Задания отборочного и заключительного этапов
«Открытой олимпиады школьников» (математика)
(№62 Перечня олимпиад школьников, 2022/2023 уч.год)

Оглавление

1 Задания заключительного этапа олимпиады

1.1 Задания для 11 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Простые числа p, q и r таковы, что $p < q$, $p+q = r$, $p^2+q^2 = r^2-116$. Найдите p, q и r.

Ответ: $p = 2$, $q = 29$, $r = 31$.

Решение: Возведём первое равенство в квадрат и перенесём $2pq$ в правую часть: $p^2 + q^2 = r^2 - 2pq$, откуда $2pq = 116 = 2^2 \cdot 29$. Значит, учитывая, что $p < q$, получаем $p = 2$, $q = 29$, $r = 31$.

Задача 2. (2 балла)

$P(x)$ — кубический многочлен с рациональными коэффициентами. Его значение в точке $\sqrt{7}$ составляет 8, а значение его производной в этой же точке равно 56. Найдите все коэффициенты многочлена.

Ответ: $P(x) = 4x^3 - 28x + 8$.

Решение: Пусть $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Тогда $P(\sqrt{7}) = 7a\sqrt{7} + 7b + c\sqrt{7} + d = (7a+c)\sqrt{7} + 7b + d = 8$. Это число может быть рациональным только если $(7a+c)\sqrt{7} = 0$, откуда $7a + c = 0$ и $7b + d = 8$.

Далее, $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, значит $P'(\sqrt{7}) = 21a + 2b\sqrt{7} + c = 56$, откуда по аналогичным соображениям $b = 0$ и $21a + c = 56$. Подставляя $b = 0$ в полученное ранее уравнение $7b+d = 8$ получаем $d = 8$. Подставляя $c = -7a$ в уравнение $21a+c = 56$ получаем $14a = 56$, откуда $a = 4$ и $c = -28$.

Задача 3. (3 балла)

Вася написал на доске три числа: $\sin x$, $\sin 2x$ и $\sin 3x$ в каком-то порядке. Все числа оказались различными. Петя пытается определить, какое из чисел где. Какое из трёх утверждений верно:

(1) У Пети всегда получится определить, где $\sin x$, где $\sin 2x$, а где $\sin 3x$

(2) При некоторых значениях получится, а при некоторых нет.

(3) Никогда не получится.

Ответ: При некоторых значениях получится, а при некоторых нет.

Решение: Для доказательства этого нам достаточно привести пример ситуации, в которой у Пети получится различить три данных числа, и пример ситуации, в которой не получится это сделать.

Первое проще: подойдёт практически любое значение x. Например, если $x_0 = \dfrac{\pi}{17}$, $2x_0 = \dfrac{2\pi}{17}$, $3x_0 = \dfrac{3\pi}{17}$ и их синусы различны и положительны.

Пусть найдётся x для которого эти три синуса получаются такими же, но в другом порядке. Разберём несколько все случаи возможные x, такие что $\sin x$ совпадает с одним из написанных на доске чисел.

1) $x = \dfrac{\pi}{17} + 2\pi k$. Синусы получаются такие же, как и для x_0 в том же порядке.

2) $x = \dfrac{16\pi}{17} + 2\pi k$. В этом случае $\sin x$ и $\sin 3x$ получаются такие же, как и для x_0 в том же порядке, а $\sin 2x$ меняет знак, т.е. получается другой набор чисел.

3) $x = \dfrac{2\pi}{17} + 2\pi k$. В этом случае $\sin x = \sin 2x_0$. Однако $\sin 2x = \sin\left(\dfrac{4\pi}{17}\right)$, что не совпадает ни с $\sin x_0$, ни с $\sin 3x_0$, так как больше каждого из них.

4) $x = \dfrac{15\pi}{17} + 2\pi k$. В этом случае $\sin x = \sin 2x_0$. Однако $\sin 2x = \sin\left(\dfrac{30\pi}{17}\right)$, что не совпадает ни с $\sin x_0$, ни с $\sin 3x_0$, так как отрицательно.

5) $x = \dfrac{3\pi}{17} + 2\pi k$. В этом случае $\sin x = \sin 3x_0$. Однако $\sin 2x = \sin\left(\dfrac{6\pi}{17}\right)$, что не совпадает ни с $\sin x_0$, ни с $\sin 2x_0$, так как больше каждого из них.

6) $x = \dfrac{14\pi}{17} + 2\pi k$. В этом случае $\sin x = \sin 3x_0$. Однако $\sin 2x = \sin\left(\dfrac{28\pi}{17}\right)$, что не совпадает ни с $\sin x_0$, ни с $\sin 2x_0$, так как отрицательно.

Таким образом, единственная возможность получить те же 3 синуса, это случай 1), в котором порядок синусов также совпадает.

Теперь приведём противоположный пример: рассмотрим $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $\sin x_1 = 1$, $\sin 2x_1 = 0$, $\sin 3x_1 = -1$. С другой стороны, пусть $x_2 = -\dfrac{\pi}{2}$. Тогда $\sin x_2 = -1$, $\sin 2x_2 = 0$, $\sin 3x_2 = 1$. Таким образом, Петя не сможет отличить эти две ситуации друг от друга.

Задача 4. (3 балла) (общий вид задачи)

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром равным x. S — сфера, вписанная в каркас этого куба (то есть, касающаяся всех его рёбер). Точка M — середина ребра B_1C_1. Прямая AM вторично пересекает сферу S в точке X. Найдите AX.

Ответ: $\dfrac{x}{6}$.

Решение: По теореме Пифагора $AM = \sqrt{(}x^2+x^2+\dfrac{x^2}{4} = \dfrac{3x}{2}$. Пусть K — середина ребра AA_1, она же точка касания сферы. $AK = \dfrac{x}{2}$. Так как $AK^2 = AX \cdot AM$, $AX = AK^2/AM = \dfrac{x}{6}$

Задача 5. (3 балла)

Для произвольных вещественных чисел x, y, z, t, больших 7 докажите неравенство:

$$4 \cdot \sqrt{(x-3)(y-4)(z-5)(t-6)} < (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-7)^2 + (t-4)^2.$$

Доказательство:

По неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$\sqrt[4]{(x-3)(y-4)(z-5)(t-6)} \leqslant \frac{(x-3)+(y-4)+(z-5)+(t-6)}{4},$$

откуда

$$4 \cdot \sqrt{(x-3)(y-4)(z-5)(t-6)} \leqslant \frac{(x+y+z+t-18)^2}{4}.$$

При этом, чтобы это равенство обращалось в равенство, должно выполняться $x-3 = y-4 = z-5 = t-6$.

По неравенству о среднем арифметическом и среднем квадратичном

$$\frac{(x-2)+(y-5)+(z-7)+(t-4)}{4} \leqslant \sqrt{\frac{(x-2)^2+(y-5)^2+(z-7)^2+(t-4)^2}{4}},$$

откуда

$$\frac{(x+y+z+t-18)^2}{4} \leqslant (x-2)^2+(y-5)^2+(z-7)^2+(t-4)^2.$$

При этом, чтобы это равенство обращалось в равенство, должно выполняться $x-2 = y-5 = z-7 = t-4$.

Таким образом

$$4\cdot\sqrt{(x-3)(y-4)(z-5)(t-6)} \leqslant \frac{(x+y+z+t-18)^2}{4} \leqslant (x-2)^2+(y-5)^2+(z-7)^2+(t-4)^2,$$

при этом оба неравенства не могут обращаться в равенство одновременно, что и требовалось доказать.

Задача 6. (3 балла) (общий вид задачи)

В трапеции $ABCD$ длины диагонали BD и основания BC равны. Точка X на луче BD такова, что $BX = CX$. На прямой CX взята точка Y такая, что $AB = BY$. Известно, что $\angle DBC = \alpha^\circ$, $\angle ABD = \beta^\circ$. Найдите градусную меру угла $\angle BYC$.

Ответ: $\alpha+\beta$, $180^\circ-\alpha-\beta$.

Решение: Треугольник BXC равнобедренный, поэтому $\angle XCD = \angle XBC = \alpha$. $\angle BDA = \angle DBC = \alpha$, так как это накрест лежащие углы. Значит, $\angle XCD = \angle BDA$.

Повернём картинку на угол α относительно точки B так, чтобы точка C перешла в точку D. Из доказанного выше равенства углов следует, что прямая CX при этом повороте перейдёт в прямую DA. Точка Y при этом перейдёт в такую точку на прямой AD, что расстояние от неё до точки B равно AB. Таких точек две. Одна из них точка A, а вторая — какая-то точка A'.

Значит, $\angle BYC = \angle BAD$ или $\angle BYC = \angle BA'D$. $\angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ-\alpha-\beta$, как односторонний угол. Это один из ответов.

Посмотрим теперь на точку A'. Треугольник BAA' равнобедренный, причём $\angle BAA'$ равен тому из углов $\angle BAD$ и $180^\circ - \angle BAD$, который является острым (случай прямого угла исключается значениями углов α и β, которые даны в каждом их вариантов). Если $\angle BAD$ тупой, точка A' очевидно лежит на луче DA и $\angle BA'D = 180^\circ - \angle BAD = \alpha+\beta$. Если же $\angle BAD$ острый, $\angle BA'A = \angle BAA' = \angle BAD = 180^\circ-\alpha-\beta$ и точка A' находится на луче AD. При этом во всех вариантах $180^\circ-\alpha-\beta > \alpha$, то есть $\angle BA'A > \angle BDA$ поэтому точка A' лежит ближе к A, чем D, то есть попадает на отрезок AD. Значит, $\angle BA'D = 180^\circ - \angle BA'A = \alpha+\beta$.

Задача 7. (4 балла)

Последовательность x_n задана рекуррентным соотношением $x_{n+1} = x_n + \{x_n\}$ и начальным условием $x_0 = \dfrac{1}{67}$. Найдите $[x_{66000}]$.

($[a]$ — целая часть числа a, $\{a\}$ — дробная часть числа a).

Ответ: 33000

Решение: $x_n = [x_n] + \{x_n\}$, тогда $x_{n+1} = [x_n] + 2\{x_n\}$. Мы каждый раз удваиваем дробную часть числа. Если удвоенная дробная часть оказалась больше единицы, целая часть увеличивается на 1 по сравнению с предыдущим членом, в противном случае остаётся прежней. То есть нам нужно найти количество таких x_n при $n < 66000$, что $\{x_n\} > \frac{1}{2}$.

Рассмотрим теперь последовательность $k_n = 67\{x_n\}$. Заметим, что k_n — целое число от 1 до 66, причём k_{n+1} является остатком от $2k_n$ при делении на 67. То есть, k_n равно остатку от деления 2^n на 67. Для чисел, которые дают одинаковый остаток при делении на 67, будем использовать стандартную запись $k_n \equiv 2^n \pmod{67}$.

Таким образом, нам надо посчитать количество таких k_n при $n < 66000$, что $k_n > 33$. Давайте докажем, что число таких k_n составляет 33000, то есть ровно половину от количества всех членов последовательности. Для этого достаточно доказать, что среди 66 подряд идущих членов последовательности k_n по разу встречаются все возможные остатки от 1 до 66, то есть, выражаясь научной терминологией, число 2 является первообразным корнем по модулю 67. Давайте докажем, что среди первых 66 членов есть все возможные остатки, а дальше остатки зацикливаются с периодом 66.

То, что среди первых 66 членов есть все возможные остатки, равносильно тому, что не существует натурального $m < 66$ такого, что $2^m \equiv 1 \pmod{67}$. Действительно, если для каких-то $y > z$ от 1 до 66 выполняется $2^y \equiv 2^z \pmod{67}$, то есть $2^y - 2^z = 2^z(2^{y-z} - 1)$ делится на 67, откуда $2^{y-z} - 1$ делится на 67 и $2^{y-z} \equiv 1 \pmod{67}$. В обратную сторону: если $2^m \equiv 1 \pmod{67}$, то $2^{m+1} \equiv 2^1$.

$2^{66} \equiv 1 \pmod{67}$ по малой теореме Ферма. Докажем, что для меньших m условие $2^m \equiv 1 \pmod{67}$ не выполняется. Пусть это не так. Рассмотрим такое минимальное m. Оно должно быть делителем 66, иначе остаток от деления 66 на m также подходит и при этом меньше, чем m. Таким образом, нам осталось доказать, что $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^6 = 64$, 2^{11}, 2^{22} и 2^{33} не дают остаток 1 при делении на 67.

Для первых трёх из указанных степеней двойки это очевидно. $2^{11} = 2048 \equiv 38 \pmod{67}$. Соответственно, $2^{22} \equiv 38^2 = 1444 \equiv 37 \pmod{67}$, а $2^{33} = 2^{11} \cdot 2^{22} \equiv 38 \cdot 37 \equiv 1406 \equiv 66 \pmod{67}$.

Таким образом, среди 2^m при $m < 66$ нет остатка 1, значит, остатки всех таких 2^m различны, а, поскольку $2^{66} \equiv 1 \pmod{67}$, далее эти остатки зацикливаются с периодом 66. Среди этих остатков ровно половина хотя бы 34, то есть такова, что $2k_n$ больше 67 и $2\{x_n\} > 1$. Значит, ровно в половине случаев к целой части x_n прибавляется единица и, поскольку 66000 делится на 66, $[x_{66000}] = 33000$.

Задача 8. (5 балла)

На бесконечной клетчатой плоскости некоторые клетки покрашены в красный цвет, некоторые — в синий, а некоторые остались непокрашенными. Известно, что в каждой строчке, где есть хотя бы одна синяя клетка, есть также хотя бы 5 красных, а в каждом столбце, где есть хотя бы одна красная клетка, есть хотя бы 6 синих. Какое наименьшее положительное число покрашенных клеток может быть на плоскости?

В этой задаче правильный ответ с примером оценивается в 1 балл, большая часть баллов ставится за доказательство того, что меньше закрашенных клеток быть не может.

Ответ: 120

Решение: Докажем сначала оценку, то есть утверждение, что меньше 120 закрашенных клеток не может быть.

Если в каком-то столбце есть закрашенные клетки, то по условию они либо только синие, либо обоих цветов. При этом, если в каком-то столбце все закрашенные клетки синие, можно превратить их все в незакрашенные. При этом условие задачи сохранится, а количество закрашенных клеток уменьшится (но не до нуля, так как в строчках с этими синими клетками останутся какие-то красные). Аналогичным образом можно избавиться от строчек, в которых есть красные клетки, но нет синих. Теперь можно считать, что во всех строчках и столбцах, где есть закрашенные клетки, присутствуют клетки обоих цветов.

Пусть у нас x красных клеток и y синих, при этом закрашенные клетки находятся в m строках и n столбцах. Так как в каждом из этих n столбцов присутствуют хотя бы 6 синих клеток, выполняется неравенство $y \geqslant 6n$ или, что то же самое, $n \leqslant \frac{y}{6}$. Аналогично, $x \geqslant 5m$ или, что то же самое, $m \leqslant \frac{x}{5}$. Также заметим, что в каждой строке есть хотя бы одна синяя клетка и 5 красных, $n \geqslant 6$. Аналогично $m \geqslant 7$.

Сравним числа $6x$ и $5y$.

Пусть $6x \geqslant 5y$, то есть $x \geqslant \frac{5}{6}y$. В каждом столбце присутствуют хотя бы 6 синих клеток. Из взятого в качестве предположения неравенства следует, что в каком-то столбце количество красных клеток хотя бы $\frac{5}{6}y$ от количества синих, то есть хотя бы 5, поэтому общее количество закрашенных клеток в данном столбце хотя бы 11, откуда $m \geqslant 11$ и, следовательно, $x \geqslant 55$. Если $y \geqslant 65$, $x+y \geqslant 120$ и оценка доказана. Предположим, $y < 65$, тогда $n < 11$, то есть не превосходит 10.

Но раз $n \leqslant 10$, а $x \geqslant 55$, в каком-то из наших не более чем 10 столбцов присутствуют хотя бы 6 красных клеток. Так как в нём должно быть ещё и 6 синих, мы получаем, что общее количество закрашенных клеток в этом столбце хотя бы 12, то есть, $m \geqslant 12$ и $x \geqslant 5m \geqslant 60$. Тогда, чтобы $x+y$ было меньше 120, необходимо $y \leqslant 59$. Продолжим эти рассуждения.

Поскольку $y \leqslant 59$, значит $n \leqslant 9$. Значит, в каком-то столбце присутствуют хотя бы $\frac{60}{9}$, то есть хотя бы 7 красных клеток, откуда $m \geqslant 7+6=13$, $x \geqslant 5m \geqslant 65$, $y \leqslant 54$.

Поскольку $x \geqslant 65$, в каком-то столбце присутствуют хотя бы $\frac{65}{9}$, то есть хотя бы 8 красных клеток, откуда $m \geqslant 8+6=14$, $x \geqslant 5m \geqslant 70$, $y \leqslant 49$.

Поскольку $y \leqslant 49$, значит $n \leqslant 8$. Значит, в каком-то столбце присутствуют хотя бы $\frac{65}{8}$, то есть хотя бы 9 красных клеток, откуда $m \geqslant 9+6=15$, $x \geqslant 5m \geqslant 75$, $y \leqslant 44$.

Поскольку $y \leqslant 44$, значит $n \leqslant 7$. Значит, в каком-то столбце присутствуют хотя бы $\frac{75}{7}$, то есть хотя бы 11 красных клеток, откуда $m \geqslant 11+6=17$, $x \geqslant 5m \geqslant 85$, $y \leqslant 34$.

Поскольку $y \leqslant 34$, значит $n \leqslant 6$. Значит, в каком-то столбце присутствуют хотя бы $\frac{85}{6}$, то есть хотя бы 15 красных клеток, откуда $m \geqslant 15+6=21$, $x \geqslant 5m \geqslant 105$, $y \leqslant 14$. Отсюда получаем, что $n \leqslant 2$, что противоречит доказанному ранее.

Аналогично разбираем случай, когда$6x < 5y$, то есть $x < \frac{5}{6}y$. В каждой строке присутствуют хотя бы 5 красных клеток. Из взятого в качестве предположения неравенства следует, что в какой-то строке есть хотя бы 6 синих клеток, то есть общее количество закрашенных клеток в данной строке хотя бы 11, откуда $n \geqslant 11$ и, следовательно, $y \geqslant 66$. Если $x \geqslant 54$, $x+y \geqslant 120$ и оценка доказана. Предположим, $x < 54$, тогда $m < 11$, то есть не превосходит 10.

Но раз $m \leqslant 10$, а $y \geqslant 66$, в какой-то из наших не более чем 10 строк присутствуют хотя бы 7 синих клеток. Так как в ней должно быть ещё и 5 красных, мы получаем, что общее количество закрашенных клеток в этой строке хотя бы 12, то есть, $n \geqslant 12$ и $y \geqslant 6n \geqslant 72$. Тогда, чтобы $x+y$ было меньше 120, необходимо $x \leqslant 47$. Продолжим эти рассуждения.

Поскольку $y \geqslant 72$, в какой-то строке присутствуют хотя бы $\frac{72}{9}$, то есть хотя бы 8 синих клеток, откуда $n \geqslant 8+5=13$, $y \geqslant 5n \geqslant 78$, $x \leqslant 41$.

Поскольку $x \leqslant 41$, значит $m \leqslant 8$. Значит, в какой-то строке присутствуют хотя бы $\frac{78}{8}$, то есть хотя бы 10 синих клеток, откуда $n \geqslant 10+5=15$, $y \geqslant 6n \geqslant 90$, $x \leqslant 29$. Отсюда получаем, что $m \leqslant 5$, что противоречит доказанному ранее.

Таким образом, мы разобрали оба случая и доказали, что ситуация, в которой $x+y < 120$ невозможна.

Примеров для 120 несколько, они все отличаются перестановкой строк и столбцов. Например, можно взять прямоугольник 12×10 и раскрасить его в шахматном порядке в красный и синий цвет.

1.2 Задания для 10 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла) Известно, что $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{a+c}{b}+\dfrac{b+c}{a}=8$, $a+b+c=30$. Найдите $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. Ответ запишите в виде несократимой дроби.

Ответ: $\dfrac{11}{30}$

Решение: Заметим, что $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)(a+b+c)=\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{a+c}{b}+\dfrac{b+c}{a}+3$. Значит, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{8+3}{30}=\dfrac{11}{30}$.

Задача 2. (3 балла) Сумма трёх попарно различных натуральных делителей натурального числа n равна 170000. Какое наименьшее значение может принимать число n? (Среди указанных делителей могут быть единица и само число)

Ответ: 100000

Решение: Если $n=100000$, то $170000=n+\dfrac{n}{2}+\dfrac{n}{5}=\dfrac{17}{10}\cdot n$. Докажем, что это наибольшее подходящее n.

Сумму трёх наших делителей можно представить как $\dfrac{n}{a}+\dfrac{n}{b}+\dfrac{n}{c}=n\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=170000$. Соответственно, для максимизации n необходимо, чтобы $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{x}{y}$ было минимальным, при этом числитель x получающейся в результате суммирования несократимой дроби должен быть делителем 170000 (иначе $n=\dfrac{170000y}{x}$ не целое число).

$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{6}$ — не подходит.

$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$ — не подходит.

Для всех остальных троек делителей $\dfrac{x}{y}$ получается меньше $\dfrac{17}{10}$. Действительно, все варианты вида $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}$, большие $\dfrac{17}{10}$ мы уже разобрали. Среди остальных чисел наибольшее — это $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=1\dfrac{7}{12}<1\dfrac{7}{10}$.

Задача 3. (3 балла) Дан вписанный пятиугольник $ABCDE$. Оказалось, что $AD\parallel BC$, $BE\parallel CD$, $AB=5$, $DE=6$. $BD=10$. Найдите AE.

Ответ: 13

Решение: Поскольку $AD\parallel BC$, длины дуг AB и CD равны. Аналогично равны длины дуг BC и DE. Отсюда получаем, что длины дуг AC, BD и CE также равны, как суммы равных.

Значит, в треугольнике BCD мы знаем все стороны: $BC=DE=6$, $CD=AB=5$, $BD=10$. Отсюда можно найти

$$\cos\angle BCD=\frac{5^2+6^2-10^2}{2\cdot5\cdot6}=-\frac{39}{60}=-0,65$$

Угол BCD опирается на дуги BA, AE и DE, а угол CAE на дуги CD и $DE=BC$. Таким образом, в сумме эти углы дают 180° и, следовательно, $\cos\angle CAE=-\cos\angle BCD=0,65$.

Треугольник ACE равнобедренный, а значит $AE=2AC\cos\angle CAE=2BD\cos\angle CAE=13$.

Задача 4. (3 балла) Дана трапеция $ABCD$ с прямым углом $\angle A$ и основаниями $BC = 144$ и $AD = 225$. На боковой стороне AB, как на диаметре, построена окружность с центром в точке O, касающаяся стороны CD в точке K. Прямые OK и BC пересекаются в точке L. Найдите длину отрезка CL.

Ответ: 656

Решение: OK и CD перпендикулярны как радиус и касательная, следовательно $\angle LKC = 90°$. $\angle LBO = 90°$ как односторонний к $\angle A$, то есть $\angle LKC = \angle LBO$. $\angle L$ общий угол в треугольниках LKC и LBO, значит, эти треугольники подобны. Следовательно,

$$\frac{CK}{OB} = \frac{KL}{BL} = \frac{CL}{OL}.$$

Учитывая, что $CK = BC$ (как отрезки касательных), $BL = BC + CL$, $OL = OK + KL = OB + KL$, мы получаем

$$\frac{BC}{OB} = \frac{KL}{BC + CL} = \frac{CL}{OB + KL}.$$

Отсюда можно получить два уравнения

$$\begin{cases} BC \cdot CL + BC^2 = OB \cdot KL \\ BC \cdot OB + BC \cdot KL = OB \cdot CL \end{cases}$$

Домножая первое уравнение на BC, а второе на OB и складывая, получаем, что

$$BC^2 \cdot CL + BC^3 + BC \cdot OB^2 = OB^2 \cdot CL,$$

откуда $CL = \dfrac{BC^3 + BC \cdot OB^2}{OB^2 - BC^2}$.

Таким образом, мы выразили CL через BC и радиус окружности. Осталось найти радиус. Опустим из точки C высоту CH на AD. Тогда, по теореме Пифагора, $CH^2 = CD^2 - DH^2$. При этом, $CD = CK + DK = BC + AD$ (снова равенство отрезков касательных), $DH = AD - AH = AD - BC$, так как $ABCH$ — прямоугольник, $CH = AB = 2OB$. Поэтому

$$OB^2 = \frac{CD^2 - DH^2}{4} = \frac{(BC + AD)^2 - (AD - BC)^2}{4} = AD \cdot BC,$$

откуда $OB = 180$. Подставляем это значение в формулу дла CL и получаем ответ.

Задача 5. (3 балла) Многочлен нечётной степени принимает некоторые значения больше одного раза, однако, никакое значение он не принимает ровно два или три раза. Докажите, что есть значение, которое этот многочлен принимает хотя бы 7 раз.

Доказательство: Допустим для определённости, что у нашего многочлена положительный старший коэффициент (второй случай разбирается аналогично). Пусть a — наименьшее значение, которое многочлен принимает больше одного раза. Рассмотрим неравенство $P(x) - a \leqslant 0$. Его решениями являются несколько точек и луч слева на числовой оси. Действительно, если бы в его решении присутствовали бы отрезки, на этих отрезках многочлен принимал $P(x)$ бы значения меньше a, как и на упомянутом луче, то есть некоторые значения, меньшие a, встречались бы повторно.

Тогда, согласно методу интервалов, многочлен $P(x) - a$ имеет вид $(x - x_1)^{2k_1+1}(x - x_2)^{2k_2} \dots (x - x_m)^{2k_m}$, где x_i — решения уравнения $P(x) = a$, записанные в порядке возрастания. Тогда, если рассмотреть какое-то число a_1, чуть большее a, уравнение $P(x) = a_1$ будет иметь один корень рядом с числом x_0 и по два корня рядом с остальными x_i, то есть всего хотя бы $2m - 1$ корень. При этом из условия следует, что $m \geqslant 4$, поэтому $2m - 1 \geqslant 7$, что и требовалось доказать.

Задача 6. (3 балла) Последовательность x_n задана рекуррентным соотношением $x_{n+1} = x_n + \{x_n\}$ и начальным условием $x_0 = \dfrac{1}{31}$. Найдите $[x_{6000}]$.

($[a]$ — целая часть числа a, $\{a\}$ — дробная часть числа a.

Ответ: 1200

Решение: $x_n = [x_n] + \{x_n\}$, тогда $x_{n+1} = [x_n] + 2\{x_n\}$. Мы каждый раз удваиваем дробную часть числа. Если удвоенная дробная часть оказалась больше единицы, целая часть увеличивается на 1 по сравнению с предыдущим членом, в противном случае остаётся прежней. То есть нам нужно найти количество таких x_n при $n < 6000$, что $\{x_n\} > \frac{1}{2}$.

Рассмотрим теперь последовательность $k_n = 31\{x_n\}$. Заметим, что k_n — целое число от 1 до 31, причём k_{n+1} является остатком от $2k_n$ при делении на 31. То есть, k_n равно остатку от деления 2^n на 31. Таким образом, нам надо посчитать количество таких k_n при $n < 6000$, что $k_n \geqslant 16$.

Заметим, что k_5 — это остаток от 32 при делении на 31, то есть единица. Значит, начиная с k_5, элементы этой последовательности зацикливаются и принимают по очереди пять разных значений: степени двойки от 1 до 16. При этом среди этих пяти чисел только 16 даёт увеличение целой части x_n.

Значит, целая часть увеличивается на каждом пятом шаге, то есть 1200 раз, и $[x_{6000}] = 1200$.

Задача 7. (4 балла) На конференцию приехали 100 учёных. Оказалось, что у любых двоих как минимум двое общих знакомых. Докажите, что у кого-то из них хотя бы 15 знакомых.

Доказательство: Предположим противное. Тогда у каждого из учёных не более 14 знакомых и он может быть общим знакомым не более чем для $\dfrac{14 \cdot 13}{2}$ пар других учёных. Это число равно 91. Значит, общее число общих знакомых для всех пар не более $91 \cdot 100 = 9100$

Посчитаем теперь общее количество пар знакомых. Их $\dfrac{100 \cdot 99}{2} = 4950$. У каждой пары должно быть хотя бы 2 общих знакомых, то есть общее число таких общих знакомых для всех пар хотя бы 9900, что противоречит предыдущей оценке.

Замечание: Когда мы говорим об общем количестве общих знакомых, мы считаем одного человека столько раз, для какого количества других он является общим знакомым, то есть больше одного раза.

Задача 8. (4 балла) В клубе «Безумный шляпник» помимо председателя состоят ещё 222 джентльмена. Как-то раз председатель решил подарить каждому из остальных членов клуба новую шляпу с нанесённым на неё именем хозяина. Однако, произошла путаница и шляпы оказались перепутаны. Председатель придумал план по устранению этого беспорядка. Каждый день будет вызывать к себе пятерых джентльменов, усаживать их за круглый стол и просить каждого передать шляпу своему левому соседу. Оказалось, что с помощью такого плана действительно можно передать все шляпы их законным владельцам. Докажите, что председатель может гарантированно справиться с этим за 55 дней.

Доказательство: Каждый день председатель вызывает какого-либо джентльмена, у которого ещё нет своей шляпы, смотрит, кому досталась его шляпа, вызывает этого джентльмена, того, кому досталась его шляпа и так далее. В итоге он может добиться, что за один день 4 джентльмена получат свои шляпы. За 55 дней, соответственно, свои шляпы получат 220 джентльменов.

Докажем теперь, что оставшиеся два джентльмена к этому моменту также получат свои шляпы. Пронумеруем всех джентльменов. Рассмотрим такое понятие, как число инверсий — количество пар джентльменов с номерами i и j, у которых сейчас шляпы, что должны принадлежать джентльменам a_i и a_j, причём $i < j$, а $a_i > a_j$. Докажем, что обмен шляпами между двумя джентльменами меняет чётность числа инверсий.

Действительно, пусть мы поменяли местами шляпы джентльменов k и m, $k < m$. Что-то поменялось только в парах, где один из джентльменов это k или m, а номер второго также находится в промежутке от k до m. Рассмотрим джентльмена с номером l, где $k < l < m$. Если a_l больше или меньше обоих чисел a_k и a_m, то для него также ничего не изменилось. Если же a_l находится между a_k и a_m, от обмена шляпами 2 инверсии превратятся в 0 или наоборот, т.е. чётность не поменяется. И, наконец, инверсия между джентльменами k и m пропадёт, если она была, и появится, если её не было. Таким образом, чётность числа инверсий действительно изменится.

Действие, которое совершает председатель, можно заменить на 4 обмена шляпами между джентльменами. Значит, это действие не меняет чётность числа инверсий. В конце концов мы должны получить ситуацию, когда у каждого джентльмена своя шляпа, то есть число инверсий равно 0. Значит, изначально количество инверсий должно быть чётным, иначе мы в принципе не сможем получить требуемую расстановку, что противоречит условию. А раз так, мы не могли получить ситуацию, в которой только два джентльмена обменялись шляпами, поскольку для неё число инверсий нечётно. Значит, после описанных 55 действий у последних двух джентльменов уже есть их шляпы, что и требовалось доказать.

1.3 Задания для 9 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Сумма двух различных натуральных делителей натурального числа n равна 100. Какое наименьшее значение может принимать число n? (Среди указанных делителей могут быть единица и само число)

Ответ: 75

Решение: Если один из наших делителей — само число n, а второй — некоторое число d и $n = dk$, мы получаем $100 = d + dk = d(k+1)$ или же $100 = n + \frac{n}{k} = n \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)$, то есть $n = 100 : \left(1 + \frac{1}{k}\right)$, то есть, чем k больше, тем и само n больше.

Наименьшее $k > 1$ такое, что $k+1$ является делителем 100, это 3. При таком k получаем $n = 100 : \frac{4}{3} = 75$.

Если же n нет среди двух наших делителей, то $\frac{n}{2} + \frac{n}{3} \geqslant 100$, откуда $n \geqslant 120$.

Задача 2. (3 балла)

Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{|x-1| + |x-2| + |x-4| + \ldots + |x-2^{19}|}$.

Ответ: 1023

Решение: Рассмотрим нашу функцию на участке, где k скобок раскрываются как $a_i - x$, а оставшиеся $20 - k$ как $x - a_i$. На этом участке функция имеет вид $\sqrt{(20-2k)x + c}$. То есть, она убывает там, где $k > 10$ и возрастает при $k < 10$. Наименьшего значения она достигает при $k = 10$, то есть между 2^9 и 2^{10}.

Значение в этой точке равно $\sqrt{2^{19} + 2^{18} + \ldots + 2^{10} - 2^9 - \ldots - 1} = \sqrt{2^{20} - 2^{10} - (2^{10} - 1)} = 2^{10} - 1$

Задача 3. (3 балла)

В равнобедренной трапеции $ABCD$ точка H на основании AD такова, что BH — высота. Оказалось, что $\angle BHC = \angle A$. Известно, что $AH = 5$, $CH = 6$. Найдите DH.

Ответ: 9

Решение: $\angle BHC = \angle HAB = \angle CDH$, так как трапеция равнобедренная. $\angle CDH + \angle CHD = \angle BHC + \angle CHD = 90^\circ$, следовательно $\angle DCH = 90^\circ = \angle HBC = \angle AHB$. Отсюда треугольники DCH, HBC и AHB подобны по двум углам.

Поэтому $\dfrac{DH}{CH} = \dfrac{CH}{BC}$, то есть $BC \cdot DH = CH^2$. По свойству равнобедренной трапеции $BC = DH - AH$, поэтому $DH(DH - AH) = CH^2$ или $DH^2 - 5DH - 36 = 0$. Получаем $DH = 9$ или $DH = -4$. Второй вариант, очевидно, невозможен.

Задача 4. (3 балла)

Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что график трёхчлена $-f(x+2)$ касается графиков трёхчленов $f(x)$ и $f(-x)$. Найдите произведение корней трёхчлена $f(x)$.

Ответ: 3

Также засчитываются решения с дополнительным ответом -1.

Решение: Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $f(-x) = ax^2 - bx + c$, $-f(x+2) = -ax^2 - (4a+b)x - 4a - 2b - c$.

Условие касание равносильно тому, что разность трёхчленов имеет единственный корень. Для $f(x) = -f(x+2)$ это значит, что трёхчлен $f(x) + f(x+2) = 2ax^2 + (4a + 2b)x + 4a + 2b + 2c$ имеет единственный корень. Аналогично $2ax^2 + 4ax + 4a + 2b + 2c$ имеет единственный корень. Сократим на 2 и посчитаем дискриминанты, которые должны быть равны 0: $(2a+b)^2 - 4a(2a+b+c) = 4a^2 - 4a(2a+b+c) = 0$. В частности, это значит, что $(2a+b)^2 = (2a)^2$, т.е. $2a + b = \pm 2a$, откуда $b = 0$ или $b = -4a$.

В первом случае получаем $4a^2 - 4a(2a+c) = 0$. Сократим на $4a \neq 0$ и получим $c = -a$, т.е произведение корней равно $\dfrac{c}{a} = -1$. Впрочем, в этом случае трёхчлены $f(x)$ и $f(-x)$ совпадают, а в задаче об их графиках говорится во множественном числе.

Во втором случае получаем $4a^2 - 4a(-2a+c) = 0$, откуда $\dfrac{c}{a} = 3$.

Задача 5. (3 балла)

Несколько Дедов Морозов участвуют в игре «Тайный Санта». Каждый Новый Год каждый Дед Мороз дарит подарок одному из своих коллег, причём одному и тому же каждый год, поскольку новую жеребьёвку им проводить лень. Кроме того, придумывать новые подарки Деды Морозы тоже ленятся, поэтому каждый год они просто передаривают подарок, полученный ими в прошлом Году.

Первого января 2023 года Дед Мороз Красный Нос получил подарок, который сам дарил при наступлении 2019 года; Дед Мороз Синий Нос получил подарок, который сам дарил при наступлении 2017 года, а Дед Мороз Белый Нос получил подарок, который последний раз дарил при наступлении 2015 года.

Какое наименьшее число Дедов Морозов могло участвовать в игре?

Ответ: 21

Решение: Деды Морозы разбиваются на циклы, внутри которых ходят подарки. Красный Нос дарил свой подарок при наступлении 2019 года, при наступлении 2023 года он его получил, значит, в следующий раз он подарит его в 2024 году. Таким образом, в его цикле подарок возвращается обратно через 5 лет, то есть там ровно пять Дедов Морозов (1 не может быть, а других делителей у числа 5 нет).

Аналогично в цикле Синего Носа 7 Дедов Морозов. В цикле у Белого Носа 9 Дедов Морозов. Именно 9, так как в этом случае указано, что это подарок не дарился между 2015 и 2023 годами.

Итого получаем $5 + 7 + 9 = 21$.

Задача 6. (3 балла)

Квадрат разбит двумя прямыми на 4 прямоугольника. Площади двух из них, имеющих только одну общую точку, равны 45. Площади остальных двух также целые и различные. Какое наименьшее значение может принимать площадь всего квадрата?

Ответ: 192

Решение: Пусть сторона квадрата равна x, одна из прямых делит сторону квадрата на две части a и $x-a$, вторая — на b и $x-b$. Тогда $a(x-b)=b(x-a)=45$. Пусть $a>b$, тогда $x-b>x-a$ и первая площадь больше второй. Аналогично разбирается случай $a<b$. Значит, $a=b$.

Тогда оставшиеся два прямоугольника — это квадраты и их площади равны a^2 и b^2, то есть a и b — корни из целых чисел. Пусть $a=\sqrt{m}$, $b=\sqrt{n}$. Тогда $\sqrt{mn}=ab=45$, то есть $mn=45^2=3^4\cdot 5^2$.

Нам нужно, чтобы площадь квадрата, то есть $m+n+90$ была наименьшей. Для этого нам достаточно минимизировать $m+n$. Для числа с фиксированным произведением сумма тем меньше, чем числа ближе. Оптимальный вариант это $m=n=45$, но он запрещён условием. Следующие по близости делители это 27 и 75.

Отсюда получаем ответ $45+45+27+75=192$.

Задача 7. (3 балла)

Клетчатая доска 9×9 вся заполнена фишками. Петя и Вася играют в следующую игру: за один ход можно выбрать горизонталь или вертикаль, на которой ещё остались фишки, и снять оттуда все оставшиеся фишки. Выигрывает игрок, после хода которого доска опустеет. Первым ходит Петя. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Вася

Решение: Заметим, что строки и столбцы можно переставлять, не влияя на ход игры. Значит, можно считать, что каждый раз убирается крайняя строка или крайний столбец, а оставшиеся фишки образуют прямоугольник.

Вася будет действовать так: если Петя убирает строку, Вася убирает столбец, и наоборот. Таким образом, оставшиеся фишки всегда будут образовывать квадрат. Так будет продолжаться, пока оставшиеся фишки не образуют квадрат 2×2. После этого Петя убирает две фишки, а Вася — две оставшиеся.

Задача 8. (4 балла)

Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 4. На серединном перпендикуляре к стороне BC внутри треугольника отметили такую точку K, что $\angle KBC=\dfrac{\angle A}{2}$. Найдите расстояние между точкой K и точкой пересечения высот треугольника, если $\cos(\angle B-\angle C)=\dfrac{31}{32}$.

Ответ: 1

Решение: Отразим точку пересечения высот и точку K относительно стороны BC. Точка пересечения высот при этой симметрии, как известно попадает на описанную окружность в точку H'.

Рассмотрим точку K' — середину дуги BC. $\angle K'BC=\angle\dfrac{A}{2}=\angle KBC$, кроме того, K и K' обе лежат на серединном перпендикуляре к BC поэтому K' — точка симметричная K относительно BC. Значит, нам надо найти длину отрезка $K'H'$.

По теореме синусов, $K'H'=2R\sin K'AH'$, где R — радиус описанной окружности.

$\angle K'AH'=|\angle CAH'-\angle CAK'|=\left|90^\circ-\angle C-\dfrac{\angle A}{2}\right|=\left|90^\circ+\dfrac{\angle B-\angle C}{2}-\dfrac{\angle A+\angle B+\angle C}{2}\right|=\left|\dfrac{\angle B-\angle C}{2}\right|$.

По формуле синуса половинного угла $\sin K'AH' = \sin\dfrac{\angle B - \angle C}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos(\angle B - \angle C)}{2}} =$ $\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{31}{32}}{2}} = \dfrac{1}{8}$.

Значит, $K'H' = 8\cdot\dfrac{1}{8} = 1$

1.4 Задания для 8 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Какое наибольшее количество равных прямоугольных треугольников, длины катетов которых равны 6 и 8, можно разместить в прямоугольнике 10×40? Треугольники не должны иметь общих внутренних точек.
Ответ: 16

Решение: Площадь такого прямоугольного треугольника составляет 24, значит, в прямоугольнике площади 400 больше, чем $\dfrac{400}{24} = 16\dfrac{16}{24}$ не поместится.

Пример можно построить разбив прямоугольник на 4 квадрата 10×10 и в каждом из них приложить по 4 треугольника гипотенузами к сторонам квадрата. Гипотенуза как раз равна 10). Кстати, данная картинка лежит в основе одного из доказательств теремы Пифагора.

Задача 2. (2 балла)

Дискриминант приведенного квадратного уравнения с корнями x_1 и x_2 равен 18, а дискриминант приведенного квадратного уравнения с корнями x_3 и x_4 равен 50. Какое значение может принимать дискриминант приведенного квадратного уравнения с корнями $x_1 + x_3$ и $x_2 + x_4$?

Ответ: 8, 128

Решение: Корень из дискриминанта — это разность между корнями уравнения. Значит, $|x1 - x2| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $|x_3 - x_4| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Отсюда $|(x_1 + x_3) - (x_2 + x_4)| = |3\sqrt{2} \pm 5\sqrt{2}|$, то есть либо $2\sqrt{2}$, либо $8\sqrt{2}$. Возводим в квадрат и получаем возможные значения дискриминанта 8 и 128.

Задача 3. (3 балла)

Натуральные числа a и b таковы, что $a > b$ и $\dfrac{\text{НОК(a,b)}}{\text{НОД(a,b)}} = 300$. Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{a}{b}$?

Ответ: $\dfrac{25}{12}$

Решение: Пусть $a = xd$, $b = yd$, где $d = \text{НОД(a,b)}$, а числа x и y, соответственно взаимно простые. Тогда $\dfrac{\text{НОК(a,b)}}{\text{НОД(a,b)}} = \dfrac{xyd}{d} = xy$. Значит, нам нужно представить 300 в виде произведения двух взаимно простых чисел, отличающихся друг от друга меньше всего.

$300 = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 3$ и каждый из этих простых множителей может входить только в одно из чисел x или y, значит x уже не может быть меньше 25. Указанный ответ достигается, когда $a = x = 25$, $b = y = 12$, $d = 1$.

Задача 4. (3 балла)

Биссектрисы углов $\angle B$ и $\angle C$ параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K на стороне AD. Прямая BK пересекает продолжение стороны CD в точке L. Во сколько раз площадь параллелограмма больше площади треугольника ΔDKL?

Ответ: В четыре раза.

Решение: $\angle CBK = \angle ABK = \angle BKA$ (первое равенство следует из определения биссектрисы, второе — свойство накрест лежащий углов). Поэтому треугольник ABK равнобедренный, $AB = AK$. Аналогично $CD = DK$. Поскольку противоположные стороны параллелограмма равны, $BC = AD = AK + DK = 2AB = 2CD$.

Треугольник DKL равен треугольнику AKB: $\angle KDL$ и $\angle KAB$ равны, так как дополняют $\angle CDA$ до $180°$, углы в точке K вертикальные, а $AK = DK (= AB = CD)$ по доказанному выше.

У треугольника AKB основание AK в два раза меньше стороны параллелограмма AD, а высоты, проведённые к этим сторонам, совпадают, значит, площадь треугольника вчетверо меньше площади параллелограмма.

Задача 5. (3 балла)

Решите уравнение $2^x - 3^y = 295$ в натуральных числах.

Ответ: $x = 10$, $y = 6$

Решение: 295 даёт остаток 1 при делении на 3, значит, такой же остаток должен быть и у 2^x, то есть x чётно. Значит, 2^x делится на 4. 295 даёт остаток 3 при делении на 4, значит, 3^y должно давать остаток 1, то есть y также чётно. Значит, $2^x - 3^y = 2^{2n} - 3^{2k} = (2^n + 3^k)(2^n - 3^k)$.

295 можно разложить на 2 множителя двумя способами: $295 \cdot 1 = 59 \cdot 5$. При это сумма этих двух множителей должна быть равна 2^{n+1}, что не выполняется для первого разложения. $59 + 5 = 2^6$, значит, $n + 1 = 6$, $2^n = 32$, $2^m = 32 - 5 = 27 = 3^3$, $x = 10$, $y = 6$.

Задача 6. (3 балла)

Шахматная доска 8×8 заполнена ладьями. Петя и Вася по очереди убирают с доски по одной ладье, начинает Петя. Убирать ладью, для которой не осталось бьющих её ладей, нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Выиграет Вася.

Решение: Используем симметричную стратегию: если Петя убирает какую-либо ладью П, Вася убирает симметричную ей относительно центра доски ладью В (это другая ладья, т.к. стороны доски чётные). При этом так как Петя сделал ход по правилам, значит, убранная им ладья била какую-то другую ладью А, которая не совпадает с В, так как симметричные ладьи не бьют друг друга. Тогда ладья Б, симметричная А относительно центра доски, также осталась на доске и её бьёт ладья В. Значит, Вася сможет убрать с доски ладью В не нарушая правил.

Таким образом, у Васи, согласно этой стратегии, всегда есть ход, значит, он не может проиграть.

Задача 7. (4 балла)

В равнобедренной трапеции $ABCD$ точка H на основании AD такова, что BH — высота. Оказалось, что $\angle BHC = \angle A$. Известно, что $AH = 10$, $DH = 18$. Найдите CH.

Ответ: 12

Решение: $\angle BHC = \angle HAB = \angle CDH$, так как трапеция равнобедренная. $\angle CDH + \angle CHD = \angle BHC + \angle CHD = 90°$, следовательно $\angle DCH = 90° = \angle HBC = \angle AHB$. Отсюда треугольники DCH, HBC и AHB подобны по двум углам.

Отсюда $\dfrac{DH}{CH} = \dfrac{CH}{BC}$, то есть $CH = \sqrt{DH \cdot BC}$. По свойству равнобедренной трапеции $BC = DH - AH$, поэтому $CH = \sqrt{DH \cdot (DH - AH} = \sqrt{18 \cdot 8} = 12$.

Задача 8. (5 баллов)

В классе учатся 20 ребят, у каждого хотя бы 7 друзей среди одноклассников (дружба взаимна). Докажите, что есть двое, у которых не менее трёх общих друзей.

Доказательство: У каждого ученика хотя бы 7 друзей среди одноклассников, то есть он является общим другом хотя бы для $\dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$ пары одноклассников. Все 20 ребят являются общими друзьями для $20 \cdot 21 = 420$ пар. Всего в классе можно выбрать $\dfrac{20 \cdot 19}{2} = 190$ пар одноклассников. Если ни у кого нет более, чем двух общий друзей, то для 190 пар мы получаем не более, чем $2 \cdot 190 = 380$ общих друзей (где каждый человек считается столько раз, для скольких пар он является общим другом). Но это число должно быть не меньше 420. Получаем противоречие.

1.5 Задания для 5-7 классов

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (1 балл)

Вася и Петя работают вместе. Они получили заказ на изготовление определённого количества деталей и договорились сделать поровну. Однако Петя недовыполнил свой план на 20% и Васе пришлось сделать часть его работы. На сколько процентов Вася изготовил больше деталей, чем Петя?

Ответ: На 50%.

Решение: Пусть каждый должен был сделать по x деталей. Тогда в реальности Петя сделал $0,8x$, а Вася $1,2x$. Таким образом, отношение количества сделанных Васей деталей к количеству сделанных Петей составляет $\dfrac{1,2x}{0,8x} = 1,5$, то есть Вася изготовил на 50% больше деталей.

Задача 2. (2 балла)

Есть три близнеца: Петя, Вася и Саша. Петя говорит правду только в понедельник и пятницу, Вася — только во вторник и в воскресенье, а Саша — только в среду и субботу. Однажды все трое сказали: «Сегодня суббота». Какой на самом деле день недели?

Ответ: Четверг

Решение: Ни в какой день все трое не говорят правду, значит, все трое соврали. Но единственный день, когда врут все трое — это четверг.

Задача 3. (3 балла)

Натуральные числа a и b таковы, что $a > b$ и $\dfrac{\text{НОК(a,b)}}{\text{НОД(a,b)}} = 200$. Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{a}{b}$? Ответ запишите в виде неправильной несократимой дроби.

Ответ: $\dfrac{25}{8}$

Решение: Пусть $a = xd$, $b = yd$, где $d = \text{НОД(a,b)}$, а числа x и y, соответственно взаимно простые. Тогда $\dfrac{\text{НОК(a,b)}}{\text{НОД(a,b)}} = \dfrac{xyd}{d} = xy$. Значит, нам нужно представить 200 в виде произведения двух взаимно простых чисел, отличающихся друг от друга меньше всего.

$200 = 5^2 \cdot 2^3$ и каждый из этих простых множителей может входить только в одно из чисел x или y, значит у нас всего два способа скомбинировать эти числа: $25 \cdot 8 = 200 \cdot 1$. Очевидно, первый вариант даёт наименьшее значение дроби Указанный ответ достигается когда $a = x = 25$, $b = y = 8$, $d = 1$.

Задача 4. (3 балла)

ABC и BCD — треугольники с целочисленными сторонами, периметры которых составляют 10 и 20 соответственно. Какое наименьшее значение может принимать длина CD?

Ответ: 7

Решение: Периметр треугольник ABC составляет 10. Поскольку сторона BC меньше суммы остальных сторон, $BC < 5$, а, учитывая целочисленность, $BC \leqslant 4$. Аналогично в треугольнике BCD выполняется неравенство $BD \leqslant 9$, откуда $CD \geqslant 20 - 4 - 9 = 7$.

Треугольник со сторонами 4, 7 и 9, очевидно, существует.

Задача 5. (3 балла)

Трёхзначное число АБВ даёт при делении на 37 остаток 4. Какой остаток даёт при делении на 37 число БВА? Не забудьте доказать, что другие ответы не подходят.

Ответ: 3

Решение: Число $10 \cdot \text{АБВ} = \text{АБВ0}$ даёт при делении на 37 такой же остаток, как и $4 \cdot 10$, то есть 3.

С другой стороны $\text{АБВ0} - \text{БВА} = 999 \cdot \text{А}$ делится на 37 поэтому у числа БВА остаток такой же, как и у АБВ0.

Задача 6. (3 балла)

Внутри выпуклого пятиугольника отметили точку O. Пятиугольник разбили на несколько равных треугольников. Для каждого треугольника одна из его вершин — точка O, а остальные вершины находятся на границе пятиугольника. Найдите наибольшее возможное количество треугольников.

Ответ: 10

Решение: Вершины треугольника не могут находиться на разных сторонах пятиугольника, иначе соединяющий их отрезок отсекает от пятиугольника кусок, в котором нет точке O и который нельзя разбить на треугольники, удовлетворяющие условию.

Допустим, вершина одно из треугольников лежит на стороне пятиугольника AB в точке X, не совпадающей ни с A, ни с B. Углы $\angle AXO$ и $\angle BXO$ являются углами каких-то наших (равных!) треугольников и при этом смежные, то есть дают в сумме $180°$. В треугольнике не может быть двух таких углов одновременно, значит, единственная возможная ситуация, когда эти углы прямые. Значит, на каждой стороне может быть только одна такая точка X, и на каждой стороне пятиугольника лежат стороны не более, чем двух треугольников, то есть всего их не более 10.

Пример для 10 очевидно существует.

Задача 7. (4 балла)

В Странной стране некоторые города соединены двусторонними авиалиниями, причём из каждого города можно добраться на самолёте ровно в два других. Если из одного города можно добраться до другого на самолётах, это всегда можно сделать не более чем с 3 пересадками. При этом ни для каких двух городов не существует двух разных способов добраться из одного в другой менее, чем с 3 пересадками. Какое наибольшее количество городов НЕ может быть в этой стране?

Ответ: 20

Решение: Если вылететь из которого города и ни в каком городе не разворачиваться назад, рано или поздно мы вернёмся в исходный город, то есть, все города разбиваются на циклы.

При этом в этих циклах не может быть 10 или больше городов, потому что тогда для какой-то пары городов нужны минимум 5 перелётов, то есть хотя бы 4 пересадки.

С другой стороны, если в цикле 6 или менее городов, то двигаясь по этому циклу в разных направлениях из одного и того же города, мы попадём в какой-то другой город двумя способами не более, чем за 3 перелёта, то есть максимум с двумя пересадками, что противоречит условию.

Значит, в каждом цикле 7, 8 или 9 городов. $3 \cdot 7 > 20 > 2 \cdot 9$, поэтому 20 нельзя представить ни как сумму двух подходящих нам чисел, ни как сумму трёх и более.

Любое большее число представляется в виде суммы 7, 8 и 9. Действительно, $7x$ можно представить как сумму семёрок; далее, заменяя семёрки на восьмёрки, а восьмёрки на девятки, можно получить любое число до $7(x-3)+3\cdot 9 = 7x+6$ (при $x \geqslant 3$). Следующее число $7x+7 = 7(x+1)$, и так далее.

Задача 8. (5 баллов)

На клетчатой доске 6×8 расставлены шахматные короли так, что любую пустую клетку бьют не менее двух королей. Какое наименьшее количество королей может быть на доске?

Ответ: 12

Решение:

Пример для 12 королей:

K	K		K	K		K	K
K	K		K	K		K	K

Предположим, что можно расставить 11 или менее королей. Скажем, что у каждого короля есть не более 8 «ударов», при помощи которых он бьёт пустые клетки. У 11 королей может быть 88 «ударов». При этом, чтобы побить дважды оставшиеся $48-11=37$ клеток нам нужно $37\cdot 2 = 74$ «удара». Пока что у нас всё сходится и даже есть запас в 14 «ударов».

Рассмотрим теперь угловую клетку. Если на ней стоит король, его пять «ударов» попадают за край доски. Если же короля на ней нет, то рядом с этой клеткой стоят два короля. Как минимум один из них стоит на границе доски и теряет три «удара»; ещё два «удара» теряются на том, что эти два короля бьют друг друга. Итого в каждом из четырёх углов доски у нас теряются минимум 5 ударов, то есть всего минимум 20. Значит, для того, чтобы бить пустые клетки, остаётся не более 68 ударов, что уже недостаточно.

2 Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады

2.1 Задания для 11 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

У многочлена $P(x)$ ровно 11 различных вещественных корней. Число a таково, что многочлен $P(x-a)$ имеет хотя бы один корень с многочленом $P(x)$. Какое наибольшее количество таких ненулевых a может найтись для одного многочлена $P(x)$?

Ответ: 110

Задача 2. (2 балла)

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 6. Точка X на луче AA_1 такова, что $AX = 24$. Найдите объём пересечения куба и пирамиды $XABCD$ с вершиной в точке X. Ответ округлите до десятых.

Ответ: 166,5

Задача 3. (3 балла)

Трапеция $ABCD$ вписана в окружность с центром на основании AD и радиусом $\sqrt{5}+1$. В эту трапецию, в свою очередь, вписана другая окружность.

Найдите длину AB.

Ответ: 4

Задача 4. (3 балла)

Множество точек на плоскости задаётся условиями $[x]\{\ 3y\} = 1$, $x \leqslant 10$, $0 \leqslant y \leqslant 10$.

Это множество состоит из полуинтервалов. Найдите их суммарную длину.

Квадратные скобки обозначают целую часть числа, фигурные — дробную.

Ответ: 240

Задача 5. (3 балла)

Найдите площадь, ограниченную следующими линиями:

1) графиком функции $y = -\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)}$;

2) осью ординат;

3) участком кривой, заданной уравнением $x = \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi y}{4}\right)$, проходящим через начало координат и лежащим в первой четверти;

4) прямой $x = 1$.

Ответ: 2

Задача 6. (3 балла)

Функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную. Известно, что $f(-8) = 0$, $f(-5) = 11$ и $f(2) = 4$.

Какое наименьшее количество различных целочисленных значений может принимать $f'(x)$?

Ответ: 5

Задача 7. (3 балла)

Согласно законам, действующим в Авиаландии:

1) Стоимость перелёта из города A в город B должна быть равна стоимости перелёта из B в A для любых городов A и B.

2) Стоимость перелёта из A в B и из A в C должна быть различна, если B и C различны.

3) Каждый билет стоит натуральное число талеров.

В Авиаландии 100 городов. Министр хочет сделать так, чтобы из любого города в любой можно было добраться не более, чем с одной пересадкой, потратив не более n талеров.

Для какого наименьшего числа n ему это удастся?

Ответ: 15

Задача 8. (3 балла)

Последовательность a_n, составленная из рациональных чисел, такова, что $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{5}$, а каждый следующий член получается как медианта двух предыдущих.

Медиантой двух несократимых дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ является дробь $\frac{a+c}{b+d}$.

Из 200 первых членов последовательности сколько найдётся меньших, чем a_{35}?

Ответ: 182

Задача 9. (3 балла)

В классе учатся 30 школьников. В каждом кружке занимаются 13 из них. При этом никакие четверо не занимаются вместе в двух разных кружках. Какое наибольшее число кружков может быть?

Ответ: 3

Задача 10. (5 баллов)

Известно, что $\log_{\ln c} \log_b a = -3$, $\log_{\ln a} \log_c b = \frac{1}{2}$. Найдите $\log_{\ln b} \log_a c$.

Ответ: -5

2.2 Задания для 10 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

В городе 10 трамвайных маршрутов, на каждом из которых 19 остановок. Известно, что с любой остановки можно доехать до любой другой (возможно, с пересадками). Какое наибольшее количество остановок может быть в городе?

Пересаживаться можно только на остановках. Считается, что остановки на маршруте "туда" и "обратно" совпадают.

Ответ: 181

Задача 2. (2 балла)

Последовательность задана условиями: $x_{2n} = 2 - x_{2n-1}$, $x_{2n+1} = \frac{2}{x_{2n}}$. Также известно, что $x_0 = 3$. Найдите x_{2022}.

Ответ: -2

Задача 3. (2 балла)

$ABCD$ — трапеция с большим основанием AD. На стороне AB отмечены точки K и M, а на стороне CD точки L и N такие, что $AKLD$ и $KBCL$ — подобные трапеции, а отрезок MN проходит через точку пересечения диагоналей $ABCD$. $KL = \sqrt{48}$, $MN = 6$. Найдите AD.

Ответ: 12

Задача 4. (3 балла)

У многочлена $P(x)$ ровно 10 различных вещественных корней. Число a таково, что многочлен $P(x-a)$ имеет хотя бы один корень с многочленом $P(x)$. Какое наименьшее количество таких ненулевых a может найтись для одного многочлена $P(x)$?

Ответ: 18

Задача 5. (3 балла)

Известно, что $\frac{a+b}{c} = 2$, $\frac{a+c}{b} = \frac{1}{3}$. Найдите $\frac{b+c}{a}$.

Ответ: -13

Задача 6. (3 балла)

У числа a ровно 35 различных делителей, а у числа b — ровно 33. Какое наибольшее число различных делителей может иметь их НОД, если a не делится на b?

Говоря о количестве делителей, мы везде включаем единицу и само число.

Ответ: 21

Задача 7. (3 балла)

$xy + zt + 3(xz + yt) = 120$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$?

Ответ: 60

Задача 8. (4 балла)

Окружность S_1 касается окружности S_2 в точке K, а окружности S_3 в точке L. Точка A такова, что $AK = AL = 12$. Радиусы окружностей S_2 и S_3 равны 9, и 5 соответственно. Расстояние от точки A до центра окружности S_2 составляет 15. Найдите наибольшее возможное расстояние между центрами S_2 и S_3.

Ответ: 28

Задача 9. (4 балла)

Сколькими способами можно раскрасить клетки прямоугольника 2×4 в белый, синий и красный цвета так, чтобы в каждом квадрате 2×2 были клетки ровно двух цветов?

Все три цвета использовать не обязательно.

Ответ: 984

Задача 10. (4 балла)

Длины сторон треугольника — натуральные числа, образующие геометрическую прогрессию. Наименьшая из них меньше 195. Какое наибольшее значение может принимать наибольшая?

Ответ: 448

2.3 Задания для 9 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

На прямой a взяты точки A, B, C, D, E (в таком порядке), а на прямой b — точки F, G, H, I, J. $AB = BC = CD = DE$, а прямые AF, BG, CH, DI и EJ параллельны. $AG = 12$, $BH = 10$. Найдите DJ.

Ответ: 6

Задача 2. (2 балла)

В городе 10 трамвайных маршрутов, на каждом из которых 19 остановок. Известно, что с любой остановки можно доехать до любой другой (возможно, с пересадками). Какое наибольшее количество остановок может быть в городе?

Пересаживаться можно только на остановках. Считается, что остановки на маршруте "туда" и "обратно" совпадают.

Ответ: 181

Задача 3. (3 балла)

Длины сторон треугольника — попарно взаимно простые натуральные числа a, b, c где $a < b < c$. Известно, что $a = 150$. Какое наибольшее значение может принимать c?

Ответ: 293

Задача 4. (3 балла)

Для пяти чисел выписали все возможные приведённые квадратные трёхчлены, имеющие хотя бы один корень, корнями которых являются только эти числа. Какое наибольшее число точек пересечения могут образовывать графики этих трёхчленов?

Ответ: 60

Задача 5. (3 балла)

С натуральным числом разрешается производить операцию склейки: замены двух соседних цифр на их сумму, если она не меньше 10, или их сумму, уменьшенную на 1, в противном случае.

Например, из числа 3456 можно таким образом получить 656, 386 или 3411.

Из числа, состоящего из 2022 двоек, после некоторого числа склеек получилось однозначное число. Какое именно?

Ответ: 7

Задача 6. (3 балла)

Известно, что $\dfrac{a+b}{c}=2$, $\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{1}{3}$. Найдите $\dfrac{b+c}{a}$.

Ответ: -13

Задача 7. (4 балла)

Какое наибольшее количество “рентгеновских” ладей можно расставить на клетчатой доске 10×10 так, чтобы каждая била не больше трёх других?

“Рентгеновские” ладьи бьют друг сквозь друга.

Ответ: 24

Задача 8. (4 балла)

У числа a ровно 35 различных делителей, а у числа b — ровно 33. Какое наибольшее число различных делителей может иметь их НОД, если a не делится на b?

Говоря о количестве делителей, мы везде включаем единицу и само число.

Ответ: 21

Задача 9. (4 балла)

$xy+zt+3(xz+yt)=120$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $x^2+y^2+z^2+t^2$?

Ответ: 60

Задача 10. (4 балла)

Длины сторон треугольника — натуральные числа, образующие геометрическую прогрессию. Наименьшая из них меньше 195. Какое наибольшее значение может принимать наибольшая?

Ответ: 448

2.4 Задания для 8 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

На ферме жили овцы и козы. За год количество овец увеличилось на 10%, а коз — на 30% и теперь овцы составляют 22% от общего числа овец и коз. Сколько процентов овцы составляли год назад?

Ответ: 25

Задача 2. (2 балла)

ABC — равносторонний треугольник с периметром 15. На лучах AB и AC за точками B и C взяты точки D и E такие соответственно, что $\angle BCD = \angle CBE$. Известно, что $CE = 7$. Найдите AD.

Ответ: 12

Задача 3. (3 балла)

Дети стоят в шеренгу. Справа от Пети 8 человек, слева от Васи 11 человек, между Васей и Петей один человек. Сколько детей в шеренге?

Если возможных ответов несколько, запишите их через запятую в любом порядке.

Ответ: 22,18

Задача 4. (3 балла)

В классе 32 человека, которые делятся на рыцарей, всегда говорящих правду, и лжецов, которые всегда лгут. У каждого ученика ровно четверо друзей в классе. Однажды каждый из них произнёс: “Все одноклассники, с которыми я дружу, лжецы”. Какое наименьшее число рыцарей могло быть в классе?

Ответ: 7

Задача 5. (3 балла)

На прямой a взяты точки A, B, C, D, E (в таком порядке), а на прямой b — точки F, G, H, I, J. $AB = BC = CD = DE$, а прямые AF, BG, CH, DI и EJ параллельны. $AG = 12$, $BH = 10$. Найдите DJ.

Ответ: 6

Задача 6. (3 балла) Длины сторон треугольника — попарно взаимно простые натуральные числа a, b, c где $a < b < c$. Известно, что $a = 150$. Какое наибольшее значение может принимать c?

Ответ: 293

Задача 7. (3 балла)

С натуральным числом разрешается производить операцию склейки: замены двух соседних цифр на их сумму, если она не меньше 10, или их сумму, уменьшенную на 1, в противном случае.

Например, из числа 3456 можно таким образом получить 656, 386 или 3411.

Из числа, состоящего из 2022 двоек, после некоторого числа склеек получилось однозначное число. Какое именно?

Ответ: 7

Задача 8. (3 балла)

Натуральные числа a, b, c таковы, что $31\text{НОД}(a,b,c) = \text{НОД}(a,b)+\text{НОД}(a,c)+\text{НОД}(b,c)$. Какое наибольшее значение может принимать число $\text{НОД}(b,c)/\text{НОД}(a,b,c)$?

Ответ: 29

Задача 9. (3 балла)

Первые две трети требуемого расстояния велосипедист проехал со средней скоростью 12 км/ч, а последние две трети — со средней скоростью 5 км/ч. Средняя скорость на всём пути составила 6 км/ч. Найдите среднюю скорость на средней трети пути (в км/ч).

Ответ: 15

Задача 10. (5 баллов)

Какое наибольшее количество "рентгеновских" ладей можно расставить на клетчатой доске 10×10 так, чтобы каждая била не больше трёх других?

"Рентгеновские" ладьи бьют друг сквозь друга.

Ответ: 24

2.5 Задания для 5-7 классов

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Длины сторон треугольника — попарно взаимно простые натуральные числа a, b, c где $a < b < c$. Известно, что $b = 100$. Какое наибольшее значение может принимать c?

Ответ: 197

Задача 2. (2 балла)

Найдите наибольшее четырёхзначное число, все цифры в котором различны, а из двух соседних цифр одна обязательно делится на другую.

Ответ: 9362

Задача 3. (2 балла)

Семиклассница Наташа говорит: "Сегодня первый вторник месяца. Это месяц начался в среду, а прошлый — в воскресенье. Следующий месяц начнётся во субботу, а его последний день — воскресенье. Какое сегодня число?"

В ответе укажите день и месяц.

Ответ: 7.08

Задача 4. (3 балла)

В классе 32 человека, которые делятся на рыцарей, всегда говорящих правду, и лжецов, которые всегда лгут. У каждого ученика ровно четверо друзей в классе. Однажды каждый из них произнёс: "Все одноклассники, с которыми я дружу, лжецы". Какое наименьшее число рыцарей могло быть в классе?

Ответ: 7

Задача 5. (3 балла)

На ферме жили овцы и козы. За год количество овец увеличилось на 10%, а коз — на 30% и теперь овцы составляют 22% от общего числа овец и коз. Сколько процентов овцы составляли год назад?

Ответ: 25

Задача 6. (3 балла)

ABC — равносторонний треугольник с периметром 15. На лучах AB и AC за точками B и C взяты точки D и E такие соответственно, что $\angle BCD = \angle CBE$. Известно, что $CE = 7$. Найдите AD.

Ответ: 12

Задача 7. (3 балла)

Дети стоят в шеренгу. Справа от Пети 8 человек, слева от Васи 11 человек, между Васей и Петей один человек. Сколько детей в шеренге?

Если возможных ответов несколько, запишите их через запятую в любом порядке.

Ответ: 22,18

Задача 8. (4 балла)

Какое наибольшее количество ладей можно расставить на клетчатой доске 10×10 так, чтобы каждая била не больше трёх других?

Ладьи не бьют друг сквозь друга.

Ответ: 36

Задача 9. (4 балла)

Натуральные числа a, b, c таковы, что $31\text{НОД}(a, b, c) = \text{НОД}(a, b) + \text{НОД}(a, c) + \text{НОД}(b, c)$. Какое наибольшее значение может принимать число $\text{НОД}(b, c)/\text{НОД}(a, b, c)$?

Ответ: 29

Задача 10. (4 балла)

Первые две трети требуемого расстояния велосипедист проехал со средней скоростью 12 км/ч, а последние две трети — со средней скоростью 5 км/ч. Средняя скорость на всём пути составила 6 км/ч. Найдите среднюю скорость на средней трети пути (в км/ч).

Ответ: 15

3 Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады

3.1 Задания для 11 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Учитель алгебры 9 классов после выставления четвертных оценок каждый раз вычисляет среднюю. В первой четверти эта средняя оценка среди всех девятиклассников составила 4.2. Во второй четверти один ученик перевёлся в другую школу, а средняя четвертная оценка оставшихся составила 4.25. В третьей четверти пришли четыре новых ученика, а средний балл всех девятиклассников составил $4\frac{1}{6}$. Какое наименьшее число девятиклассников могло быть в школе в конце первой четверти?

Ответ: 45

Задача 2. (3 балла)

При каком положительном x значение выражения $6\sqrt[3]{x} + \dfrac{32}{x}$ достигает наименьшего значения?

Ответ: 8

Задача 3. (3 балла)

Сотая производная функции $x^3 \cos x$ в точке $x = \dfrac{3\pi}{2}$ принимает значение $a\pi^2 + b$. Найдите a и b. В ответе укажите их в любом порядке через запятую.

Ответ: -675, 970200

Задача 4. (3 балла)

$P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. $P(P(1)) = 16$. Какие натуральные значения может принимать $P(1)$? Перечислите все варианты в порядке возрастания через запятую.

Ответ 2, 4, 6, 16

Задача 5. (3 балла)

У Юли есть 135 бусин 9 цветов (каждого цвета поровну). Юля посчитала количество способов составить из них цепочку. На какую наибольшую степень 5 делится это количество?из них цепочку. На какую наибольшую степень 5 делится это количество?

Ответ: 6

Задача 6. (3 балла)

На островах архипелага находятся 15 городов, между которыми проложены 9 дорог. Дороги могут соединять только города, находящиеся на одном острове. Какое наибольшее количество островов может быть в архипелаге?

Ответ: 11

Задача 7. (3 балла)

Последовательность задана рекуррентным соотношением $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + \dfrac{400}{n^3 - n}$ и начальными условиями $x_1 = 212$ и $x_2 = 124$. Найдите x_{100}.

Ответ: 1202

Задача 8. (3 балла)

Рассмотрим все возможные векторы длины 13 с положительными координатами (x, y, z), такие что x и y — натуральные числа $x < y$. Найдите среди них вектор с наименьшей суммой $x + y + z$, В ответе укажите числа x^2, y^2, z^2 через запятую в таком порядке.

Ответ: 1, 4, 164

Задача 9. (4 балла)

Внешние касательные к окружностям S_1 и S_2 пересекаются в точке C, к окружностям S_1 и S_3 — в точке B, к окружностям S_2 и S_3 — в точке A. Диаметры окружностей S_1, S_2 и S_3 составляют 2, 3 и 4 соответственно. $AC = 6$. Найдите длину большего из отрезков AB и BC.

Ответ: 4

Задача 10. (4 балла)

Для тетраэдра T_1 построили четыре вневписанные сферы, радиусы которых равны 12, 22, 33 и 44. Для каждой из этих сфер построили плоскость, параллельную грани тетраэдра, которой касается сфера и тоже касающуюся самой сферы. Эти четыре плоскости образуют тетраэдр T_2. Найдите радиус вписанной сферы тетраэдра T_2.

Ответ: 78

3.2 Задания для 10 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Сумма первых 20 членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, не превосходит 1000. Какое наибольшее значение может принимать разность этой прогрессии?

Ответ: 5

Задача 2. (2 балла)

Многочлен $P(x)$ имеет 10 корней, а многочлен $Q(x)$ имеет степень 3. Какое наибольшее количество корней может иметь многочлен $P(Q(x))$?

Ответ: 30

Задача 3. (3 балла)

На окружности отмечены 7 точек. Какое наибольшее количество трапеций они могут образовывать?

Четырёхугольники, образованные одними и теми же наборами точек, например, $ABCD$ и $BCDA$, мы считаем одинаковыми.

Ответ: 21

Задача 4. (3 балла)

В трапеции точка K — середина меньшего основания, точка M — середина большего основания, O — точка пересечения диагоналей, X — точка пересечения продолжений боковых сторон. Известно, что $KX = \frac{3}{2}OM$. Найдите отношение меньшего основания к большему.

Постарайтесь сделать отношение несократимым, иначе ваш ответ будет засчитан только после апелляции.

Ответ: 1:2

Задача 5. (3 балла)

Представим себе, что на шахматной доске можно ставить несколько королей на одну клетку, и все эти короли бьют друг друга в дополнение к клеткам, которые они бьют по обычным правилам. Какое наибольшее количество таких королей можно расставить на шахматной доске 8×7 так, чтобы каждый бил не больше 8 других?

Ответ: 144

Задача 6. (3 балла)

У какого наименьшего натурального числа ровно 16 натуральных делителей (включая само число и единицу)?

Ответ: 120

Задача 7. (3 балла)

Сумма трёх различных простых чисел p, q и r составляет 102. Какое наибольшее значение может принимать их произведение?

Ответ: 4982

Задача 8. (3 балла)

Числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xz} + \dfrac{1}{yz} = -1 \\ y + z + \sqrt{13} = 6 + \dfrac{\sqrt{6}}{x} \\ yz + 1 = (7 + \sqrt{13})x - 23 \end{cases}$$

Найдите значение величины $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(y-1)(z-1)$.

Ответ: -13

Задача 9. (4 балла)

Окружность S_1 вписана в квадрат со стороной $3+2\sqrt{2}$. Окружность S_2 касается окружности S_1 и двух смежных сторон квадрата. Окружность S_3 касается окружностей S_1 и S_2 и одной из сторон квадрата. (Везде речь идёт именно о самих сторонах, а не прямых, их содержащих). Найдите радиус окружности S_3.

Ответ: $1/4$

Задача 10. (4 балла)

На конференцию приехали учёные. Каждые двое знакомых учёных поздоровались за руку один раз. Оказалось, что у каждого было поровну знакомых. Всего учёные совершили 104 рукопожатия. Какое наименьшее число учёных могло быть на конференции?

Ответ: 16

3.3 Задания для 9 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Найдите сумму чисел

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1597}+\sqrt{1600}}$$

Ответ: 13

Задача 2. (2 балла)

У квадратных уравнений $ax^2+bx+c=0$ и $bx^2+ax+c=0$ дискриминанты равны 7. При этом $b-a=3$. Найдите b^3-a^3.

Ответ: 21

Задача 3. (2 балла)

В секции фигурного катания занимаются 10 девочек и 8 мальчиков. Богатый папа Маши, Даши и Пети дал денег на отправку одной пары (мальчик + девочка) на соревнования по парному катанию, при условии, что поедет как минимум один из его детей. Сколькими способами тренер может выбрать пару для участия в соревнованиях на таких условиях?

Ответ: 24

Задача 4. (3 балла)

Наименьшее общее кратное трёх попарно различных натуральных чисел равно 1000. Какое наибольшее значение может принимать их НОД?

Ответ: 250

Задача 5. (3 балла)

На стороне AD прямоугольника $ABCD$ отметили точку K так, что $AK=AB=20$. Затем на стороне AB отметили точку L так, что $AL=DK=12$. Биссектриса угла $\angle CKL$ пересекает сторону BC в точке X. Найдите CX.

Ответ: 17

Задача 6. (3 балла)

На окружности отмечены 11 точек. Какое наибольшее количество трапеций они могут образовывать?

Четырёхугольники, образованные одними и теми же наборами точек, например, $ABCD$ и $BCDA$, мы считаем одинаковыми.

Ответ: 110

Задача 7. (3 балла)

В трапеции точка K — середина меньшего основания, точка M — середина большего основания, O — точка пересечения диагоналей, X — точка пересечения продолжений боковых сторон. Известно, что $KX = \frac{3}{2}OM$. Найдите отношение меньшего основания к большему.

Постарайтесь сделать отношение несократимым, иначе ваш ответ будет засчитан только после подачи апелляции.

Ответ: 1:2

Задача 8. (3 балла)

Сумма трёх различных простых чисел p, q и r составляет 108. Какое наибольшее значение может принимать их произведение?

Ответ: 5546

Задача 9. (4 балла)

Представим себе, что на шахматной доске можно ставить несколько королей на одну клетку, и все эти короли бьют друг друга в дополнение к клеткам, которые они бьют по обычным правилам. Какое наибольшее количество таких королей можно расставить на шахматной доске 8×7 так, чтобы каждый бил не больше 8 других?

Ответ: 144

Задача 10. (5 баллов)

На конференцию приехали учёные. Каждые двое знакомых учёных поздоровались за руку один раз. Оказалось, что у каждого было поровну знакомых. Всего учёные совершили 104 рукопожатия. Какое наименьшее число учёных могло быть на конференции?

Ответ: 16

3.4 Задания для 8 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Учитель алгебры 7 класса после выставления четвертных оценок каждый раз вычисляет среднюю. В первой четверти эта средняя оценка среди всех семиклассников составила $4\frac{3}{7}$. Во второй четверти один ученик перевёлся в другую школу, а средняя четвертная оценка оставшихся составила 4.4. Какое наименьшее число семиклассников могло быть в классе в конце первой четверти?

Ответ: 21

Задача 2. (2 балла)

Вне квадрата $ABCD$ взяты точки P и Q такие, что треугольники ABP и BCQ равносторонние. X — точка пересечения прямых AQ и DP. Найдите величину угла AXD (в градусах).

Ответ: 90

Задача 3. (2 балла)

У квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + ax + c = 0$ дискриминанты равны 7. При этом $b - a = 3$. Найдите $b^3 - a^3$.

Ответ: 21

Задача 4. (3 балла)

В ряд стоят люди, среди которых есть рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждого из них, кроме самого левого, спросили, кто его левый сосед. 18 человек сказали «рыцарь», а 12 человек — «лжец». Сколько на самом деле рыцарей? В ответе укажите наибольшее и наименьшее возможное число через запятую.

Ответ: 6, 25

Задача 5. (3 балла)

Найдите сумму чисел

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1597}+\sqrt{1600}}$$

Ответ: 13

Задача 6. (3 балла)

В секции фигурного катания занимаются 10 девочек и 8 мальчиков. Богатый папа Маши, Даши и Пети дал денег на отправку одной пары (мальчик + девочка) на соревнования по парному катанию, при условии, что поедет как минимум один из его детей. Сколькими способами тренер может выбрать пару для участия в соревнованиях на таких условиях?

Ответ: 24

Задача 7. (3 балла)

Наименьшее общее кратное трёх попарно различных натуральных чисел равно 1000. Какое наибольшее значение может принимать их НОД?

Ответ: 250

Задача 8. (4 балла)

В таблице 5×5 расставили натуральные числа от 1 до 25, каждое по одному разу. Затем посчитали сумму чисел в каждом квадратике 2×2 и полученные числа сложили. Какое наименьшее значение может принимать итоговая сумма?

Ответ: 646

Задача 9. (4 балла)

Дома четырёх друзей расположены вдоль кольцевой автодороги. От Васи до Коли по этой дороге ехать 6 км, от Пети до Миши — 8 км, от Миши до Васи — 4 км. Кроме того, от Коли до Пети — 30 км, если ехать по более длинному участку дороги.

Найдите длину автодороги (в километрах). Если возможных ответов несколько, перечислите все через запятую в порядке возрастания.

Ответ: 32, 36, 40, 48

Задача 10. (4 балла)

На стороне AD прямоугольника $ABCD$ отметили точку K так, что $AK = AB = 18$. Затем на стороне AB отметили точку L так, что $AL = DK = 6$. Биссектриса угла $\angle CKL$ пересекает сторону BC в точке X. Найдите CX.

Ответ: 15

3.5 Задания для 5-7 классов

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Учитель алгебры 7 класса после выставления четвертных оценок каждый раз вычисляет среднюю. В первой четверти эта средняя оценка среди всех семиклассников составила 4.2. Во второй четверти один ученик перевёлся в другую школу, а средняя четвертная оценка оставшихся составила $4\frac{1}{6}$. Какое наименьшее число семиклассников могло быть в классе в конце первой четверти?

Ответ: 25

Задача 2. (2 балла)

Вася прочитал страницы учебника с 68 по 72 (включительно) и посчитал сумму номеров страниц. Петя прочитал семь страниц учебника подряд, и сумма номеров страниц у него оказалась такая же, как у Васи. Найдите номер последней страницы, которую прочитал Петя.

Ответ: 53

Задача 3. (2 балла)

Вася и Петя проехали на велосипедах два круга по стадиону. Второй круг Вася проехал на 25% быстрее, чем первый, а Петя на 20% медленнее. К финишу они пришли одновременно. На сколько процентов Петя был быстрее Васи на первом круге?

Ответ: 25

Задача 4. (3 балла)

В ряд стоят люди, среди которых есть рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждого из них, кроме самого левого, спросили, кто его левый сосед. 14 человек сказали «рыцарь», а 10 человек — «лжец». Сколько на самом деле рыцарей? В ответе укажите наибольшее и наименьшее возможное число через запятую.

Ответ: 5, 20

Задача 5. (3 балла)

У Васи есть электронные часы, которые показывают время от $0:00$ до $23:59$. За одни календарные сутки Вася посмотрел на часы три раза, и каждую цифру увидел ровно один раз. В какой самый ранний момент Вася мог посмотреть на часы в первый раз?

Ответ: 0:16

Задача 6. (3 балла)

Вне квадрата $ABCD$ взяты точки P и Q такие, что треугольники ABP и BCQ равносторонние. X — точка пересечения прямых AQ и DP. Найдите величину угла AXD (в градусах).

В ходе решения задачи можно пользоваться тем, что сумма углов треугольника составляет $180°$.

Ответ: 90

Задача 7. (3 балла)

Вася написал трёхзначное число, состоящее из ненулевых цифр a, b и c, и обнаружил, что из длин отрезков, равным цифрам этого числа, нельзя составить треугольник. Какое наибольшее число мог написать Вася?

Ответ: 981

Задача 8. (3 балла)

На доске было написано число 10^{100} (единица и сто нулей). Каждую минуту Вася заменял написанное на доске число на сумму неполного частного и остатка, получающегося при делении этого числа на 7. В итоге получилось однозначное число. Какое именно?

Ответ: 4

Задача 9. (4 балла)

В таблице 5×5 расставили натуральные числа от 1 до 25, каждое по одному разу. Затем посчитали сумму чисел в каждом квадратике 2×2 и полученные числа сложили. Какое наименьшее значение может принимать итоговая сумма?

Ответ: 646

Задача 10. (5 баллов)

Дома четырёх друзей расположены вдоль кольцевой автодороги. От Васи до Коли по этой дороге ехать 6 км, от Пети до Миши — 8 км, от Миши до Васи — 4 км. Кроме того, от Коли до Пети — 30 км, если ехать по более длинному участку дороги.

Найдите длину автодороги (в километрах). Если возможных ответов несколько, перечислите все через запятую в порядке возрастания.

Ответ: 32, 36, 40, 48