эта точка посчитана $\frac{\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right)}{2}$ раз, в то время как должна быть посчитана 1 раз. Значит, из вычисленного количества надо вычесть $\frac{\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right)}{2} - 1$.

Во-вторых, для каждой “длинной” диагонали можно взять две симметричные относительно неё диагонали, не проходящие через центр многоугольника. “Длинную” диагональ можно выбрать $\frac{n}{2}$ способами. Для удобства представим себе, что выбранная диагональ расположена вертикально. По каждую сторону от этой диагонали остаётся $\frac{n}{2} - 1$ вершина. Мы выбираем вершину A слева от “длинной” диагонали, после чего для выбора вершины B справа у нас остаётся $\frac{n}{2} - 3$ варианта: мы не можем выбрать вершину, симметричную A относительно “длинной” диагонали (иначе диагональ AB будет симметрична сама себе) и вершину, симметричную относительно центра, иначе AB будет “длинной”, а эти точки пересечения мы уже учли.

Симметричная диагональ $A'B'$ выбирается единственным образом. Однако каждую пару диагоналей AB и $A'B'$ мы посчитали дважды, потому что в качестве первой выбранной диагонали могла быть взята любая из них. Таким образом, точку пересечения трёх диагоналей мы умеем искать $\frac{\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{n}{2} - 3\right)}{2}$ способами. В исходной формуле каждая такая точка посчитана трижды, то есть два лишних раза. Значит, мы получаем ещё на $\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{n}{2} - 3\right)$ точек меньше.

Вычитая из исходного количества пересечений оба эти выражения мы получаем в точности то, что и требовалось. Если какие-то точки, посчитанные в предыдущем абзаце, на самом деле совпадают, то вычитать надо ещё больше.

Задача 8. (5 баллов)

В таблице 8×8 какие-то 23 клетки чёрные, а остальные — белые. В каждой белой клетке написали суммарное количество чёрных, находящихся с ней на одной горизонтали и находящихся с ней на одной вертикали; в чёрных клетках ничего не написано. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 234

Решение:

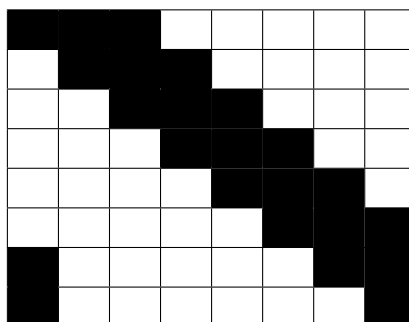
Число в белой клетке состоит из двух слагаемых: “горизонтального” и “вертикального”. Рассмотрим отдельно сумму всех “горизонтальных” и отдельно сумму всех “вертикальных” слагаемых по всей таблице. Если мы максимизируем каждую из этих двух сумм по отдельности, общая сумма также будет наибольшей.

Рассмотрим сумму “горизонтальных” слагаемых. Если в строке находится x_i чёрных клеток и $8 - x_i$ белых, то сумма горизонтальных слагаемых в этой строке составляет $x_i(8 - x_i)$. Просуммировав эту сумму по всем строкам, мы получаем $8(x_1 + \dots + x_8) - x_1^2 - \dots - x_8^2 = 8 \cdot 23 - (x_1^2 + \dots + x_8^2)$. Нам нужно максимизировать это выражение, т.е. минимизировать сумму квадратов восьми чисел, сумма которых составляет 23. Как известно, сумма квадратов чисел уменьшается при сближении этих чисел к их среднему арифметическому, поэтому для целых чисел минимум достигается, когда семь из восьми чисел равны 3, а оставшееся равно 2.

Таким образом, мы получаем, что наименьшая возможная сумма “горизонтальных” слагаемых равна $8 \cdot 23 - 7 \cdot 3^2 - 2^2 = 117$. Аналогичную оценку можно получить для суммы “вертикальных” слагаемых, что даёт нам итоговое значение 234.

Осталось убедиться, что существует раскраска таблицы, при которой обе суммы максимальны одновременно, то есть в которой в каждом столбце или строке по 2 или 3 закра-

шенных клетки.



1.2 Отборочный этап 11 класса. 1 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{n}$. Найдите x_{1000} .
Ответ запишите в виде несократимой правильной или неправильной дроби, не округляйте.

Ответ: 1000/999

Задача 2. (2 балла)

Девять футбольных команд сыграли турнир в один круг на нейтральном поле (каждые две команды сыграли между собой один раз). Все матчи закончились с разным счётом (результаты 0:1 и 1:0 считаются одинаковыми). Какое наименьшее количество голов могло быть забито во всём турнире?

Ответ: 235

Задача 3. (3 балла)

В клубе состоят 11 джентльменов, некоторые из них знакомы между собой. Оказалось, что любую четвёрку джентльменов можно разбить на две пары так, чтобы в каждой паре джентльмены были знакомы между собой. Найдите наименьшее возможное количество пар знакомых в этом клубе.

Ответ: 44

Задача 4. (3 балла)

Положительные вещественные числа x и y таковы, что $[x]\{x\}[y]\{y\} = 17$. Какое наименьшее целое значение может принимать число $x + y$?

Как обычно, $[x]$ означает целую часть числа x , а $\{x\}$ — дробную.

Ответ: 18

Задача 5. (3 балла)

Куб $10 \times 10 \times 10$ разбит на тысячу единичных кубиков, которые мы будем называть ячейками. В ячейках стоят целые числа, в одной из ячеек стоит число 1. Числа в соседних ячейках (то есть ячейках, имеющих общую грань) отличаются на 1. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всём кубе?

Ответ: 14500

Задача 6. (3 балла)

В четырёхугольнике $ABCD$ продолжения сторон BC и AD пересекаются в точке M , а диагонали в точке K . Оказалось, что $\angle ACB + \angle ADB = 180^\circ$, $AM : BM = 7 : 9$, $AC : BD = 9 : 8$ и $AD : BC = 7 : 10$. Найдите отношение $AK : BK$.

Ответ: 392:810 || 196:405

Задача 7. (3 балла)

Непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$ такова, что $f(0) = f'(0) = 0$. Её график повернули на 10° против часовой стрелки, после чего получился график какой-то другой функции. Какое наибольшее целое значение может принимать функция $f'(x)$?

Ответ: 5

Задача 8. (3 балла)

В жёлобе, имеющем форму двугранного прямого угла, лежат три сферы радиусами 4, 6 и 9 именно в таком порядке, причём вторая сфера касается двух оставшихся. Найдите расстояние между центрами первой и третьей сфер.

Ответ: 25

Задача 9. (4 балла)

Вещественные числа a , b и c таковы, что $\log_a b + \log_b c + \log_c a = 10$. Какое наибольшее целое значение может принимать сумма $\log_a c + \log_b a + \log_c b$?

Ответ: 25

Задача 10. (5 баллов)

Числа p и q — простые. Степени числа q при делении на p дают ровно три различных остатка. Степени числа p при делении на q также дают ровно три различных остатка. В ответе укажите наименьшее возможное значение числа p и соответствующее ему число q .

Ответ: $p=13$ $q=61$

1.3 Отборочный этап 11 класса. 2 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

$\cos^2 x + \sin^2 y = 1,47$. Найдите $\cos 2y - \cos 2x$.

Ответ: -0,94

Задача 2. (2 балла)

Простые числа p и q таковы, что $p + 3 = 2q$. Какое наибольшее значение может принимать остаток от деления числа $(p - q)^{3q}$ на q ?

Ответ: 27

Задача 3. (3 балла)

Дана трапеция $ABCD$ с большим основанием $BC = 36$. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке K , причём $BK = 42$. Диаметр вписанной окружности трапеции в 2 раза меньше высоты KH треугольника KBC . Найдите расстояние между точками касания вписанных окружностей трапеции и треугольника KAD с прямой AD .

Ответ: 12

Задача 4. (3 балла)

На плоскости даны 21 попарно различных векторов с целыми неотрицательными координатами. Для каждой пары различных векторов посчитали их скалярное произведение. Какое наименьшее значение может принимать сумма этих скалярных произведений?

Ответ: 1120

Задача 5. (3 балла)

Найдите площадь множества точек в первой координатной четверти, удовлетворяющих неравенствам $y \leq x \leq 42$ и $\{y\} \leq \{x\}[x + 1]$.

Квадратные скобки означают целую часть числа, фигурные — дробную.

Ответ: 863

Задача 6. (3 балла)

Три бесконечных цилиндра радиусов 4, 4 и 7 попарно касаются. Оси цилиндров попарно перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, образованного точками касания цилиндров.

Ответ: 67,5

Задача 7. (3 балла)

В клубе состоит некоторое количество джентльменов, у каждого из которых меньше 6 друзей. Каждый из них послал открытки всем своим друзьям и друзьям друзей (не больше одной открытки каждому). Всего было послано 20000 открыток. Какое наименьшее число джентльменов может быть в клубе?

Ответ: 800

Задача 8. (3 балла)

1. Дан куб $8 \times 8 \times 8$, состоящий из единичных кубиков (ячеек). Белочка, изначально находилась в юго-западной нижней ячейке. За один прыжок она перемещалась из текущей ячейки в соседнюю, то есть имеющую с ней общую грань. В итоге она побывала в каждой из 512 ячеек по одному разу и оказалась в северо-восточной верхней ячейке, сделав 17 прыжков на восток и 15 прыжков на север. Сколько прыжков белочка сделала вверх?

Ответ: 234

Задача 9. (4 балла)

Последовательность x_n задана условиями $x_0 = 2$, $x_n = a_n + \frac{1}{x_{n-1}}$ где a_n — какие-то натуральные числа от 2 до 48 включительно. Какое наименьшее значение может принимать число $12 \cdot (x_{99} - 1)^2$? Ответ округлите до ближайшего целого.

Ответ: 13

Задача 10. (5 баллов)

Дан многочлен пятой степени $P(x)$ старшим коэффициентом 2 такой, что $P(2) = 5$, $P(3) = -2$, $P(4) = -5$, $P'(2) = -21$, $P'(3) = -2$, $P'(4) = 7$. Найдите коэффициент многочлена при x^4 .

Ответ: -25

2 Задания для 10 класса

2.1 Заключительный этап 10 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

У многочлена $P(x^2)$ 17 различных корней (без учёта кратности). Верно ли, что $P(0) = 0$?

Решение:

Если многочлен $P(x^2)$ имеет корень x_0 , то он также имеет и корень $-x_0$, поэтому количество корней является нечётным тогда и только тогда, когда один из корней — это число 0.

Задача 2. (2 балла)

$\sin x \sin 3x = \frac{5}{16}$. Найдите $\cos x \cos 3x$.

Если возможных ответов несколько, запишите их через точку с запятой.

Ответ: 7/16; -9/16

Решение:

Общий вид задачи: $\sin x \sin 3x = \frac{5}{16} = \alpha$.

$\alpha = \sin x \sin 3x = \sin x(3 \sin x - 4 \sin^3 x) = 3 \sin^2 x - 4 \sin^4 x$.

Обозначим $\sin^2 x$ за t и получим квадратное уравнение на t : $4t^2 - 3t + \alpha = 0$, откуда $t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\alpha}}{8}$.

С другой стороны, $\cos x \cos 3x = \cos x(4 \cos^3 x - 3 \cos x) = 4 \cos^4 x - 3 \cos^2 x$. Учитывая, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t$, мы получаем, что $\cos x \cos 3x = 4(1 - t)^2 - 3t = 4t^2 - 11t + 4 = \alpha - 8t + 4$. Подставляя значение α , полученное при решении квадратного уравнения, получаем итоговый ответ.

Задача 3. (3 балла)

Последовательность задана формулой $x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n$. Кроме того известно, что $x_0 = 0$, $x_2 = 1$. Найдите x_{100}

Ответ: $\frac{4^{50} - 1}{3} = 422550200076076467165567735125$.

Решение:

Из рекуррентного соотношения мы получаем, что $x_{n+3} - x_{n+1} = 2(x_{n+2} - x_n)$. Из того, что $x_2 - x_0 = 1$, мы получаем $x_{n+2} - x_n = 2^n$. Отсюда $x_{100} = (x_{100} - x_{98}) + (x_{98} - x_{96}) + \dots + (x_2 - x_0) + x_0 = 2^{98} + 2^{96} + \dots + 1 = 4^{49} + 4^{48} + \dots + 1 = \frac{4^{50} - 1}{4 - 1} = \frac{4^{50} - 1}{3}$.

Задача 4. (3 балла)

Петя написал на доске число 11234567, а затем все числа, получающиеся из него перестановкой цифр, в порядке возрастания. Каким по счёту оказалось написано число 46753211?

Ответ: 12240

Решение:

Номер числа — это количество чисел, которые выписаны не позднее, чем оно. Числа, выписанные не позднее, чем 46753211 это:

(1) Числа начинающиеся на 1. Остальные цифры в этом случае можно расставить $7! = 5040$ способами.

(2) Числа начинающиеся на 2 или 3. Для каждого варианта первой цифры остальные можно расставить $\frac{7!}{2}$ способами. В итоге получается ещё 5040 чисел.

(3) Числа начинающиеся на 41. Остальные шесть цифр можно расставить $6! = 720$ способами.

(4) Числа начинающиеся на 42, 43, 45 и 46 (включая само наше число, которое в списке начинающихся на 46 чисел идёт последним). Остальные шесть цифр для каждого из вариантов можно расставить $\frac{6!}{2}$ способами.

Итого получаем $5040 \cdot 2 + 720 + 360 \cdot 4 = 12240$.

Задача 5. (3 балла)

Окружности O_1 , O_2 и O_3 находятся внутри окружности O_4 радиуса 6, касаясь её внутренним образом, а друг друга внешним. При этом окружности O_1 и O_2 проходят через центр окружности O_4 . Найдите радиус окружности O_3 .

Ответ: 2

Решение:

Решим задачу в общем виде для всех вариантов, а именно, докажем, что если радиус окружности O_4 равен R , то радиус окружности O_3 равен $\frac{R}{3}$.

Поскольку окружности O_1 и O_2 проходят через центр окружности O_4 и одновременно касаются её внутренним образом, для каждой из них центр окружности O_4 диаметрально противоположен точке касания. Это значит, что радиус каждой из них составляет $\frac{R}{2}$. Кроме того, они касаются друг друга в центре окружности O_4 , что означает, что центры всех этих трёх окружностей лежат на одной прямой.

Рассмотрим теперь треугольник, образованный центрами окружностей O_1 и O_2 (назовём их A и B) и точкой касания окружностей O_2 и O_3 (назовём её C). Из соображений симметрии ясно, что $AC = BC$. Кроме того, точка O (центр окружности O_4) является серединой стороны AB . Значит, треугольник OAC прямоугольный, причём $OA = \frac{R}{2}$, $OC = R$.

Рассмотрим теперь точку X (центр окружности O_3). Она лежит на отрезке OC , поэтому треугольник OAX также прямоугольный. Его катеты $OA = \frac{R}{2}$ и $OX = R - r$, а гипотенуза $AX = \frac{R}{2} + r$, где r искомый радиус окружности O_3 . По теореме Пифагора $\frac{R^2}{4} + R^2 - 2Rr + r^2 = \frac{R^2}{4} + Rr + r^2$, откуда $3Rr = R^2$ и $r = \frac{R}{3}$.

Задача 6. (4 балла)

Обозначим за $\sigma(n)$ сумму всех делителей числа n (включая само число). Для каких n выполняется неравенство $\sigma(8n) > \sigma(9n)$?

Решение:

Для каждого простого множителя p , такого, что n делится на p^k , но не делится на p^{k+1} вклад $(1 + p + \dots + p^k)$, или, если записать это строго, при $n = \prod_{i=1}^m p_i^{k_i}$ выполняется равенство $\sigma(n) = \prod_{i=1}^m (1 + p_i + \dots + p_i^{k_i})$.

Отсюда видно, что при домножении или делении числа n на какой-то множитель, взаимно простой с числами 8 и 9 (то есть, не кратный ни 2, ни 3), правая и левая части неравенства $\sigma(8n) > \sigma(9n)$ изменяются в одинаковое количество раз. Значит, нам достаточно найти все решения вида $n = 2^k 3^l$ — все остальные можно будет получить из них домножением на какое-то число x , не делящееся ни на 2, ни на 3.

Тогда $\sigma(8n) = (1+2+\dots+2^{k+3})(1+3+\dots+3^l)$, а $\sigma(9n) = (1+2+\dots+2^k)(1+3+\dots+3^{l+2})$. Их частное должно быть больше 1:

$$\frac{\sigma(8n)}{\sigma(9n)} = \frac{\frac{1+2+4+8+\dots+2^{k+3}}{1+2+\dots+2^k}}{\frac{1+3+9+\dots+3^{l+2}}{1+3+\dots+3^l}} = \frac{\frac{7}{1+2+\dots+2^k} + 8}{\frac{4}{1+3+\dots+3^l} + 9} > 1$$

Знаменатель этой дроби всегда больше 9. Числитель же равен 9 при $k = 2$ и меньше 9 при больших k . Осталось разобрать два случая: $k = 1$ и $k = 0$.

При $k = 1$ имеем:

$$\frac{7}{3} + 8 > \frac{4}{1+3+\dots+3^l} + 9$$

$$10\frac{1}{3} > 9 + \frac{4}{1+3+\dots+3^l}$$

Правая часть равна 13 при $l = 0$. При $k \geq 1$ правая часть не больше 10. Значит, $\sigma(8n) > \sigma(9n)$ при $k = 1$ и $l \geq 1$.

При $k = 0$ имеем:

$$15 > 9 + \frac{4}{1+3+\dots+3^l}$$

Это равенство всегда верно. Таким образом, у нас есть две серии ответов:

Ответ: $n = 3^l x$ или $n = 6 \cdot 3^l x$, где l — целое неотрицательно число, а x — натуральное число, не делящееся ни на 2, ни на 3.

Задача 7. (4 балла)

В таблице 7×7 какие-то клетки чёрные, а остальные — белые. В каждой белой клетке написали суммарное количество чёрных, находящихся с ней на одной горизонтали или вертикали; в чёрных клетках ничего не написано. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 168

Решение:

Число в белой клетке состоит из двух слагаемых: “горизонтального” и “вертикального”. Рассмотрим отдельно сумму всех “горизонтальных” и отдельно сумму всех “вертикальных” слагаемых по всей таблице. Если мы максимизируем каждую из этих двух сумм по отдельности, общая сумма также будет наибольшей.

Рассмотрим сумму “горизонтальных” слагаемых. Если в строке находится x чёрных клеток и $7-x$ белых, то сумма горизонтальных слагаемых в этой строке составляет $x(7-x)$. Эта величина максимальна при $x = 3$ и $x = 4$ и равна 12. Значит, максимальная сумма “горизонтальных” слагаемых составляет $7 \cdot 12 = 84$, а всех чисел, соответственно, 168.

Это значение достигается, например, для шахматной раскраски — легко убедиться, что в каждой строке и каждом столбце действительно 3 или 4 чёрных клетки.

Задача 8. (4 балла)

На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно такие, что

- (1) ни одна из них не является серединой стороны;
- (2) прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке;
- (3) перпендикуляры, восстановленные к сторонам треугольника в точках C_1 , A_1 и B_1 , также пересекаются в одной точке;

(4) сумма отрезков AB_1 , BC_1 и CA_1 равна полупериметру треугольника ABC .

Докажите, что A_1 , B_1 и C_1 либо точки касания вписанной окружности треугольника ABC , либо точки касания внеписанных окружностей треугольника ABC с его сторонами.

Решение:

Из условия (2), по теореме Чебы, следует, что $AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = B_1C \cdot C_1A \cdot A_1B$.

Условие (4) можно переписать как $AB_1 + BC_1 + CA_1 = B_1C + C_1A + A_1B$.

Из условия (4), по теореме Карно, следует, что $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = B_1C^2 + C_1A^2 + A_1B^2$.

Вычитая это равенство из равенства $(AB_1 + BC_1 + CA_1)^2 = (B_1C + C_1A + A_1B)^2$, получаем, что сумма попарных произведений длин отрезков AB_1 , BC_1 и CA_1 равна такой же сумме для отрезков B_1C , C_1A и A_1B .

Если у двух троек чисел совпадают сумма, произведение и сумма попарных произведений, то это одна и та же тройка чисел, но неизвестно в каком порядке. (Этот факт может быть известен сам по себе, ещё он следует из теоремы Виета для многочленов третьей степени).

Три числа можно сопоставить другим трём числам шестью способами, поэтому у нас шесть возможных случаев:

1) $AB_1 = B_1C$, $BC_1 = C_1A$ и $CA_1 = A_1B$. В этом случае A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон треугольника ABC , а точка M — точка пересечения медиан.

2) $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$. В этом случае A_1 , B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC , а точка H — её центр.

3) $AB_1 = BA_1$, $CA_1 = AC_1$, $BC_1 = CB_1$. В этом случае $AB_1 = p - (BC_1 + CA_1) = p - (BC_1 + C_1A) = p - AB$. Аналогичные равенства можно написать для остальных отрезков, откуда A_1 , B_1 и C_1 — точки касания внеписанных окружностей треугольника ABC с его сторонами.

4) $AB_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$, $BC_1 = AC_1$. В этом случае $AC = AB_1 + CB_1 = BA_1 + CA_1 = AB$, то есть треугольник ABC равнобедренный, а точка C_1 — середина стороны AB .

Остальные два случая эквивалентны случаю 4), только равны будут другие стороны треугольника.

В каждом из вариантов условие (1) исключает часть возможных случаев, а оставшиеся два могут реализоваться.

2.2 Отборочный этап 10 класса. 1 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Сумма первых шести членов геометрической прогрессии с отрицательным знаменателем ровно в 702 раза больше суммы следующих трёх членов. Найдите этот знаменатель.

Ответ укажите в виде правильной дроби.

Ответ: $-1/3$

Задача 2. (2 балла)

У натурального числа 30 различных делителей (включая единицу и само число). Какое наименьшее количество делителей может быть у его квадрата?

Ответ: 59

Задача 3. (3 балла)

На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ взяли точки K и M , а на стороне BC — точки L и N так, что отрезки KL и MN разделили исходную трапецию на три попарно подобных. Средняя линия исходной трапеции имеет длину 76, а средняя линия трапеции $KLMN$ имеет длину 60. Найдите длину большего из оснований трапеции $ABCD$.

Ответ: 125

Задача 4. (3 балла)

Вася нарисовал на плоскости прямоугольник с вершинами в точках с координатами $(0; 0)$, $(0; 15)$, $(20; 15)$ и $(20; 0)$ и точку $A = (8; 9)$. После этого он отметил все векторы, идущие из точки A ко всем целым точкам прямоугольника (как находящимся внутри, так и на границе) и вычислил их сумму. Найдите длину этой суммы.

Ответ: 840

Задача 5. (3 балла)

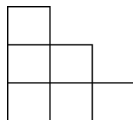
Натуральные числа a и b таковы, что $\text{НОД}(a^2, b) + \text{НОД}(b^2, a) = 10 \cdot \text{НОД}(a, b)$.

Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел a и b ?

Ответ: 90

Задача 6. (3 балла)

У Вали есть краски пяти цветов. Сколькими способами она может раскрасить клетчатую фигуру на рисунке так, чтобы клетки, имеющие общую точку или отрезок, были покрашены в разные цвета? Все краски использовать не обязательно.



Ответ: 1080

Задача 7. (3 балла)

Функция $f(x)$, определённая на множестве положительных чисел, удовлетворяет равенству $f(x) + f(y) = \frac{4f(xy)}{f(x+y)}$. Найдите $f(2)$.

Ответ: 2

Задача 8. (3 балла)

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром $AC = 65$. Также известно, что $BC = 39$, $AD = 25$. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из B и D на AC .

Ответ запишите в виде неправильной дроби, не округляйте.

Ответ: 2079/65

Задача 9. (3 балла)

График квадратного трёхчлена $f(x)$ со старшим коэффициентом -1 имеет ровно одну общую точку с графиками трёхчленов $x^2 - 8x + 16$ и $x^2 + 8x + 16$. Найдите наибольшее значение $f(x)$.

Ответ: 8

Задача 10. (5 баллов)

Среди значений многочлена третьей степени при $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ только числа 2 и 3. Какое наибольшее значение может принимать этот многочлен при $x = 5$?

Ответ: 10

2.3 Отборочный этап 10 класса. 2 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Функция $f(x)$, определённая на всей вещественной оси, такова, что $f(3x) = 3f(x+1)$ и $f(2) = 1$. Найдите $f(1095)$.

Ответ: 2187

Задача 2. (2 балла)

$\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — целочисленные возрастающие арифметические прогрессии, такие что $a_1 + a_2 + \dots + a_7 = b_1 + b_2 + \dots + b_5 = 350$. Какое наименьшее значение может принимать число $b_5 - a_1$?

Ответ: 25

Задача 3. (3 балла)

В Таинственной Стране 8 городов. Некоторые города соединены двусторонними авиалиниями. Оказалось, что есть два города, между которыми нельзя добраться ни напрямую, ни с одной пересадкой. Какое наибольшее число авиалиний может быть в стране?

Ответ: 21

Задача 4. (3 балла)

Окружности с центрами в точках A и B и радиусами 10 и 9 пересекаются в точках C и D . CE диаметр первой окружности, F — точка на прямой CD такая, что FE и FG — касательные к первой и второй окружностям соответственно. $AB = 8 + \sqrt{45}$. Найдите площадь треугольника FBG .

Ответ: 120

Задача 5. (3 балла)

$P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $P(1) = 2$, $P(2) = 1$. Какое наименьшее положительное значение может принимать $P(6)$?

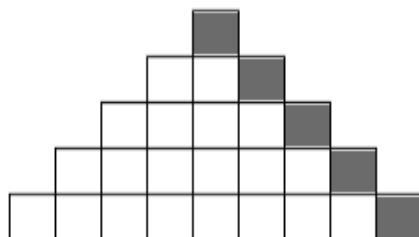
Ответ: 17

Задача 6. (3 балла)

Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $a^2 - b^2 - a - b = 6000$?
8

Задача 7. (3 балла)

Фишка находится в левой нижней клетке клетчатой фигуры, изображённой на рисунке. Сколькими способами она может добраться до закрашенной диагонали, двигаясь только вправо или вверх?



Ответ: 70

Задача 8. (3 балла)

Приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет единственный корень 1. Приведённый квадратный трёхчлен $g(x)$ имеет единственный корень 7. Приведённый квадратный трёхчлен $h(x)$ также имеет единственный корень. Какое наименьшее значение может принимать $f(x) + g(x) + h(x)$?

Ответ: 18

Задача 9. (3 балла)

На декартовой плоскости нарисован квадрат 13×13 с вершинами в целых точках (не обязательно по клеточкам). Сколько целых точек может быть внутри (не включая точки на границе) этого квадрата? Если возможных ответов несколько, перечислите все варианты через запятую.

Ответ: 168, 144 || 144, 168

Задача 10. (5 баллов)

Окружности O_1 и O_2 с радиусами 8 и 10 касаются в точке A . Обе они находятся внутри окружности O_3 и касаются её в точках B и C соответственно. Прямая AC вторично пересекает окружность O_3 в точке D , а окружность O_1 — в точке E . Наконец прямая AB вторично пересекает окружность O_3 в точке F . При этом $AB \approx 14,46203052$, $AC \approx 17,21325932$.

Найдите длину отрезка DE .

Ответ: 12,04928152

3 Задания для 9 класса

3.1 Заключительный этап 9 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Графики квадратных трёхчленов $f(x)$ и $g(x)$ пересекаются в точке $(3; 8)$. Трёхчлен $f(x) + g(x)$ имеет единственный корень 5. Найдите старший коэффициент трёхчлена $f(x) + g(x)$.

Ответ: 4

Решение:

Так как трёхчлен $f(x) + g(x)$ имеет единственный корень 5, его можно представить как $a(x - 5)^2$, где a — это как раз и есть искомый старший коэффициент. Кроме того, значение этого трёхчлена в точке 3 равно сумме значений трёхчленов $f(x)$ и $g(x)$, то есть 16.

Значит, $a \cdot (-2)^2 = 16$, откуда $a = 4$.

Задача 2. (2 балла)

Натуральное число n при делении на 12 даёт остаток a и неполное частное b , а при делении на 10, наоборот, остаток b и неполное частное a . Найдите n .

Ответ: 119

Решение:

Из условия следует, что $n = 12b + a = 10a + b$, откуда $11b = 9a$. Значит, b делится на 9, а a делится на 11. С другой стороны, a и b это остатки от деления на 12 и 10 соответственно, поэтому $0 \leq a \leq 11$ и $0 \leq b \leq 9$. Получаем два варианта: $a = b = 0$ и $n = 0$ (что не подходит, т.к. n натуральное) или $a = 11$, $b = 9$, $n = 119$.

Задача 3. (3 балла)

Известно, что $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + 3abc = 30$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 13$.

Найдите $a + b + c$.

Ответ: 5

Решение:

$(a + b + c)^3 - (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = 2(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + 3abc)$. Обозначим $a + b + c$ за x , подставим известные значения выражений из условия и получим уравнение $x^3 - 13x - 60 = 0$. Нетрудно заметить, что число 5 является корнем этого уравнения. Разделив $x^3 - 13x - 60$ на $x - 5$, получаем $x^2 + 5x + 12$. У этого трёхчлена нет корней, значит, 5 — единственный возможный ответ.

Задача 4. (3 балла)

Окружности O_1 и O_2 касаются окружности O_3 радиуса 13 в точках A и B соответственно и проходят через её центр O . Вторично эти окружности пересекаются в точке C . Известно, что $OC = 12$. Найдите AB .

Ответ: 10

Решение:

Поскольку окружности O_1 и O_2 касаются окружности O_3 в точках A и B соответственно и проходят через её центр O , AO и BO являются их диаметрами. Значит, углы $\angle OCA$ и $\angle OCB$ прямые. Это не может быть один и тот же угол, поскольку тогда окружности O_1 и O_2 совпадают, значит, это смежные углы. Прямоугольные треугольники OCA и OCB равны по катету OC и гипотенузам. Значит, $AB = 2AC = 2\sqrt{OA^2 - OC^2} = 2\sqrt{13^2 - 12^2} = 10$.

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ диагональ BD является биссектрисой угла $\angle B$, а её длина равна длине основания BC . Биссектриса угла $\angle CBD$ пересекает прямую AD в точке K . Точка L на продолжении отрезка BD за точку D такова, что $AB = DL$.

Докажите, что $AK = BL$.

Доказательство:

$\angle BKD = \angle CBK$ как накрест лежащие, а $\angle CBK = \angle KBD$, поскольку BK — биссектриса. Поэтому треугольник BKD равнобедренный, то есть $BD = DK$.

$\angle BDA = \angle CBD$ как накрест лежащие, а $\angle CBD = \angle ABD$, поскольку BD — биссектриса. Поэтому треугольник BDA равнобедренный, то есть $AB = AD$. Значит $DL = AD$, и, соответственно, $AK = AD + DK = DL + BD = BL$, что и требовалось доказать.

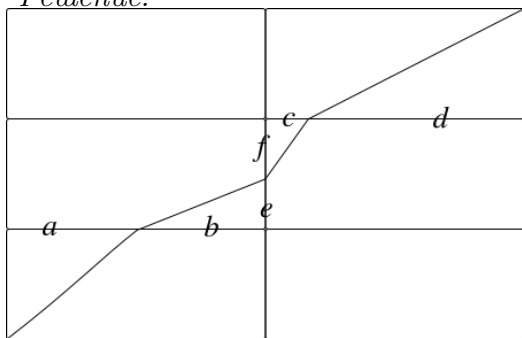
Задача 6. (4 балла)

Шесть положительных чисел, не превосходящих 3, удовлетворяют равенствам $a + b + c + d = 6$ и $e + f = 2$. Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$\left(\sqrt{a^2 + 4} + \sqrt{b^2 + e^2} + \sqrt{c^2 + f^2} + \sqrt{d^2 + 4}\right)^2$$

Ответ: 72

Решение:



На рисунке изображены три прямоугольника $2 \times (a+b)$ и три прямоугольника $2 \times (c+d)$, образующие квадрат 6×6 , поскольку $a + b + c + d = 6$. Отрезок длины 2 в центре рисунка разбивается на отрезки e и f в сумме дающие 2, как и должно быть по условию.

Тогда изображённая на рисунке ломаная, идущая из одного угла квадрата в другой, по теореме Пифагора имеет квадрат длины как раз и равный выражению, минимум которого нужно найти. Такая ломаная может быть построена для каждой шестёрки чисел, поэтому нам достаточно найти длину кратчайшей ломаной, которая составляет диагональ квадрата. Квадрат её длины равен $2 \cdot 6^2 = 72$.

Задача 7. (4 балла)

В таблице 8×8 какие-то клетки чёрные, а остальные — белые. В каждой белой клетке написали суммарное количество чёрных, находящихся с ней на одной горизонтали или вертикали; в чёрных клетках ничего не написано. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 256

Решение:

Число в белой клетке состоит из двух слагаемых: “горизонтального” и “вертикального”. Рассмотрим отдельно сумму всех “горизонтальных” и отдельно сумму всех “вертикальных” слагаемых по всей таблице. Если мы максимизируем каждую из этих двух сумм по отдельности, общая сумма также будет наибольшей.

Рассмотрим сумму “горизонтальных” слагаемых. Если в строке находится x чёрных клеток и $8 - x$ белых, то сумма горизонтальных слагаемых в этой строке составляет $x(8 - x)$.

Эта величина максимальна при $x = 4$ и равна 16. Значит, максимальная сумма “горизонтальных” слагаемых составляет $8 \cdot 16 = 128$, а всех чисел, соответственно, 256.

Это значение достигается, например, для шахматной раскраски — легко убедиться, что в каждой строке и каждом столбце действительно 4 чёрных клетки.

Задача 8. (5 баллов)

32 волейбольных команды участвуют в турнире по следующей схеме. В каждом туре все оставшиеся команды разбиваются на пары случайным образом; если команд нечётное число, одна из команд пропускает этот тур. В каждой паре одна из команд побеждает, а другая проигрывает, ничьих в волейболе не бывает. После трёх поражений команды выбывает из турнира. Когда выбыли все команды кроме одной, эта команда объявляется победителем и турнир заканчивается.

Какое наименьшее количество туров может продолжаться турнир?

Решение:

Чтобы из турнира вылетели все команды кроме одной, они должны потерпеть хотя бы 93 поражения, то есть должно быть сыграно хотя бы 93 матча.

Также заметим, что после каждого тура количество команд уменьшается максимум вдвое, потому что не больше половины команд терпит поражение. В частности, в последнем туре могли участвовать только 2 команды, и они сыграли один матч. В предпоследнем туре участвовали максимум 4 команды и сыграли максимум 2 матча. За тур до этого было сыграно максимум 4 матча, а ещё за тур до этого максимум 8. Итого в последних 4 турах было сыграно не больше 15 матчей.

Значит до этого было сыграно ещё хотя бы 78 матчей. В каждом из остальных туров было сыграно не больше 16 матчей, значит всего этих туров хотя бы 5. Итого получаем не меньше $4 + 5 = 9$ туров.

За 9 туров команды могли управиться. Действительно, в первых 4 турах команды могли разбиться на пары, после чего в каждой паре нанести друг другу по 2 поражения. После этого каждой команде осталось проиграть один раз и мы получаем обычную олимпийскую систему из 5 туров, в каждом из которых половина команд выбывает.

Ответ: 9

3.2 Отборочный этап 9 класса. 1 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (1 балл)

Сколько различных слов можно составить, вычеркнув две соседние буквы из слова АААРРРДВВВАААААРРККК?

Ответ: 12

Задача 2. (2 балла)

У натурального числа 30 различных делителей (включая единицу и само число). Какое наименьшее количество делителей может быть у его квадрата?

Ответ: 59

Задача 3. (2 балла)

Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 17$ и $BC = 12$. Найдите расстояние между точкой пересечения биссектрис углов A и B и точкой пересечения биссектрис углов C и D .

Ответ: 5

Задача 4. (3 балла)

Четырёхзначные числа a и b таковы, что $a = 2b$ и все восемь цифр, входящие в эти два числа, различны. Какое наибольшее значение может принимать число b ?

Ответ: 4865

Задача 5. (3 балла)

На плоскости проведены восемь прямых, никакие две из которых не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке, и отмечены все возможные точки их пересечения.

Сколькими способами можно провести прямую, не совпадающую ни с одной из уже имеющихся, через две отмеченные точки?

(Укажите наибольшее возможное число)

Ответ: 210

Задача 6. (3 балла)

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром $AC = 65$. Также известно, что $BC = 39$, $AD = 25$. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из B и D на AC .

Ответ запишите в виде неправильной дроби, не округляйте.

Ответ: 2079/65

Задача 7. (4 балла)

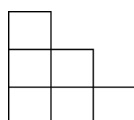
Натуральные числа a и b таковы, что $\text{НОД}(a^2, b) + \text{НОД}(b^2, a) = 10 \cdot \text{НОД}(a, b)$.

Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел a и b ?

Ответ: 90

Задача 8. (4 балла)

У Вали есть краски пяти цветов. Сколькими способами она может раскрасить клетчатую фигуру на рисунке так, чтобы клетки, имеющие общую точку или отрезок, были покрашены в разные цвета? Все краски использовать не обязательно.



Ответ: 1080

Задача 9. (4 балла)

График квадратного трёхчлена $f(x)$ со старшим коэффициентом -1 имеет ровно одну общую точку с графиками трёхчленов $x^2 - 8x + 16$ и $x^2 + 8x + 16$. Найдите наибольшее значение $f(x)$.

Ответ: 8

Задача 10. (4 балла)

Система уравнений

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений. Известно, что a , b , c , d и e — это числа 4, 6, 8, 10 и 12 в каком-то порядке (каждое по одному разу). Найдите f , если известно, что оно целое. Если возможных ответов несколько, перечислите их в порядке возрастания или убывания через точку с запятой.

Ответ: 5;15;20

3.3 Отборочный этап 9 класса. 2 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Прямоугольник имеет площадь 200. Какое наименьшее целочисленное значение может принимать периметр этого прямоугольника, если его стороны не обязательно целые?

Ответ: 57

Задача 2. (2 балла)

Сколькими способами в числе 1235 можно заменить одну цифру на новую так, чтобы новое число делилось на 3?

Ответ: 14

Задача 3. (3 балла)

В параллелограмме $ABCD$ из вершины B проведены высоты $BH = 60$ к стороне AD и $BK = 56$ к стороне CD . Длина диагонали DB равна 65. Найдите длину отрезка AB .

Ответ: 75

Задача 4. (3 балла)

Натуральные числа a и b таковы, что $a \cdot \text{НОК}(a, b) + b \cdot \text{НОД}(a, b) = 259$. В ответе укажите a и b в любом порядке через запятую.

Ответ: 6, 7 || 7, 6

Задача 5. (3 балла)

В Таинственной Стране 7 городов. Некоторые города соединены двусторонними авиалиниями. Оказалось, что есть два города, между которыми нельзя добраться ни напрямую, ни с одной пересадкой. Какое наибольшее число авиалиний может быть в стране?

Ответ: 15

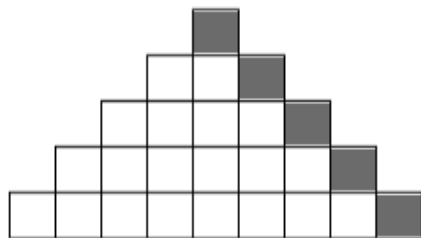
Задача 6. (3 балла)

Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $a^2 - b^2 - a - b = 6000$?

Ответ: 8

Задача 7. (3 балла)

Фишка находится в левой нижней клетке клетчатой фигуры, изображённой на рисунке. Сколькими способами она может добраться до закрашенной диагонали, двигаясь только вправо или вверх?



Ответ: 70

Задача 8. (3 балла)

На декартовой плоскости нарисован квадрат 13×13 с вершинами в целых точках (не обязательно по клеточкам). Сколько целых точек может быть внутри (не включая точки на границе) этого квадрата? Если возможных ответов несколько, перечислите все варианты через запятую.

Ответ: 168, 144 || 144, 168

Задача 9. (4 балла)

Приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет единственный корень 5. Приведённый квадратный трёхчлен $g(x)$ имеет единственный корень 17. Приведённый квадратный трёхчлен $h(x)$ также имеет единственный корень. Какое наименьшее значение может принимать трёхчлен $f(x) + g(x) + h(x)$?

Ответ: 72

Задача 10. (4 балла)

Окружности с центрами в точках A и B и радиусами 17 и 16 пересекаются в точках C и D . CE диаметр первой окружности, F — точка на прямой CD такая, что FE и FG — касательные к первой и второй окружностям соответственно. $AB = 15 + \text{Math.sqrt}(192)$. Найдите площадь треугольника FBG

Ответ: 510

4 Задания для 8 класса

4.1 Заключительный этап 8 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Квадратные уравнения $x^2 + px + q$ и $x^2 + ax + b$ имеют по одному корню. Среди чисел p, q, a, b есть 16, 64 и 1024. Каким может быть четвертое число?

Если возможных ответов несколько, в систему введите больший из них, а в письменном решении укажите все.

Ответ: $\pm 8, \pm 64, 262144$

Решение:

Дискриминант уравнения $x^2 + px + q$ должен быть равен нулю, поэтому $p^2 = 4q$. Аналогично $a^2 = 4b$.

Значит, если p это 16, 64 или 1024, $q = \frac{p^2}{4}$, то есть 64, 1024 или $2^{18} = 262144$. Аналогично для a и b .

Если же q это 16, 64 или 1024, $p = \pm 2\sqrt{q}$, то есть $\pm 8, \pm 16$ или ± 64 . Аналогично для a и b .

Значит, коэффициент 64 обязательно находится в одном уравнении с 16 или 1024, а четвертое число равно $\pm 8, \pm 64$ или 262144.

Задача 2. (3 балла)

Натуральные числа a и b таковы, что $2a + 3b = \text{НОК}(a, b)$. Какие значения может принимать число $\frac{\text{НОК}(a, b)}{a}$? Перечислите все возможные варианты в порядке возрастания или убывания через запятую. Если решений нет, напишите число 0.

Ответ: 0 (решений нет)

Решение:

Пусть $d = \text{НОД}(a, b)$. Тогда $a = xd, b = yd, \text{НОК}(a, b) = xyd$, где x и y взаимно просты. Получаем $2xd + 3yd = xyd$. Сокращаем на d и получаем $2x + 3y = xy$.

Правая часть этого равенства делится на x , значит, $2x + 3y$ делится на x , откуда $3y$ делится на x . Так как x и y взаимно просты, 3 должно делиться на x . То есть $x = 3$ или $x = 1$. Аналогично 2 делится на y .

Если $x = 3$, уравнение принимает вид $6 + 3y = 3y$, что неверно. Если $x = 1$, получаем $2 + 3y = y$, откуда y отрицательно, что тоже невозможно.

Значит, решений нет.

Задача 3. (3 балла)

Число N представляется в виде суммы квадратов пяти подряд идущих натуральных чисел. Докажите, что $N - 5$ представляется в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

Доказательство:

Обозначим эти пять подряд идущих чисел за $x - 2, x - 1, x, x + 1$ и $x + 2$. Тогда их квадраты равны $x^2 - 4x + 4, x^2 - 2x + 1, x^2, x^2 + 2x + 1, x^2 + 4x + 4$. Отсюда $N = 5x^2 + 10$, а $N - 5 = 5x^2 + 5 = 4x^2 + 4x + 1 + x^2 - 4x + 4 = (2x + 1)^2 + (x - 2)^2$, что и требовалось доказать.

Задача 4. (3 балла)

Внутри пятиугольника отметили 1000 точек и разделили пятиугольник на треугольники так, чтобы каждая из отмеченных точек оказалась вершиной хотя бы одного из них. Какое наименьшее число треугольников могло получиться?

Ответ: 1003

Решение:

Сумма углов пятиугольника составляет 540° . Сумма углов в каждой внутренней точке составляет либо 180° , если она лежит на стороне одного из треугольников и является вершиной ещё нескольких, либо 360° , если со всех сторон от неё находятся углы треугольников. То есть, в каждой внутренней точке сумма углов не менее 180° .

Итого для тысячи точек получаем сумму углов всех треугольников не менее $540^\circ + 1000 \cdot 180^\circ = 1003 \cdot 180^\circ$. Для этого нам необходимо хотя бы 1003 треугольника, т.к. в каждом сумма углов 180° .

Пример, когда достигается значение 1003, строится следующим образом: сначала разделим пятиугольник на три треугольника диагоналями, выходящими из одной из вершин. Затем на одной из диагоналей отметим 1000 точек и соединим их с противоположной вершиной треугольника, для которого эта диагональ является стороной. Треугольник разобьётся на 1001 часть, что даст нам ещё 1000 новых треугольников.

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ с основанием AD диагонали являются биссектрисами углов $\angle B$ и $\angle C = 110^\circ$. Найдите градусную меру угла $\angle BAC$.

Решение:

$\angle BDA = \angle CBD$ как накрест лежащие, а $\angle CBD = \angle ABD$, поскольку BD — биссектриса. Поэтому треугольник BDA равнобедренный, то есть $AB = AD$. Аналогично $CD = AD$, то есть наша трапеция равнобедренная (равнобокая) и $\angle B = \angle C = 110^\circ$.

$$\angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle BCA = 180^\circ - 110^\circ - 55^\circ = 15^\circ.$$

Ответ: 15

Задача 6. (3 балла)

В таблице 8×10 (8 строк, 10 столбцов) какие-то клетки чёрные, а остальные — белые. В каждой белой клетке написали суммарное количество чёрных, находящихся с ней в одной строке; в чёрных клетках ничего не написано. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 200

Решение:

Если в строке находится x чёрных клеток и $10 - x$ белых, то сумма горизонтальных слагаемых в этой строке составляет $x(10 - x)$. Эта величина максимальна при $x = 5$ и равна 25. Это можно понять, так как $x(10 - x) - 25 = -x^2 + 10x - 25 = -(x - 5)^2$. Значит, максимальная сумма всех чисел составляет $8 \cdot 25 = 200$. Пример легко строится.

Задача 7. (4 балла)

На плоскости отмечены 13 точек общего положения, некоторые из которых соединены отрезками. При этом проведённые отрезки не образуют ни одного треугольника или четырёхугольника с вершинами в отмеченных точках.

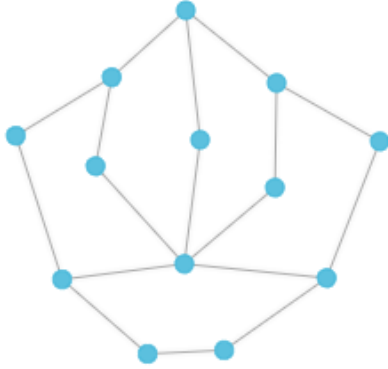
Может ли быть нарисовано больше 16 отрезков?

Точки общего положения — точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

Ответ: Да

Решение:

Поскольку не должно быть ни треугольников, ни четырёхугольников, построим пример из пятиугольников:



На рисунке 17 отрезков. На самом деле можно было бы использовать ещё и самопересекающиеся четырёхзвенные ломаные, которые по определению четырёхугольниками не являются.

Задача 8. (5 баллов)

В треугольнике ABC $AB = 13$ и $BC = 15$. На стороне AC взята точка D такая, что $AD = 5$ и $CD = 9$. Биссектриса угла, смежного с углом A , пересекает прямую BD в точке E . Найдите DE .

Ответ: $7,5 \parallel 15/2$

Решение:

Посчитаем площадь треугольника ABC по формуле Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84$ (где p — полупериметр треугольника, a , b и c — его стороны). Тогда длина высоты BH , опущенной на сторону AC , равна $\frac{2S}{AC} = 12$, откуда по теореме Пифагора $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 5 = AD$. То есть D и H — это одна и та же точка, и BD — высота.

Пусть AK — биссектриса угла K в треугольнике ABD . Тогда, по основному свойству биссектрисы,

$$BK : KD = AB : AD = 13 : 5, \text{ откуда } KD = \frac{5}{18} \cdot BD = \frac{10}{3}.$$

Угол $KAЕ$, образованный биссектрисами смежных углов, прямой, значит, AD — высота в прямоугольном треугольнике $KAЕ$ и $AD^2 = KD \cdot DE$, откуда $DE = 25 : \frac{10}{3} = 7,5$.

4.2 Отборочный этап 8 класса. 1 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (1 балл)

Сколько различных слов можно составить, вычеркнув две соседние буквы из слова АААРРРДВВВАААААРРККК?

Ответ: 12

Задача 2. (2 балла)

Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что сумма расстояний от точки A до остальных трёх точек равна 17, а сумма расстояний от точки D до остальных трёх точек равна 19. Какое наибольшее целочисленное значение может принимать длина отрезка AD ?

Ответ: 8

Задача 3. (2 балла)

Щит и меч вместе продавались на 12% дешевле, чем по отдельности. В какой-то момент оба товара подорожали на 10%, а набор из щита и меча — на 20%. На сколько процентов теперь выгоднее покупать щит и меч вместе, чем по отдельности?

Ответ: 4

Задача 4. (3 балла)

В остроугольном треугольнике провели биссектрису одного из углов. Она разделила его на два треугольника. В том из получившихся треугольников, который оказался остроугольным, также провели биссектрису. Этот процесс повторили несколько раз. В конце концов получился треугольник с углами 72° , 78° и 30° . Какое наибольшее значение (в градусах) мог принимать угол исходного треугольника (не обязательно тот, биссектрису которого проводили)?

Ответ: 84

Задача 5. (3 балла)

Вася увидел написанное на доске число от 10 до 19. От скуки он посчитал сумму цифр написанного числа, прибавил её к самому числу и получившуюся сумму записал на доске вместо исходного числа. Так он сделал 10 000 000 раз и получил число 355 356 872. Какое число было записано изначально?

Ответ: 14

Задача 6. (3 балла)

Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 17$ и $BC = 12$. Найдите расстояние между точкой пересечения биссектрис углов A и B и точкой пересечения биссектрис углов C и D .

Ответ: 5

Задача 7. (4 балла)

Три друга добирались из пункта A в пункт B , а затем в пункт B . Начали и закончили движение они одновременно. Вася из A в B ехал со скоростью 60 км/ч, а из B в B со скоростью 20 км/ч. Петя из A в B ехал со скоростью 50 км/ч, а из B в B со скоростью 25 км/ч. Коля из A в B ехал со скоростью 45 км/ч. С какой скоростью (в км/ч) ехал Коля из пункта B в пункт B ?

Ответ: 30

Задача 8. (4 балла)

Четырёхзначные числа a и b таковы, что $a = 2b$ и все восемь цифр, входящие в эти два числа, различны. Какое наибольшее значение может принимать число a ?

Ответ: 9730

Задача 9. (4 балла)

На плоскости проведены восемь прямых, никакие две из которых не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке, и отмечены все возможные точки их пересечения.

Сколькими способами можно провести прямую, не совпадающую ни с одной из уже имеющихся, через две отмеченные точки?

(Укажите наибольшее возможное число)

Ответ: 210

Задача 10. (5 баллов)

Система уравнений

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений. Известно, что a , b , c , d и e — это числа 4, 6, 8, 10 и 12 в каком-то порядке (каждое по одному разу). Найдите f , если известно, что оно целое. Если возможных ответов несколько, перечислите их в порядке возрастания или убывания через точку с запятой.

Ответ: 5;15;20

4.3 Отборочный этап 8 класса. 2 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

a , b , c и d — четыре различные цифры. Двухзначное число, составленное из цифр a и b , разделили на двухзначное число, составленное из цифр c и d . Какая наиболее близкая к единице дробь могла получиться?

Ответ: $79/80$

Задача 2. (2 балла)

Сколькими способами в числе 1235 можно заменить одну цифру на новую так, чтобы новое число делилось на 3?

Ответ: 14

Задача 3. (3 балла)

В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны и имеют целочисленную длину. Кроме того, $AD = 3$, $AC = 7$, $BC = 15$. Найдите AB .

Ответ: 9

Задача 4. (3 балла)

$ABCD$ — квадрат. ABF и ADE — равносторонние треугольники, причём точки E и F лежат снаружи квадрата. Найдите градусную меру угла $\angle FEA$.

Ответ: 15

Задача 5. (3 балла)

Прямоугольник имеет площадь 200. Какое наименьшее целочисленное значение может принимать периметр этого прямоугольника, если его стороны не обязательно целые?

Ответ: 57

Задача 6. (3 балла)

Натуральные числа a и b таковы, что $a \cdot \text{НОК}(a, b) + b \cdot \text{НОД}(a, b) = 259$. В ответе укажите a и b в любом порядке через запятую.

Ответ: 6, 7 || 7, 6

Задача 7. (3 балла)

В Триландии 30 городов. Некоторые из них соединены дорогами (с двусторонним движением), по которым можно доехать от любого города до любого. Из каждого города выходит не больше трёх дорог. Тупиковым называется город, из которого выходит только одна дорога. Какое наибольшее число городов могут быть тупиковыми?

Ответ: 16

Задача 8. (3 балла)

Клетки доски 7×7 раскрашены в три цвета так, что рядом с любой клеткой есть клетки всех трёх цветов. Какое наименьшее число клеток одного цвета может быть?

(Будем считать, что две различные клетки находятся рядом если у них есть хотя бы одна общая точка)

Ответ: 9

Задача 9. (4 балла)

При каком наибольшем n прямоугольник $35 \times n$ нельзя разбить на прямоугольники 5×7 и 7×5 ?

Ответ: 23

Задача 10. (4 балла)

В параллелограмме $ABCD$ из вершины B проведены высоты $BH = 36$ к стороне AD и $BK = 40$ к стороне CD . Длина диагонали DB равна 85. Найдите длину отрезка AB .

Ответ: 45

5 Задания для 5-7 классов

5.1 Заключительный этап 5-7 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

ABC — равносторонний треугольник со стороной 10. На стороне AB взята точка D , на стороне AC — точка E , на стороне BC — точки F и G такие, что треугольники ADE , BDG и CEF также равносторонние. $AD = 3$. Найдите FG .

Ответ: 4

Решение:

$BD = AB - AD = 10 - 3 = 7$, поэтому все стороны треугольника BDG равны 7.

$CE = AC - AE = AC - AD = 10 - 3 = 7$, поэтому все стороны треугольника CEF также равны 7.

Получается, что $BG + CF = 14$. Это больше длины отрезка $BC = 10$, поэтому $GF = 14 - 10 = 4$.

Задача 2. (3 балла)

Лиса Алиса загадала двузначное число, и сообщила Буратино, что это число делится на 2, 3, 4, 5 и 6. Однако Буратино узнал, что из этих пяти утверждений ровно два на самом деле неверны. Какие числа могла загадать лиса Алиса? В ответе укажите количество возможных вариантов.

Ответ: 8

Решение:

Если число не делится на 2, то оно не делится ни на 4, ни на 6 и мы получаем уже три неверных утверждения. Значит, загаданное число точно делится на 2. Если чётное число делится на 3, то оно делится и на 6 тоже, значит в этом случае неверны утверждения про делимость на 4 и 5. Если же число не делится на 3, то оно не делится на 6, и утверждения про делимость на 4 и 5 должны быть, наоборот верны.

В первом случае мы получаем числа, которые делятся на 6, но не делятся ни на 4, ни на 5. Таких двузначных чисел ровно пять: 18, 42, 54, 66 и 78. Во втором случае мы получаем числа, которые делятся на 20, но не делятся на 3. Таких чисел три: 20, 40 и 80. Всего получается 8 чисел.

Задача 3. (3 балла)

Все жители острова либо блондины, либо брюнеты с зелёными или голубыми глазами. Доля брюнетов среди голубоглазых составляет 65%. Доля голубоглазых среди блондинов составляет 70%. И, наконец, доля блондинов среди зеленоглазых составляет 10%. Сколько процентов населения острова составляют зеленоглазые брюнеты?

Ответ: 54

Решение:

Обозначим количество голубоглазых брюнетов за a , голубоглазых блондинов за b , зеленоглазых блондинов за c и зеленоглазых брюнетов за d .

Тогда $\frac{a}{a+b} = 0,65$, откуда $\frac{a+b}{a} = \frac{20}{13}$ и $\frac{b}{a} = \frac{20}{13} - 1 = \frac{7}{13}$.

Аналогично $\frac{b}{b+c} = 0,7$, откуда $\frac{b+c}{b} = \frac{10}{7}$ и $\frac{c}{b} = \frac{10}{7} - 1 = \frac{3}{7}$ и $\frac{c}{a} = \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{7}{13} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{13}$.

Наконец, $\frac{c}{c+d} = 0,1$, откуда $\frac{c+d}{c} = 10$ и $\frac{d}{c} = 10 - 1 = 9$ и $\frac{d}{a} = \frac{d}{c} \cdot \frac{c}{a} = 9 \cdot \frac{3}{13} = \frac{27}{13}$.

Тогда $\frac{a+b+c+d}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} = 1 + \frac{7}{13} + \frac{3}{13} + \frac{27}{13} = \frac{50}{13}$.

Соответственно, $\frac{d}{a+b+c+d} = \frac{d}{a} \cdot \frac{a}{a+b+c+d} = \frac{27}{13} \cdot \frac{13}{50} = \frac{27}{50} = 54\%$.

Задача 4. (3 балла)

Даны три числа: пятизначное, четырёхзначное и трёхзначное. Каждое из них состоит из одинаковых цифр (каждое — из своих). Может ли получиться так, что их сумма — пятизначное число, состоящее из пяти различных цифр?

Ответ: Да

Решение:

Вообще-то достаточно одного примера, но давайте поясним, как он получается.

Если при сложении переносов не происходит, три последние цифры суммы будут одинаковыми. Значит, нам надо добиться того, чтобы переносы из разряда единиц в разряд десятков и из разряда десятков в разряд сотен во-первых были, а, во-вторых, были различны.

Этого можно добиться, если сумма наших трёх цифр равна 19. Тогда при в разряде десятков, с учётом переноса 1, получается уже 20 а не 19, и в разряд сотен переносится 2. Тогда сумма чисел будет оканчиваться на 109, и в разряд десятков тысяч будет переноситься двойка. Осталось добиться того, чтобы сумма цифр пятизначного и четырёхзначного числа оканчивалась не на 7, 8 или 9 (чтобы в сумме с двойком не получалось 9, 10 или 11), и чтобы сумма была пятизначной и ей первая цифра тоже отличалась от остальных.

Пример: $55555 + 6666 + 888 = 63109$

Задача 5. (3 балла)

В клетках таблицы 7×7 записаны попарно различные целые неотрицательные числа. Оказалось, что у любых двух чисел, находящихся в одной строке или одном столбце, отличаются неполные частные при делении на 8. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из чисел в таблице?

Ответ: 54

Решение: В каждой строке должны быть семь чисел, дающих различные неполные частные при делении на 8. Это значит, что в каждой строке есть как минимум одно число с неполным частным при делении на 8 равным 6 или больше (6, а не 7, поскольку минимальное значение неполного частного равно 0). Значит, в таблице есть хотя бы 7 чисел, не меньших, чем $6 \cdot 8 = 48$. Наибольшее из них не меньше чем $48 + 6 = 54$.

Такой вариант действительно возможен, если расставлять числа с одинаковыми неполными частными по диагоналям:

$0 \cdot 8 + 1$	$1 \cdot 8 + 1$	$2 \cdot 8 + 1$	$3 \cdot 8 + 1$	$4 \cdot 8 + 1$	$5 \cdot 8 + 1$	$6 \cdot 8 + 1$
$6 \cdot 8 + 2$	$0 \cdot 8 + 2$	$1 \cdot 8 + 2$	$2 \cdot 8 + 2$	$3 \cdot 8 + 2$	$4 \cdot 8 + 2$	$5 \cdot 8 + 2$
$5 \cdot 8 + 3$	$6 \cdot 8 + 3$	$0 \cdot 8 + 3$	$1 \cdot 8 + 3$	$2 \cdot 8 + 3$	$3 \cdot 8 + 3$	$4 \cdot 8 + 3$
$4 \cdot 8 + 4$	$5 \cdot 8 + 4$	$6 \cdot 8 + 4$	$0 \cdot 8 + 4$	$1 \cdot 8 + 4$	$2 \cdot 8 + 4$	$3 \cdot 8 + 4$
$3 \cdot 8 + 5$	$4 \cdot 8 + 5$	$5 \cdot 8 + 5$	$6 \cdot 8 + 5$	$0 \cdot 8 + 5$	$1 \cdot 8 + 5$	$2 \cdot 8 + 5$
$2 \cdot 8 + 6$	$3 \cdot 8 + 6$	$4 \cdot 8 + 6$	$5 \cdot 8 + 6$	$6 \cdot 8 + 6 = 54$	$0 \cdot 8 + 6$	$1 \cdot 8 + 6$
$1 \cdot 8 + 0$	$2 \cdot 8 + 0$	$3 \cdot 8 + 0$	$4 \cdot 8 + 0$	$5 \cdot 8 + 0$	$6 \cdot 8 + 0$	$0 \cdot 8 + 7$

Задача 6. (3 балла)

На каждой из шести граней куба написали число. Потом на каждом из двенадцати рёбер написали сумму чисел на двух соседних с ним гранях. Можно ли зная эти 12 чисел на рёбрах однозначно восстановить числа на гранях?

Ответ: Да

Решение:

Пусть на некоторой грани написано число a , а на соседних с ней — числа b , c , d и e (в таком порядке). Сложим числа на четырёх рёбрах, примыкающих к этой грани (это $a + b$, $a + c$, $a + d$ и $a + e$) и вычтем числа на двух рёбрах, выходящих из двух противоположных вершин нашей грани перпендикулярно ей (это числа $b + c$ и $d + e$). Получим число $4a$, разделив которое на 4, мы узнаем число на грани. Так можно сделать для любой грани.

Задача 7. (4 балла)

Докажите, что сумма длин диагоналей 21-угольника меньше, чем его периметр, умноженный на 54.

Доказательство:

Диагональ 21-угольника отсекает с одной стороны x сторон, а с другой $21 - x$. Пусть x — меньшее из этих двух чисел, тогда $2 \leq x \leq 10$. Вместе с этими x сторонами наша диагональ образует многоугольник (или ломаную), значит, её длина меньше суммы длин этих x сторон.

Запишем все полученные таким образом неравенства и сложим их. У нас получится, что сумма длин диагоналей меньше, чем сумма сторон, в которой каждая сторона посчитана некоторое количество раз.

Каждую сторону мы посчитали в этих неравенствах: два раза — для двух диагоналей, которые отсекают по две стороны; три раза — для трёх диагоналей, которые отсекают по три стороны; ... 10 раз — для десяти диагоналей, которые отсекают по 10 сторон. Итого $2 + 3 + \dots + 10 = 54$.

Так как каждую сторону в этом неравенстве мы посчитали 54 раза, получается, что длин диагоналей 21-угольника меньше, чем его периметр, умноженный на 54.

Задача 8. (4 балла)

В Волшебной Стране 100 городов, некоторые города соединены между собой двусторонними авиалиниями. Между любыми двумя городами можно добраться, сделав не более 11 пересадок, причём единственным образом. Если из города A в город B нельзя добраться с 10 пересадками или менее, назовём их оба окраинными. Какое наибольшее число окраинных городов может быть в стране?

Ответ: 89

Решение:

Рассмотрим два окраинных города и маршрут между ними. Все 11 городов, в которых делаются пересадки на этом маршруте, окраинными быть не могут. Все остальные города могут быть окраинными, если из них ведут прямые рейсы в первый или последний из этих 11 промежуточных городов.

Значит, наибольшее количество окраинных городов составляет $100 - 11 = 89$.

5.2 Отборочный этап 5-7 класса. 1 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Крестьяне собирали арбузы, каждый собрал хотя бы один арбуз. Никакие двое не собирали поровну и всего было собрано 100 арбузов. Какое наибольшее количество крестьян могло участвовать в сборке арбузов?

Ответ: 13

Задача 2. (2 балла)

Трёхзначные числа a и b таковы, что $a = 2b$ и все шесть цифр, входящие в эти два числа, различны. Какое наибольшее значение может принимать число b ?

Ответ: 486

Задача 3. (3 балла)

Какое наибольшее количество квадратов 2×2 можно нарисовать по клеточкам на клетчатой доске 8×8 так, чтобы никакие два квадрата не пересекались больше, чем по одной клетке и каждая клетка содержалась бы не более, чем в двух квадратах?

Ответ: 25

Задача 4. (3 балла)

В остроугольном треугольнике провели биссектрису одного из углов. Она разделила его на два треугольника. В том из получившихся треугольников, который оказался остроугольным, также провели биссектрису. Этот процесс повторили несколько раз. В конце концов получился треугольник с углами 72° , 78° и 30° . Какое наибольшее значение (в градусах) мог принимать угол исходного треугольника (не обязательно тот, биссектрису которого проводили)?

Известно, что сумма углов треугольника равна 180° .

Ответ: 84

Задача 5. (3 балла)

У Вовочки есть электронные часы, показывающие время от 0:00 до 23:59. Однажды он посмотрел на них, и обнаружил, что количество минут делится на количество часов. Через 23 минуты он снова посмотрел на часы и обнаружил, что количество часов делится на количество минут. В какой самый поздний момент в сутках Вовочка мог посмотреть на часы второй раз?

Ответ: 23:23

Задача 6. (3 балла)

Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что сумма расстояний от точки A до остальных трёх точек равна 17, а сумма расстояний от точки D до остальных трёх точек равна 19. Какое наибольшее целочисленное значение может принимать длина отрезка AD ?

Ответ: 8

Задача 7. (3 балла)

Щит и меч вместе продавались на 12% дешевле, чем по отдельности. В какой-то момент оба товара подорожали на 10%, а набор из щита и меча — на 20%. На сколько процентов теперь выгоднее покупать щит и меч вместе, чем по отдельности?

Ответ: 4

Задача 8. (3 балла)

В очереди стоят 50 человек, каждый из которых либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Все люди, стоящие на нечётных местах в очереди сказали

«Количество рыцарей, стоящих передо мной, делится на три», а все люди, стоящие на чётных местах в очереди сказали «Количество лжецов, стоящих передо мной, делится на три». Сколько рыцарей было в очереди?

Ответ: 26

Задача 9. (3 балла)

Вася увидел написанное на доске число от 10 до 19. От скуки он посчитал сумму цифр написанного числа, прибавил её к самому числу и получившуюся сумму записал на доске вместо исходного числа. Так он сделал 10 000 000 раз и получил число 355 356 872. Какое число было записано изначально?

Ответ: 14

Задача 10. (5 баллов)

Три друга добирались из пункта А в пункт Б, а затем в пункт В. Начали и закончили движение они одновременно. Вася из А в Б ехал со скоростью 60 км/ч, а из Б в В со скоростью 20 км/ч. Петя из А в Б ехал со скоростью 50 км/ч, а из Б в В со скоростью 25 км/ч. Коля из А в Б ехал со скоростью 45 км/ч. С какой скоростью (в км/ч) ехал Коля из пункта Б в пункт В?

Ответ: 30

5.3 Отборочный этап 5-7 класса. 2 тур

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Числа a и b не являются взаимно простыми, а их НОК равно 100. Какое наименьшее значение может принимать $a + b$?

Ответ: 45

Задача 2. (2 балла)

В некоторой фирме 20% мужчин носят жёлтые штаны, а 18% женщин — малиновые штаны. Приглашения на праздник получили 80% мужчин, носящих жёлтые штаны, и 50% женщин, носящих малиновые штаны. Среди приглашённых мужчин в жёлтых штанах и женщин в малиновых штанах оказалось поровну. Какой процент сотрудников фирмы составляют мужчины?

Ответ: 36

Задача 3. (2 балла)

Маше исполнилось 12 лет. На следующий день её подруге Кате также исполнилось 12. На следующий день после Катиного дня рождения, в среду, 12 лет исполнилось Вике. В следующем году девочкам исполнилось 13 лет, причём Маше во вторник, а Кате — в четверг. Когда день рождения у Вики?

В ответе укажите число и месяц.

Ответ: 2.03

Задача 4. (2 балла)

В комнате собрались пять человек. Каждый из них либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них произнёс по одной фразе:

Первый : "Среди нас больше 4 рыцарей".

Второй: "Среди нас не меньше 4 рыцарей".

Третий : "Среди нас ровно 4 рыцаря".

Четвёртый : "Среди нас не больше 4 рыцарей".

Пятый: "Среди нас меньше 4 рыцарей".

сколько на самом деле рыцарей?

Ответ: 2

Задача 5. (3 балла)

a , b , c и d — четыре различные цифры. Двухзначное число, составленное из цифр a и b , разделили на двухзначное число, составленное из цифр c и d . Какая наиболее близкая к единице дробь могла получиться?

Ответ: 79/80

Задача 6. (3 балла)

В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны и имеют целочисленную длину. Кроме того, $AD = 3$, $AC = 7$, $BC = 15$. Найдите AB .

Ответ: 9

Задача 7. (4 балла)

$ABCD$ — квадрат. ABF и ADE — равносторонние треугольники, причём точки E и F лежат снаружи квадрата. Найдите градусную меру угла $\angle FAE$.

В решении задачи можно пользоваться тем, что сумма углов треугольника составляет 180° .

Ответ: 15

Задача 8. (4 балла)

При каком наибольшем n прямоугольник $35 \times n$ нельзя разбить на прямоугольники 5×7 и 7×5 ?

Ответ: 23

Задача 9. (4 балла)

В Триландии 30 городов. Некоторые из них соединены дорогами (с двусторонним движением), по которым можно доехать от любого города до любого. Из каждого города выходит не больше трёх дорог. Тупиковым называется город, из которого выходит только одна дорога. Какое наибольшее число городов могут быть тупиковыми?

Ответ: 16

Задача 10. (4 балла)

Клетки доски 7×7 раскрашены в три цвета так, что рядом с любой клеткой есть клетки всех трёх цветов. Какое наименьшее число клеток одного цвета может быть?

(Будем считать, что две различные клетки находятся рядом если у них есть хотя бы одна общая точка)

Ответ: 9