Задания отборочного и заключительного этапов
«Открытой олимпиады школьников» (математика)
(№67 Перечня олимпиад школьников, 2023/2024 уч.год)

# Оглавление

# 1 Задания заключительного этапа олимпиады

## 1.1 Задания для 11 класса

**Задача 1. (2 балла)** (Условие и решение в общем виде)

Дан многочлен $P(x)$ степени $n$. Известно, что у производной многочлена $P^2(x)$ ровно $k$ различных вещественных корней. Какое наименьшее число различных вещественных корней может быть у многочлена $P(x)$?

*Ответ:* $k - n + 2$

*Решение:*

$(P^2(x))' = 2P(x)P'(x)$, таким образом, все корни этого многочлена являются корнями либо многочлена $P(x)$, либо многочлена $P'(x)$. При этом у производной многочлена степени $n$ не больше $n-1$ корня. Значит, все оставшиеся $k-(n-1)$ корней многочлена $2P(x)P'(x)$ являются корнями $P(x)$.

В этом случае ни один корень многочлена не будет одновременно корнем производной. Однако в каждом таком корне многочлен меняет знак, поэтому чётность количества корней в этом случае должна совпадать с чётностью степени многочлена. Во всех наших вариантах это не так. Значит, оценку надо увеличить ещё как минимум на 1.

Пример строится следующим образом: рассмотрим какой-нибудь многочлен $P_0(x)$ с положительным старшим коэффициентом, имеющий $n-2$ корня, производная которого также имеет $n-2$ корня, один из которых кратный. Причём пусть $P_o(x)$ такой, что во всех корнях производной многочлен принимает различных значения. Также рассмотрим все многочлены вида $P(x) = P_0(x) - a$. При достаточно больших $a$ у этого многочлена 0 или 1 корней, в зависимости от чётности его степени. В этом случае у многочлена $(P^2(x))'$ либо $n-2$ или $n-2+1 = n-1$ корней в зависимости от чётности $n$, то есть чётное число. Когда мы будем постепенно уменьшать $a$, будет происходить следующее: когда $a$ достигает какого-то из локальных минимумов многочлена к многочлену добавляется один корень, являющийся корнем производной, т.е. количество корней $(P^2(x))'$ не увеличивается. Когда $a$ ещё чуть-чуть уменьшается, у многочлена становится ещё на один корень больше, при этом совпадение с корнем производной пропадает, поэтому количество корней $(P^2(x))'$ увеличивается сразу на 2. В локальных максимумах наблюдается обратная ситуация. Поскольку при $a = 0$ количество корней у $(P^2(x))'$ больше, чем $k$, и количество корней у построенного таких образом $(P^2(x))'$ всегда чётно, необходимое количество корней $k$ будет в какой-то момент достигнуто. При этом в описанной ситуации корни многочлена и его производной не будут совпадать, у производной будет $n-2$ корня, значит, у самого многочлена их будет $k+n-2$.

Таблица с данными и ответами:

| Вар. | $n$ | $k$ | Ответ |
|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 30 | 12 |
| 2 | 21 | 32 | 13 |
| 3 | 22 | 36 | 16 |
| 4 | 23 | 40 | 19 |
| 5 | 25 | 44 | 21 |
| 6 | 30 | 48 | 20 |

**Задача 2. (2 балла)** (Условие и решение в общем виде)

Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентным соотношением $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + k$ и начальными условиями $a_0 = a$, $a_2 = a + d$. Можно ли по этим данным однозначно восстановить $a_{2m}$? Если да, введите в поле для ответа это число, иначе введите слово «нет».

*Ответ:* $a + md + km(m-1)$

*Решение:*

Перепишем рекуррентную формулу: $a_n - a_{n-2} = a_{n-1} - a_{n-3} + k$. Записав её для $n-1$ вместо $n$ получим $a_{n-1} - a_{n-3} = a_{n-2} - a_{n-4} + k$, откуда $a_n - a_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-4} + 2k$.

Поскольку $a_2 - a_0 = d$, отсюда легко доказывается, что $a_{2i} - a_{2(i-1)} = d + 2k(i-1)$. Значит, $a_{2m} = a + \sum i = 1^m(d + 2k(i-1)) = a + md + km(m-1)$

Таблица с данными и ответами:

| Вар. | $a_0$ | $a_2$ | $k$ | $2m$ | $d$ | $m$ | Ответ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | 3 | 4000 | 2 | 2000 | 11998000 |
| 2 | 1 | 4 | 4 | 2000 | 3 | 1000 | 3999001 |
| 3 | 2 | 6 | 5 | 4000 | 4 | 2000 | 19998002 |
| 4 | 3 | 8 | 2 | 2000 | 5 | 1000 | 2003003 |
| 5 | 5 | 7 | 3 | 4000 | 2 | 2000 | 11998005 |
| 6 | 0 | 3 | 4 | 2000 | 3 | 1000 | 3999000 |
| 7 | 1 | 5 | 5 | 4000 | 4 | 2000 | 19998001 |
| 8 | 2 | 7 | 2 | 2000 | 5 | 1000 | 2003002 |
| 9 | 3 | 5 | 3 | 4000 | 2 | 2000 | 11998003 |
| 10 | 5 | 8 | 4 | 2000 | 3 | 1000 | 3999005 |

**Задача 3. (3 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

Натуральные делители натурального числа $n$ занумеровали по возрастанию: $d_1 = 1$, $d_2$, …, $d_k = n$. Оказалось, что $d_{18} = 120$. Какое **наименьшее** значение может принимать число $n$?

*Ответ:* $4920 = 120 \cdot 41$

*Решение:*

У числа $120 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3$ шестнадцать делителей и все они являются делителями числа $n$. Если $n$ делится на $2^4$, то к этим делителям добавляются ещё числа 16, 48 и 80, то есть 120 — это уже как минимум девятнадцатый делитель.

Если $n$ делится на $3^2$, то к исходным шестнадцати делителям добавляются 9, 18 и 45. Если $n$ делится на $5^2$, то к исходным шестнадцати делителям добавляются 25, 50 и 75.

Значит, $n$ делится на какое-то простое число $p$, кроме 2, 3 и 5. Если это число не превосходит 40, то числа $p$, $2p$ и $3p$ являются делителями $n$, меньшими 120, и мы опять получаем слишком много делителей. Значит, $p$ хотя бы 41, то есть $n \geqslant 120 \cdot 41$.

Заметим, что это число нас как раз устраивает.

**Задача 4. (3 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

Клетчатый куб $9 \times 9 \times 9$ состоит из ячеек, представляющих из себя единичные кубики. 361 ячейка закрашена. Докажите, что в каком-то кубике $2 \times 2 \times 2$ закрашено хотя бы четыре ячейки.

*Доказательство:*

Предположим противное. Вырежем из нашего куба куб $8 \times 8 \times 8$ и разобьём его на 64 куба $2 \times 2 \times 2$. В каждом из них закрашено не более трёх ячеек, то есть всего не более 192.

В исходном кубе после этого остались кубики на трёх гранях, имеющих общую вершину. Рассмотрим 64 клетки на одной из этих граней, которые не лежат ни на какой из двух других. Они разбиваются на 16 квадратов $2 \times 2$, в каждом из которых не более трёх закрашенных ячеек. Итого на трёх гранях получаем не более $3 \times 16 \times 3 = 144$.

У нас остались не рассмотренными 25 ячеек, образующих три ребра исходного куба, сходящиеся в одной вершине. Среди них закрашены не более 24, так как общая ячейка трёх этих рёбер и три её соседних лежат в одном кубике $2 \times 2 \times 2$, значит, среди этих четырёх ячеек не более трёх закрашенных.

Таким образом мы получаем максимум $192 + 144 + 24 = 360$ закрашенных ячеек, что противоречит условию задачи.

**Задача 5. (3 балла)** (Условие и решение в общем виде)

Произведение чисел $a$, $b$, $c$, $d$, не меньших 2, составляет $2^{k+3}$. Найдите наибольшее значение выражения

$$\log_{cd} ab + \log_{bd} ac + \log_{bc} ad + \log_{ad} bc + \log_{ac} bd + \log_{ab} cd.$$

*Ответ:* $\dfrac{3(k+1)}{2} + \dfrac{6}{k+1}$

*Решение:*

Обозначим $\log_2 a = x$, $\log_2 b = y$, $\log_2 c = z$, $\log_2 d = t$. Тогда наше выражение превратится в

$$\frac{x+y}{z+t} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{x+z}{y+t} + \frac{y+t}{z+x} + \frac{x+t}{z+y} + \frac{z+y}{x+t}.$$

(Слагаемые в этом выражение уже переставлены). Условие, что исходные числа не меньше $p$ превращается в условие, что логарифмы не меньше 1, а условие на произведение превращается в $x + y + z + t = k + 3$.

Давайте воспользуемся методом Штурма. Заменим два числа $x$ и $y$ на два другие $x'$ и $y'$ с такой же суммой $x' + y' = x + y$ и большей разностью: если $x \geqslant y$, то $x' > x \geqslant t > y'$. Тогда первые две дроби не изменятся. $\dfrac{x+z}{y+t}$ увеличится, а $\dfrac{y+t}{x+z}$ уменьшится, при этом их произведение останется равным единице. Сумма двух взаимно обратных чисел тем больше, чем эти числа дальше от единицы, значит, при нашем преобразовании сумма $\dfrac{x+z}{y+t} + \dfrac{y+t}{x+z}$ увеличится. Аналогично увеличится сумма и двух последних дробей. В случае, если $y > x$ всё произойдёт аналогично.

Такими преобразованиями можно превратить три наименьших числа из $x$, $y$, $z$, $t$ в единицу, а наибольшее — в $k+1$, при этом наше выражение будет увеличиваться. Значит, любое возможное значение нашего выражения не превосходит оного при $y = z = t = 1$ и $x = k+1$, что равно $\dfrac{3(k+1)}{2} + \dfrac{6}{k+1}$.

Таблица с данными и ответами:

| Вар. | $q$ | $2^{k+3}$ | $k$ | Ответ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 32 | 2 | 6,5 |
| 2 | | 64 | 3 | 7,5 |
| 3 | | 128 | 4 | 8,7 |
| 4 | | 256 | 5 | 10 |
| 5 | | 1024 | 7 | 12,75 |
| 6 | | 4096 | 9 | 15,6 |
| 7 | | 16384 | 11 | 18,5 |

**Задача 6. (3 балла)** (Условие и решение в общем виде)

Окружности $S_1$ и $S_2$ находятся внутри трапеции $ABCD$, касаясь друг друга, оснований трапеции, и каждая — своей боковой стороны. Лучи $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $K$. Оказалось, что радиус вписанной окружности треугольника $BCK$ равен радиусу окружности $S_1$ и равен $r$. Также известно, что $BC = x$. Найдите площадь треугольника $ADK$.

*Ответ:* $\dfrac{(x+2r)^2}{2}$

*Решение:*

Радиусы $S_1$ и $S_2$ равны друг другу и высоте трапеции. Из условия про пересечение лучей следует, что $BC$ — меньшее основание.

Проведём вторую касательную к вписанной окружности треугольника $BCK$ параллельную основаниям трапеции. Обозначим за $X$ и $Y$ точки пересечения этой касательной с отрезками $BK$ и $CK$. $BXYC$ — трапеция.

Точки касания окружностей и оснований трапеции образуют квадрат со стороной $2r$. Если вырезать этот квадрат из трапеции и склеить оставшиеся части между собой, получится трапеция, равная $BXYC$.

Более точно, обозначим точки касания окружностей $S_1$ и $S_2$ с основаниями трапеции $ABCD$: пусть $M$ и $N$ лежат на $BC$ ($M$ ближе к $B$), $P$ и $Q$ лежат на $AD$ ($P$ ближе к $A$). Кроме того, пусть $U$, $V$, $W$, $Z$ — точки касания вписанной окружности $BCK$ с $XY$,$BC$, $BK$, $CK$ соответственно. Кроме того, пусть $R$ и $T$ — точки касания окружностей $S_1$ и $S_2$ с боковыми сторонами трапеции, $O_1$, $O_2$ и $O$ — центры окружностей $S_1$, $S_2$ и вписанной окружности треугольника $BCK$.

Рассмотрим четырёхугольники $SBMO_1$ и $WXUO$. $\angle SBM = \angle WXU$, как соответственные. $\angle O_1SB$, $\angle BMO_1$, $\angle OWX$, $\angle XUO$ прямые, значит оставшиеся углы, $\angle MO_1S$ и $\angle UOW$ также равны. Значит, треугольники $MO_1S$ и $UOW$ равны. Следовательно, треугольники $SBM$ и $WXU$ также равны, а значит четырёхугольники $SBMO_1$ и $WXUO$ равны. Аналогично $SAPO_1 = WBVO$, $TDQO_2 = ZCVO$, $TCNO_2 = ZYUO$.

Значит, $BC = BV + CV = AP + QD = AD - PQ = AD - 2r$, т.е. $AD = BC + 2r = x + 2r$.

Пусть $h$ — длина высоты треугольника $BCK$, проведённой из точки $K$. Тогда длина высоты треугольника $ADK$, проведённой из точки $K$ равна $h + 2r$. Значит, коэффициент подобия треугольников $ADK$ и $BCK$ с одной стороны равен $\frac{h+2r}{h}$, а с другой $\frac{AD}{BC} = \frac{x+2r}{x}$, откуда $h = x$.

Значит, площадь треугольника $ADK$ равна $\frac{AD \cdot (h+2r)}{2} = \frac{(x+2r)^2}{2}$

Таблица с данными и ответами:

| Вар. | $BC = x$ | $r$ | Ответ |
|---|---|---|---|
| 1 | 18 | 5 | 392 |
| 2 | 20 | 6 | 512 |
| 3 | 22 | 7 | 648 |
| 4 | 24 | 8 | 800 |
| 5 | 26 | 9 | 968 |

**Задача 7. (4 балла)** (Условие и решение в общем виде)

Сфера $S$ касается основания $ABC$ тетраэдра $ABCD$ в точке $H$ и проходит через вершину $D$. Рёбра $AD$, $BD$ и $CD$ эта сфера пересекает в точках $A_1$, $B_1$ и $C_1$. Центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на отрезке $DH$. Радиус сферы $S$ равен $R$.

Пусть $V$ — объём тетраэдра $ABCD$, а $V_1$ — объём тетраэдра $A_1B_1C_1D$. Какое наибольшее значение может принимать $V \cdot V_1$?

*Ответ:* $\frac{16R^6}{9}$

*Решение:*

Пусть $H_1$ — центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, лежащий на $DH$, $O$ — центр сферы. Очевидно, $O$ — середина $DH$. Так как точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ лежат на сфере, $OH_1$ перпендикулярно плоскости $A_1B_1C_1$. С другой стороны, $OH_1$ и $DH$ — это одна и та же прямая, а $DH$ перпендикулярна плоскости $ABC$. Значит, плоскости $ABC$ и $A_1B_1C_1$ параллельны, а тетраэдры $ABCD$ и $A_1B_1C_1D$ подобны.

Пусть $h$ — длина $DH_1$, то есть высота маленького тетраэдра. Высота большого тетраэра равна $2R$, а коэффициент их подобия — $\frac{2R}{h}$.

$OH_1A$ — прямоугольный треугольник с прямым углом $H_1$, $OH_1 = |R-h|$, $OA_1 = R$, значит, радиус описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, то есть $OH_1$, равен $r = \sqrt{R^2-(R-h)^2} = \sqrt{2Rh-h^2}$.

Как известно, среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет равносторонний. Для окружности радиуса $r$ эта площадь составляет $\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$.

Значит, объемы тетраэдров составляют $V_1 = \frac{h}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}r^2}{4} = \frac{\sqrt{3}hr^2}{4} = \frac{\sqrt{3}h(2Rh-h^2)}{4} = \frac{\sqrt{3}h^2(2R-h)}{4}$

и $V = \left(\frac{2R}{h}\right)^3\cdot V_1 = \frac{8R^3}{h^3}\cdot\frac{\sqrt{3}h^2(2R-h)}{4} = \frac{2\sqrt{3}R^3(2R-h)}{h}$, а их произведение равно $\frac{3R^3h(2R-h)^2}{2}$. Чтобы максимизировать эту величину, достаточно максимизировать $f(h) = h(2R-h)^2$. $f'(h) = (2R-h)^2 - 2h(2R-h) = (2R-h)(2R-3h)$. Корни $f'$ — это числа $h = 2R$ и $h = \frac{2R}{3}$, причём в первой точке достигается минимум, равный 0, а во второй — максимум.

Подставив $h = \frac{2R}{3}$ в формулу для объёма, получим $VV_1 = \frac{16R^6}{9}$.

| Вар. | $R$ | Ответ |
|---|---|---|
| 1 | 12 | 5308416 |
| 2 | 15 | 20250000 |
| 3 | 6 | 82944 |
| 4 | 30 | 1296000000 |
| 5 | 18 | 60466176 |
| 6 | $1,5$ | $20,25$ |
| 7 | $0,6$ | $0,082944$ |
| 8 | $0,3$ | $0,001296$ |
| 9 | $0,9$ | $0,944784$ |
| 10 | 21 | 152473104 |

**Задача 8. (5 баллов)** (Приведен один из вариантов задания)

100 человек пришли на представление в шляпах. Фокусник поменял местами их шляпы. После этого каждую минуту каждый человек находил свою шляпу и передавал тому, у кого эта шляпа в данный момент находилась, ту шляпу, которая в этот момент была у него самого.

(Если на каком-то шаге у человека $A$ оказывается шляпа, принадлежащая человеку $B$, а у человека $C$ оказывается шляпа, принадлежащая человеку самому $A$, то на следующем шаге у $C$ оказывается шляпа, принадлежащая $B$).

Фокусник изначально раздал шляпы так, чтобы в итоге они вернулись к своим настоящим хозяевам, но при этом это произошло бы как можно позже. Через сколько минут, самое позднее, это может произойти в первый раз,

*Ответ:* 6

*Решение:*

Рассмотрим некоторого человека, назовём его $A_0$. Пусть его шляпа изначально оказалась у какого-то $A_1$, шляпа $A_1$ оказалась у $A_2$, и т.д. Рассмотренный нами процесс нумерации рано или поздно закончится тем, что для какого-то $A_{n-1}$ его шляпа окажется у какого-то $A_k$, который был уже нами пронумерован ранее. При этом это может быть только $A_0$, т.к. про всех остальных мы уже знаем, откуда взялись находящиеся у них шляпы.

Значит, шляпа $A_{n-1}$ в начале представления оказалась у $A_0$ и мы получили так называемый цикл из $n$ человек. Для удобства будем считать, что $A_n = A_0$, $A_{n+1} = A_1$ и т.д., чтобы иметь возможность говорить, что каждый человек с номером $k$ передал свою шляпу человеку с номером $k+1$ (то есть, мы на самом деле нумеруем людей остатками (классами вычетов) при делении на $n$).

После того, как джентльмены передадут свои шляпы, шляпа $A_0$ окажется у того, у кого раньше была шляпа $A_1$, то есть у $A_2$, шляпа $A_1$ окажется у $A_3$ и т.д. Шляпа каждого $A_k$ окажется у $A_{k+2}$. После второй передачи шляпа каждого $A_k$ окажется у $A_{k+4}$ и т.д. Через $m$ минут шляпа $A_k$ окажется у $A_{k+2^m}$.

Если это тот же человек, что и $A_k$, разность их номеров, то есть $2^m$, должна делиться на $n$. Значит, шляпа может вернуться к исходном владельцу, только если количество человек в цикле является степенью двойки. При этом фокусник хочет, чтобы был цикл как можно большей длины.

Самая большая степень двойки, не превосходящая 100, это $64 = 2^6$. Фокусник в начале должен разбить пришедших на представление на циклы, длины одного из которых равна 64, а длины остальных — меньшие степени двойки, не важно какие. Тогда через 6 минут все шляпы окажутся у своих настоящих владельцев (у некоторых они окажутся раньше, но в этот момент это впервые произойдёт для всех сразу).

## 1.2 Задания для 10 класса

**Задача 1. (2 балла)** (Условие и решение в общем виде)

$\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — возрастающие целочисленные арифметические прогрессии, $a_1 = b_2 = 1$ и $a_1 + \ldots + a_{2n+1} = b_1 + \ldots + b_{2n+1}$. Какое наименьшее значение может принимать $a_{2n+1}$?

*Ответ:* $1 + 2n(n-1)$

*Решение:*

$a_1 + \ldots + a_{2n+1} = (2n+1)a_{n+1}$, аналогично для $\{b_n\}$. Поскольку суммы прогрессий равны, $a_{n+1} = b_{n+1}$.

$a_{n+1} - a_1 = nc$, где $c$ разность прогрессии $\{a_n\}$.

С другой стороны $a_{n+1} - a_1 = b_{n+1} - b_2 = (n-1)d$, где $d$ разность прогрессии $\{b_n\}$. Значит, $nc = (n-1)d$. Так как $n-1$ и $n$ взаимно просты, $c$ делится на $n-1$, а $d$ делится на $n$. Наименьшее возможное значение $c$ равно $n-1$, а значит, наименьшее возможное значение $a_{2n+1} = 1 + 2n(n-1)$.

Таблица с данными и ответами:

| Вар. | $n$ | $2n+1$ | Ответ |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 17 | 113 |
| 2 | 9 | 19 | 145 |
| 3 | 10 | 21 | 181 |
| 4 | 11 | 23 | 221 |
| 5 | 12 | 25 | 265 |
| 6 | 13 | 27 | 313 |

**Задача 2. (3 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

Решите уравнение $x^3 - y^3 = 67(x^2 - y^2)$ в натуральных числах при $x \neq y$. В письменном решении должны быть найдены все возможные решения. В поле для ответа введите наименьшее возможное значение числа $x$.

*Ответ:* $x = 18$, $y = 63$ или наоборот.

*Решение:*

Поскольку $x \neq y$, мы можем сократить равенство на $x - y$. Получим

$x^2+xy+y^2 = 67(x+y)$, или $(x+y)^2 - xy = 67(x+y)$. Обозначим $d =$ НОД$(x, y)$, $x = ad$. $y = bd$, где $a$ и $b$ взаимно просты. Получим $d^2(a + b)^2 - d^2ab = 67d(a + b)$. Сократим на $d$: $d(a + b)^2 - dab = 67(a + b)$. Значит, $dab$ делится на $a + b$. При этом $a$ и $b$ взаимно просты друг с другом, а значит, и с $a + b$. Значит, $d$ делится на $a + b$.

Пусть $d = k(a + b)$. Тогда $k(a + b)^3 - k(a + b)ab = 67(a + b)$, откуда $k(a + b)^2 - kab = 67$ или $k(a^2 + b^2 + ab) = 67$. 67 — простое число, значит, $k = 1$, $a^2 + b^2 + ab = 67$. Перебрав все варианты $a$ от 1 до 8, получим $a = 2$ и $b = 7$ или наоборот.

Также $d = a + b = 9$, откуда $x = 18$, $y = 63$ или наоборот.

**Задача 3. (3 балла)** (Условие и решение в общем виде)

$ABCD$ — описанная трапеция. Лучи $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $K$. Периметр треугольника $KBC$ равен $2p$. $AD = l$. Найдите $BC$.

*Ответ:* $\dfrac{pl}{p+l}$

*Решение:*

Лучи $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $K$, это значит, что $BA$ и $CD$ — боковые стороны, $BC$ — меньшее основание, а $AD$ — большее. Вписанная окружность трапеции является одновременно вписанной окружностью треугольника $ADK$ и вневписанной окружностью треугольника $BCK$.

В подобных треугольниках соответствующие элементы относятся как коэффициент подобия. В частности, это верно для отрезков касательных, проведённых к вписанным окружностям из точки $K$. В большом треугольнике $ADK$ эти отрезки (так как вписанная окружность трапеции является вневписанной окружностью треугольника $BCK$) равны $p$. В треугольнике $BCK$ эти отрезки равны $p - a$, где $a = BC$. Коэффициент подобия равен $\dfrac{a}{l}$, откуда $\dfrac{a}{l} = \dfrac{p-a}{p}$.

Преобразуя это равенство получаем $ap = pl - al$, откуда $ap + al = pl$ и затем $\dfrac{pl}{p+l}$.

Таблица с данными и ответами:

| Вар. | $BC = l$ | $2p$ | $p$ | Ответ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 30 | 15 | 6 |
| 2 | 40 | 48 | 24 | 15 |
| 3 | 28 | 42 | 21 | 12 |
| 4 | 45 | 72 | 36 | 20 |
| 5 | 66 | 110 | 55 | 30 |
| 6 | 84 | 120 | 60 | 35 |

**Задача 4. (3 балла)** (Условие и решение в общем виде)

Правильный $2n+1$-угольник разрезан на треугольники непересекающимися диагоналями. Какое наибольшее число получившихся треугольников может не содержать ни одной стороны исходного?

*Ответ:* $n - 2$

*Решение:*

Число частей, на которые разбивается $2n+1$-угольник, равно $2n-1$. В один треугольник входит не более двух сторон $2n + 1$-угольника, значит, число частей, содержащих эти стороны, не менее $n+1$. Оставшиеся $n-2$ части могут не содержать сторону $2n+1$-угольника.

Пример строится очевидно: просто отрезаем по две стороны каждым новым треугольником.

Таблица с данными и ответами:

| Вар. | $n$ | $2n+1$ | Ответ |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 17 | 6 |
| 2 | 9 | 19 | 7 |
| 3 | 10 | 21 | 8 |
| 4 | 11 | 23 | 9 |
| 5 | 12 | 25 | 10 |
| 6 | 13 | 27 | 11 |

**Задача 5. (3 балла)** (Условие и решение в общем виде)

В каждой из вершин треугольника $ABC$ провели касательную к его описанной окружности и отложили на этой касательной точку, отстоящую от соответствующей вершины на расстояние, равное радиусу окружности. Полученные три точки образовали равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным $\alpha$.

Найдите все возможные значения всех углов исходного треугольника. В после для ответа введите наибольшее из получившихся чисел.

*Решение:*

Назовём новые точки $A_1$, $B_1$, $C_1$, центр описанной окружности $O$. Тогда $OA_1A$, $OB_1B$, $OC_1C$ — равные прямоугольные треугольники, в частности, углы при вершине $O$ у них также равны 45°. Кроме того, центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ — также точка $O$.

Если бы все эти три угла откладывались в одну сторону (по или против часовой стрелки), получился бы треугольник подобный исходному. Однако есть ещё случай, когда два угла 45° отложены в одну сторону, допустим, по часовой стрелке, а третий $\angle A_1OA$ — в другую.

Заметим, что исходный треугольник получается из двойственного таким же преобразованием, только все повороты точек осуществляются в другую сторону.

Рассмотрим углы, которые лучи $OB$, $OC$, $OA$, $OB_1$, $OC_1$ образуют с лучом $OA_1$. Если угол откладывается по часовой стрелке, будем считать его с минусом, иначе — с плюсом. Тогда $OA$ образует угол $-45°$.

Пусть лучи $OB_1$ и $OC_1$ образуют с $OA_1$ углы $2\beta$ и $2\gamma$, пусть $\gamma > \beta$. Тогда $OB$ и $OC$ образуют с $OA_1$ углы $2\beta + 45°$ и $2\gamma + 45°$.

Тогла мы можем выразить углы $\angle BOA$, $\angle COA$, $\angle BOC$. С учётом направления, получаем $2\beta + 90°$, $2\gamma + 90°$, $2(\gamma - \beta)$. Изменился ли порядок точек на окружности у нового треугольника по сравнение со старым? Это так, если $\angle COA_1 + \angle A_1OA > 360°$, то есть $2\gamma + 45° + 45° > 360°$ или $\gamma > 135°$. Учитывая принятое нами расположение точек на окружности, $2\gamma = \angle C_1OB_1 + \angle B_1OA_1 = 2(\angle C_1A_1B_1 + \angle B_1C_1A_1)$, значит, положение точек меняется, если сумму двух соответствующих углов треугольника $A_1B_1C_1$ больше 135°. При это в наших условиях ни один из углов сам по себе не больше 135°, значит, точка $A$ не может «перепрыгнуть» через точки $B$ и $C$ сразу.

В случае, если порядок точек остался неизменным, углы исходного треугольника $ABC$ это половины посчитанных нами $\angle BOA$ и $\angle COB$, а также угла $\angle AOC = 360° - \angle COA = 270 - \gamma$. Их значения составляют $\beta + 45°$, $\gamma - \beta$ и $135° - \gamma$.

Но $\beta$ и $\gamma - \beta$ — это и есть какие-то углы треугольника $A_1B_1C_1$, а $135° - \gamma$ — третий угол, уменьшенный на 45°. Для каждого из вариантов мы получаем по три подслучая (часть из которых в некоторых вариантах невозможны)

Вариант 1:

| $\beta$ | $\gamma-\beta$ | $\beta+45°$ | $135-\gamma$ |
|---|---|---|---|
| 18 | 81 | 63 | 36 |
| 81 | 18 | 126 | 36 |
| 81 | 81 | 126 | −27 |

Вариант 2:

| $\beta$ | $\gamma-\beta$ | $\beta+45°$ | $135-\gamma$ |
|---|---|---|---|
| 36 | 72 | 81 | 27 |
| 72 | 36 | 117 | 27 |
| 72 | 72 | 117 | −9 |

Вариант 3:

| $\beta$ | $\gamma-\beta$ | $\beta+45°$ | $135-\gamma$ |
|---|---|---|---|
| 40 | 70 | 85 | 25 |
| 70 | 40 | 115 | 25 |
| 70 | 70 | 115 | −5 |

Вариант 4:

| $\beta$ | $\gamma-\beta$ | $\beta+45°$ | $135-\gamma$ |
|---|---|---|---|
| 20 | 80 | 65 | 35 |
| 80 | 20 | 125 | 35 |
| 80 | 80 | 125 | −25 |

Вариант 5:

| $\beta$ | $\gamma-\beta$ | $\beta+45°$ | $135-\gamma$ |
|---|---|---|---|
| 54 | 63 | 99 | 18 |
| 63 | 54 | 108 | 18 |
| 63 | 63 | 108 | 9 |

Вариант 6:

| $\beta$ | $\gamma-\beta$ | $\beta+45°$ | $135-\gamma$ |
|---|---|---|---|
| 32 | 74 | 77 | 29 |
| 74 | 32 | 119 | 29 |
| 74 | 74 | 119 | −13 |

Таким образом, во всех вариантах, кроме пятого, есть ещё случай, когда точки идут в другом порядке. В этом случае, нас интересуют половины углов $\angle COB$, $\angle BOA$, $\angle AOC$, равные, соответственно, $135° - \beta$, $180° - \beta + \gamma$ и $\gamma - 135°$.

Получаем следующие ответы по вариантам:

| | $\beta$ | $\gamma-\beta$ | $\gamma$ | $135°-\beta$ | $180°-\beta+\gamma$ | $\gamma-135°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 81 | 81 | 162 | 54 | 99 | 27 |
| 2 | 72 | 72 | 144 | 63 | 108 | 9 |
| 3 | 70 | 70 | 140 | 65 | 110 | 15 |
| 4 | 80 | 80 | 160 | 55 | 100 | 25 |
| 6 | 74 | 74 | 148 | 61 | 106 | 13 |

Таким образом, мы получаем следующие ответы (наибольший выделен)

Вариант 1:

| | | |
|---|---|---|
| 81 | 63 | 36 |
| 18 | **126** | 36 |
| 54 | 99 | 27 |
| 18 | 81 | 81 |

Вариант 2:

| | | |
|---|---|---|
| 72 | 81 | 27 |
| 36 | 117 | 27 |
| 63 | 108 | 9 |
| 36 | 72 | 72 |

Вариант 3:

| | | |
|---|---|---|
| 70 | 85 | 25 |
| 40 | 115 | 25 |
| 65 | 110 | 15 |
| 40 | 70 | 70 |

Вариант 4:

| | | |
|---|---|---|
| 80 | 65 | 35 |
| 20 | 125 | 35 |
| 55 | 100 | 25 |
| 20 | 80 | 80 |

Вариант 5:

| | | |
|---|---|---|
| 63 | 99 | 18 |
| 54 | 108 | 18 |
| 63 | 108 | 9 |
| 56 | 63 | 63 |

Вариант 6:

| | | |
|---|---|---|
| 74 | 77 | 29 |
| 32 | 119 | 29 |
| 61 | 106 | 13 |
| 32 | 74 | 74 |

**Задача 6. (3 балла)** (Условие и решение в общем виде)

В некоторой стране $4k+1$ город, каждый из которых соединён дорогами с $k$ другими (каждая дорога соединяет ровно два города). Известно, что из любого города можно добраться в любой другой. Докажите, что между любыми двумя городами существует путь, состоящий не более, чем из четырёх дорог.

*Доказательство:*

Автор задачи забыл добавить условие, что в стране нет «треугольников», то есть троек городов, попарно соединённых друг с другом. Без этого условия утверждение задачи неверно, соответственно, полный балл за решение получат участники, построившие контрпример.

Один из возможных примеров строится так: Рассмотрим множество из $k+1$ города $M_1$, соединим в нём все города со всеми, кроме каких-то городов $A_1$ и $B_1$. Рассмотрим ещё одно множество из $k+1$ города $M_2$, соединим в нём все города со всеми, кроме каких-то городов $A_2$ и $B_2$.

Среди оставшихся $2k-1$ городов (множество $M_3$) соединим каждый город ровно с $k$ следующим образом: расставим города по кругу и соединим каждый из них с $\frac{k}{2}$ идущими по кругу после него по часовой стрелке и $\frac{k}{2}$ идущими до. Это можно сделать, так как во всех наших вариантах $k+1$ чётно.

Затем разрушим какие-то две дороги в этом множестве, не имеющим общего конца, и соединим четыре города, являющиеся их концами с городами $A_1$, $B_1$, $A_2$ и $B_2$. Получится картинка, в которой от любого города можно добраться до любого. При этом от города $C_1$ из $M_1$ города до города $C_2$ из $M_2$, нельзя добраться менее, чем по пяти дорогам.

Действительно, из $M_1$ в $M_2$ мы можем попасть только через $M_3$. Для этого из $C_1$ мы должны попасть в $A_1$ или $B_1$, затем из него в какой-то из городов множества $M_3$. С другой стороны, чтобы попасть в $C_2$ мы должны из $M_3$ попасть в $A_2$ или $B_2$, а затем оттуда в $C_2$. Это уже четыре дороги. При этом, множество $M_3$ устроены так, что в нём нет общих соседей у $A_1$, $B_1$, $A_2$ и $B_2$, значит, нам нужна ещё одна дорога внутри этого множества.

**Задача 7. (3 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

$P(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2} + 2x + 1$. Пусть $x_0$ — наименьшее положительное число, такое что $[P(x_0)] \neq P([x_0])$. Найдите $P(x_0)$.

Квадратные скобки обозначают целую часть числа.

*Ответ:* 4

*Решение:*

Заметим, что наш многочлен возрастает. Это можно доказать, например, посчитав его производную и убедившись, что она неотрицательна.

Однако, мы докажем это не используя производную. Нам достаточно сделать это для положительных $x$.

Рассмотрим выражение $P(x) - P(y) = \frac{x-y}{2} \cdot (x^2 + y^2 + xy + 4 - 3x - 3y)$, где $x > y$. Нам надо доказать, что выражение в скобках положительно, тогда мы докажем, что $P(x) > P(y)$.

Приравняв $x^2 + y^2 + xy + 4 - 3x - 3y = 0$, получим квадратное уравнение относительно $y$, с дискриминантом $D = (x-3)^2 - 4(x^2 - 3x + 4) = -3x^2 + 6x - 7 = -(x-3)^2 - 4 < 0$. Значит, $x^2 + y^2 + xy + 4 - 3x - 3y$ всегда одного знака, а именно положительно.

$P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 3$, $P(3) = 7$.

Так как многочлен возрастает, для всех $x$ между 0 и 1 выполняются неравенства $1 < P(x) < 2$, а значит, для этих $x$ $[P(x)] = P([x])$. Аналогично для $x$ между 1 и 2. А вот на промежутке $(2; 3)$ многочлен $P(x)$ принимает в том числе значение 4 в какой-то точке, при этом для всех $x$ из этого промежутка $P([x]) = 3$.

**Задача 8. (5 баллов)** (Приведен один из вариантов задания)

12 человек пришли на представление в шляпах. Фокусник поменял местами их шляпы. Затем он велел каждому из присутствующих найти свою шляпу и запомнить того, у кого она оказалась. Каждую минуту каждый участник должен был передавать находящуюся у него шляпу человеку, которого он запомнил (всё время одному и тому же).

В какой-то момент все шляпы одновременно вернулись к своим исходным владельцам. Через какое наибольшее число минут это могло произойти в первый раз?

(Некоторые шляпы могли возвращаться к своим хозяевам и ранее искомого момента, но не все сразу. В этом случае процесс продолжался, и шляпы снова покидали своих хозяев).

*Ответ:* 59

*Решение:*

Рассмотрим некоторого человека, назовём его $A_0$. Пусть его шляпа изначально оказалась у какого-то $A_1$, шляпа $A_1$ оказалась у $A_2$, и т.д. Рассмотренный нами процесс нумерации рано или поздно закончится тем, что для какого-то $A_{n-1}$ его шляпа окажется у какого-то $A_k$, который был уже нами пронумерован ранее. При этом это может быть только $A_0$, т.к. про всех остальных мы уже знаем, откуда взялись находящиеся у них шляпы.

Значит, шляпа $A_{n-1}$ в начале представления оказалась у $A_0$ и мы получили так называемый цикл из $n$ человек. Каждый раз каждый из участников передаёт свою шляпу следующему по циклу. Таким образом, шляпы в этом цикле вернутся к своим хозяевам через $n-1$ минуту, затем через каждые следующие $n$ минут.

Таких циклов может быть несколько. Тогда если все шляпы вернутся к своим хозяевам через $t$ минут, число $t+1$ должно делиться на длины всех этих циклов. Таким образом, нам нужно разложить число 12 в сумму нескольких слагаемых так, чтобы их наименьшее общее кратное было максимально.

Нужное разложение: $12 = 5+4+3$, НОК этих чисел 60, значит, шляпы вернутся к своим хозяевам через 59 минут.

Если все слагаемые являются делителями числа 24, то их НОК не больше 24. Значит, для большего НОК нужно хотя бы одно число, не являющееся делителем 24, то есть 5, 7, 9, 10 или 11. Варианты, в которых все слагаемые, кроме одного, равны единице, нам очевидно не нужны. Переберём оставшиеся варианты для слагаемых, больших 5:

$10+2$, НОК=10

$9+3$, НОК=9

$9+2+1$, НОК=18

$7+5$, НОК=35. Для вариантов $7+4+1$ и $7+3+1+1$ НОК очевидно ещё меньше.

$7+3+2$. НОК=42.

Осталось рассмотреть варианты с 5. Если все остальные делители не больше 6, НОК не больше, чем 60, а вариант с 7 мы уже разобрали.

Значит, ответ $t = 59$.

## 1.3 Задания для 9 класса

**Задача 1. (2 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

Даны две параболы со старшим коэффициентом 1 и вершинами в точках $(1;1)$ и $(4;4)$. В какой точке находится вершина параболы со старшим коэффициентом $-1$, проходящей через эти две точки.

*Ответ:* $(3;5)$

*Решение 1:*

Докажем лемму: если парабола со старшим коэффициентом 1 и вершиной в точке $(a,b)$ проходит через точку $(x,y)$, то парабола со старшим коэффициентом $-1$ и вершиной в точке $(x,y)$ проходит через точку $(a,b)$.

Действительно, первое условие означает, что $y-b=(x-a)^2$, а второе — что $b-y=-(a-x)^2$. Эти равенства, очевидно, равносильны.

Значит, вершина искомой параболы — точка пересечения двух исходных парабол. Составим уравнение: $(x-1)^2+1=y=(x-4)^2+4$, откуда $x=3$, $y=5$.

*Решение 2:*

Вместо этого можно было решить задачу методом неопределённых коэффициентов: пусть искомая парабола имеет уравнение $y=-x^2+bx+c$. Подставим $x=1$ и $x=4$ и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1=-1^2+b\cdot 1+c \\ 4=-4^2+b\cdot 4+c \end{cases}$$

Решив её получаем $b=6$, $c=-4$, т.е. уравнение $y=-x^2+6x-4=-(x-3)^2+5$, откуда вершина $(3;5)$.

**Задача 2. (3 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

Натуральные делители натурального числа $n$ занумеровали по возрастанию: $d_1=1$, $d_2$, …, $d_k=n$. Оказалось, что $d_{10}=196$. Какое наименьшее значение может принимать число $n$?

*Ответ:* $19796 = 196\cdot 101$

*Решение:*

У числа $196 = 2^2 \cdot 7^2$ девять делителей и все они являются делителями числа $n$. Если $n$ делится на $2^3$, то к этим делителям добавляются ещё числа 8 и 56, то есть 196 — это уже как минимум одиннадцатый делитель.

Добавление к простым множителям ещё одной семёрки добавляет ещё три делителя, но все они не меньше, чем $7^3 = 343$, то есть, вне зависимости от того, делится ли $n$ на 7 или нет, нужен хотя бы один простой множитель, не больший 196 и взаимно простой с ним. Пусть этот множитель $p$, тогда вместе с делителем $p$ добавляется ещё делитель $2p$. При этом должно выполняться неравенство $2p > 196$, иначе 196 оказывается как минимум одиннадцатым делителем $n$.

Наименьшее такое $p = 101$, откуда получаем наименьшее $n = 196 \cdot 101 = 19796$.

**Задача 3. (3 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

В клетчатой полоске $1 \times n$ некоторые клетки закрашены, а некоторые — нет. При этом среди любых четырёх подряд идущих клеток не более одной закрашенной, а среди любых семи подряд идущих — не менее двух закрашенных. При каком наибольшем $n$ это возможно?

*Ответ:* 9

*Решение:*

Решение этой задачи состоит из двух частей: примера для 9 клеток и оценки, т.е. доказательства того, что больше 9 быть не может.

*Пример:*

9 клеток, среди которых закрашены третья и седьмая. Есть лишь три способа выбрать семь подряд идущих клеток, и две закрашенные в любом случае будут среди них. С другой стороны, любая четвёрка подряд идущих клеток содержит ровно одну закрашенную.

*Оценка:*

Рассмотрим любые 8 подряд идущих клеток. Среди них не более двух закрашенных. С другой стороны, среди первых 7 из них не менее двух закрашенных. Значит, среди первых 7 ровно две закрашенных, а последняя из выбранных нами 8 клеток не закрашена. То есть, если слева от какой-либо клетки есть ещё 7, то она точно не закрашена. Аналогично для клетки, справа от которой есть ещё 7 других.

Пусть у нас есть хотя бы 10 клеток. Рассмотрим 10 из них, забыв про остальные. Среди них хотя бы две закрашенных клетки. При этом первые три и последние три не закрашены, согласно предыдущему абзацу, а среди оставшихся четырёх не более одной закрашенной. Получаем противоречие.

**Задача 4. (3 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

Дан треугольник $ABC$. $D$ — точка пересечения биссектрисы угла $\angle B$ и описанной окружности треугольника. Точка $E$ такова, что $D$ — середина $CE$. Оказалось, что $CD = 10$, $AC = 16$. Найдите $AE$.

*Ответ:* 12

*Решение:*

Равные дуги отсекаются равными хордами, поэтому $AD = CD = 10$. С другой стороны, $CD = DE$. Значит, в треугольнике $ACE$ медиана $AD$ равна половине стороны $CE$, то есть этот треугольник прямоугольный с гипотенузой $CE$. Отсюда по теореме Пифагора получаем $AE = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$.

**Задача 5. (3 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что НОД$(a,b)$НОД$(a,c)$НОД$(b,c) = 500$.

Найдите наименьшее возможное произведение $abc$.

*Ответ:* $2^4 \cdot 5^3 = 2000$

*Решение:*

Если какой-то простой делитель входит только в одно из чисел $a$, $b$, $c$, то он никак не влияет на произведение наибольших общий делителей. Если он входит в два из этих чисел, то он входит в НОД этих чисел и не входит в два остальных НОД. Если же какой-то простой делитель во все три числа $a$, $b$, $c$, то он входит во все три НОД.

Если произведение наших НОД равно 500, среди чисел $a$, $b$, $c$ есть как минимум два числа, кратных 2 и два числа, кратных 5. При этом все три числа не могут быть кратны 2, иначе произведение НОД делилось бы на $2^3$. Значит, один из НОД делится на $2^2 = 4$, то есть два исходных числа кратны 4, то есть $abc$ делится на $(2^2)^2 = 16$.

Что касается множителя 5, то либо он входит во все три числа минимум в первой степени, либо входит в один из НОД хотя бы во второй степени. В первом случаем мы получаем, что $abc$ делится на $5^3$, во втором, аналогично предыдущему абзацу, $abc$ делится на $5^4$.

Таким образом, $abc$ точно делится на $2^4 \cdot 5^3$.

Пример очевидно следует из оценки: $a = b = 20$, $c = 5$.

**Задача 6. (3 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

Даны три числа $a$, $b$, $c$ большие 2. Докажите неравенство:

$$a + b + c \geqslant 6 + 9 \cdot \frac{abc - 2ab - 2ac - 2bc + 4a + 4b + 4c - 8}{ab + ac + bc - 4a - 4b - 4c + 12}$$

*Доказательство:*

Требуемое неравенство эквивалентно следующему:

$$(a-2) + (b-2) + (c-2) \geqslant 9 \cdot \frac{(a-2)(b-2)(c-2)}{(a-2)(b-2) + (a-2)(c-2) + (b-2)(c-2)}.$$

Заменим $a - 2 = x$, $b - 2 = y$, $c - 2 = z$ и получим, что нам надо доказать неравенство

$$x + y + z \geqslant 9 \cdot \frac{xyz}{xy + xz + yz} = \frac{9}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}},$$

что эквивалентно неравенству о среднем арифметическом и среднем гармоническом для трёх чисел:

$$\frac{x + y + z}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}.$$

**Задача 7. (4 балла)** (Условие и решение в общем виде)

$ABCD$ — описанная трапеция. Лучи $BA$ и $CD$ пересекаются в точке $K$. Периметр треугольника $KAD$ равен $2p$. $BC = l$. Найдите $AD$.

*Ответ:* $\dfrac{pl}{p+l}$

*Решение:*

Лучи $BA$ и $CD$ пересекаются в точке $K$, это значит, что $BA$ и $CD$ — боковые стороны, $AD$ — меньшее основание, а $BC$ — большее. Вписанная окружность трапеции является одновременно вписанной окружностью треугольника $BCK$ и вневписанной окружностью треугольника $ADK$.

В подобных треугольниках соответствующие элементы относятся как коэффициент подобия. В частности, это верно для отрезков касательных, проведённых к вписанным окружностям из точки $K$. В большом треугольнике $BCK$ эти отрезки (так как вписанная окружность трапеции является вневписанной окружностью треугольника $ADK$) равны $p$.

В треугольнике $ADK$ эти отрезки равны $p-a$, где $a=BC$. Коэффициент подобия равен $\frac{a}{l}$, откуда $\frac{a}{l}=\frac{p-a}{p}$.

Преобразуя это равенство получаем $ap=pl-al$, откуда $ap+al=pl$ и затем $\frac{pl}{p+l}$.

Таблица с данными и ответами:

| Вар. | $BC=l$ | $2p$ | $p$ | Ответ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 170 | 238 | 119 | 70 |
| 2 | 260 | 280 | 140 | 91 |
| 3 | 220 | 360 | 180 | 99 |
| 4 | 400 | 450 | 225 | 144 |

**Задача 8. (4 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

На доске было написано слово. Вася стёр у этого слова одну букву, после чего количество способов переставить в слове буквы уменьшилось ровно в 10 раз. Сколько букв было в изначальном слове? В письменном решении укажите все варианты ответа, в систему введите наименьший из них.

Под «количеством способов переставить буквы» мы понимаем все возможные перестановки букв в этом слове, включая само слово. Например, для слова МАМА мы получим 6 способов: ААММ, АМАМ, АММА, МААМ, МАМА, ММАА.

*Ответ:* Все числа, кратные 10.

*Решение:*

Пусть Вася стёр букву А. Пусть в изначальном слове было $x$ букв А и $y$ оставшихся букв. Выбрать в слове из $x+y$ букв $x$ позиций, на которых будет стоять буква А, можно $\frac{(x+y)!}{x!y!}$ способами. После этого необходимо расставить на оставшиеся $y$ позиций остальные буквы. Не зная, сколько среди остальных букв одинаковых, мы не можем точно узнать число способов это сделать, однако это количество зависит только от набора этих $y$ букв и не зависит от расположения этих букв относительно букв А. То есть, это количество всегда одно и тоже. Обозначим его за $C$. Тогда общее количество перестановок букв исходного слова составляет $\frac{C(x+y)!}{x!y!}$.

После стирания одной буквы А количество этих букв превратилось в $x-1$. Аналогично исходному слову, мы можем посчитать общее количество перестановок: $\frac{C(x+y-1)!}{(x-1)!y!}$. Поделив первое выражение на второе, мы получим $\frac{x+y}{x}$, все остальные множители сократятся. Значит, надо найти такие целые неотрицательные $x$ и $y$, что $\frac{x+y}{x}=10$.

Преобразуя это равенство, получаем $x+y=10x$, откуда $y=9x$. Значит, написав слово из $x$ букв А и $9x$ любых других букв, мы получим нужный результат. Общее количество букв в слове при этом будет составлять $10x$ для какого-то $x$.

## 1.4 Задания для 8 класса

**Задача 1. (2 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

Петя написал на доске все возможные приведённые квадратные уравнения, каждое из которых имеет два натуральных корня от 1 до 100 включительно. Затем он выписал все возможные дискриминанты этих уравнений. Сколько различных дискриминантов у него получилось?

*Ответ:* 99

*Решение:*

Для приведённого квадратного уравнения $x^2+px+q$ корни ищутся по формуле $x_{1,2} = \dfrac{-p\pm\sqrt{D}}{2}$, где $D$ — дискриминант уравнения. Значит, разность между корнями (из большего вычесть меньший) составляет $\sqrt{D}$. Таким образом, количество различных дискриминантов равняется количеству различных возможных разностей между корнями, т.е. 99.

**Задача 2. (3 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

В прямоугольном треугольнике со сторонами 3, 4, и 5 провели высоту из вершины прямого угла. В получившихся двух треугольниках также провели высоты из прямого угла, и так далее. Так сделали 8 раз. В итоге исходный треугольник оказался разбит на 256 маленьких прямоугольных треугольников. Какое наибольшее число попарно неравных треугольников среди них можно выбрать?

*Ответ:* 9

*Решение:*

При проведении высоты из вершины прямого угла в прямоугольном треугольнике он разбивается на два подобных ему. При этом гипотенузы новых треугольников — это катеты старого, таким образом, новые треугольники подобны старому с коэффициентами $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$.

Так будет продолжаться на каждом шаге, поэтому 256 маленьких треугольников, образовавшихся в конце описанного в задаче процесса, подобны исходному. Коэффициенты подобия составляют все возможные произведения по 8 чисел $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$. Значит, эти коэффициенты имеют вид $\dfrac{3^8}{5^8}, \dfrac{3^7\cdot 4}{5^8}, \ldots, \dfrac{3\cdot 4^7}{5^8}, \dfrac{4^8}{5^8}$. Всего таких чисел 9.

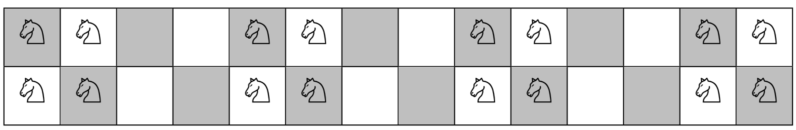
**Задача 3. (3 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

Какое наибольшее количество шахматных коней можно поставить на клетчатой доске $2\times 14$ так, чтобы они не били друг друга?

*Ответ:* 16

*Решение:* Решение этой задачи состоит из двух частей: примера для 16 коней и оценки, т.е. доказательства того, что больше 16 быть не может.

*Пример:*



*Оценка:*

В прямоугольнике $2\times 4$ не может стоять больше четырёх коней, так как клетки этого прямоугольника разбиваются на четыре пары, в каждой из которых можно поставить только одного коня. На рисунке клетки одной пары помечены одинаковыми цифрами:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |

Доска $2\times 14$ разбивается на 3 прямоугольника $2\times 4$, в каждый из которых мы можем поместить не больше четырёх коней, и квадрат $2\times 2$, в который можно поставить ещё четырех. Итого получаем не более $4\times 4 = 16$ коней.

**Задача 4. (3 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

В трапеции $ABCD$ биссектрисы углов $\angle B$ и $\angle C$ пересекаются на основании $AD$. $AB = 8$, $CD = 10$. Найдите периметр трапеции.

*Ответ:* 45

*Решение:*

Обозначим точку пересечения указанных биссектрис за $E$. $\angle CBE = \angle ABE$ т.к. $BE$ биссектриса, $\angle CBE = \angle AEB$ как накрест лежащие, следовательно $\angle AEB = \angle ABE$. Значит, треугольник $ABE$ равнобедренный и $AE = AB$. Аналогично $DE = CD$, откуда $AD = AE + DE = AB + CD = 18$, а $BC = AD/2 = 9$.

Соответственно, периметр равен $AB + BC + CD + AD = 8 + 9 + 10 + 18 = 45$.

**Задача 5. (3 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

Натуральное число называется свободным от квадратов, если оно не делится ни на какой квадрат натурального числа, кроме 1. Существует ли такая тройка свободных от квадратов чисел $a$, $b$, $c$ что

НОД$(a, b)$НОД$(a, c)$НОД$(b, c) = 500$?

*Ответ:* Нет.

*Решение:*

Если какой-то простой делитель входит только в одно из чисел $a$, $b$, $c$, то он никак не влияет на произведение наибольших общий делителей. Если он входит в два из этих чисел, то он входит в НОД этих чисел и не входит в два остальных НОД. Если же какой-то простой делитель во все три числа $a$, $b$, $c$, то он входит во все три НОД, а в произведение трёх НОД входит как минимум в третьей степени.

Значит, единственный вариант, при котором простой делитель может входить в произведение НОД в точности во второй степени, это вариант, при котором два из трёх чисел $a$, $b$, $c$ делятся на этот простой делитель в квадрате.

Число 500 делится на $2^2$, но не делится на $2^3$, поэтому такой свободной от квадратов тройки чисел не существует.

**Задача 6. (3 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

В классе учатся 20 человек, которые делятся на рыцарей, всегда говорящих правду, и лжецов, которые всегда лгут. У каждого из них ровно по три друга среди одноклассников. Каждый сказал: «Все мои друзья-одноклассники — лжецы». Какое наименьшее и наибольшее количество рыцарей может учиться в этом классе?

Введите эти два числа в любом порядке через запятую.

*Ответ:* Наименьшее число 5, наибольшее — 10.

*Решение:*

Очевидно, что ситуации, в которых все одноклассники — рыцари, или все — лжецы нам не подходят

Обозначим число рыцарей за $R$, число лжецов за $L$, количество пар из дружащих между собой рыцаря и лжеца за $P$ (назовём такие пары «интересными».

Каждый рыцарь сказал, что все его друзья — лжецы, поэтому они действительно лжецы. Значит, у каждого рыцаря все друзья — лжецы, причём их ровно трое. Отсюда следует, что каждый рыцарь участвует ровно в трёх интересных парах и $P = 3R$.

С другой стороны, каждый лжец, чтобы солгать, должен иметь хотя бы одного друга-рыцаря. Значит, $L \leqslant P$. В то же время каждый лжец не может состоять более чем в трёх интересных парах, поэтому $3L \geqslant P$. Из первого неравенства получаем, что $L \leqslant 3R$, а из второго — что $L \geqslant R$. Учитывая, что общее количество ребят равно 20, мы получаем, что $5 \leqslant L \leqslant 10$.

Оба варианта возможны. Наименьшее значение достигается, например, когда ребята разбиты на четвёрки из одного рыцаря и трёх лжецов. Наибольшее значение достигается, если занумеровать рыцарей и лжецов числами от 1 до 10 и заставить дружить каждого рыцаря с лжецом с тем же самым номером, а также с двумя соседними номерами (1 и 10 мы здесь считаем соседними).

**Задача 7. (3 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

Три натуральных числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $a+b+c=31$ и $ab+ac+bc=320$. Найдите $abc$.

*Ответ:* 1100

*Решение:*

Заметим, что $961=31^2=(a+b+c)^2=a^2+b^+c^2-2(ab+ac+b)=a^2+b^2+c^2+640$, откуда $a^2+b^2+c^2=321$.

Запишем теперь разность $2=2(321-320)=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$. Если три целочисленных квадрата в сумме дают 2, значит, два из этих квадратов равны 1, а третий равен 0. Значит, среди чисел $a$, $b$, $c$ два равны, а третье отличается на единицу.

Легко понять, что под это условие подходят числа 10, 10 и 11. Их произведение равно 1100.

**Задача 8. (4 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

Петя и Вася играют в игру, первым ходит Петя. За один ход разрешается заменить написанное на доске число на любое меньшее нечётное натуральное число, взаимно простое с написанным. Проигрывает тот, кто будет вынужден написать единицу.

Изначально на доске написано нечётное число от 3 до 2023. Для какого количества таких чисел у Пети есть выигрышная стратегия?

*Ответ:* 674

*Решение:*

Заметим, что если число не делится на три, Петя может легко выиграть первым же ходом, заменив написанное на доске число на тройку. У Васи после этого не будет другого выхода, кроме как написать единицу.

Если же изначальное число делится на три, Петя своим ходом может написать только число, не кратное трём. В этом случае Вася всегда сможет написать тройку, и Петя проиграет.

Значит, Пете подходят все числа, не делящиеся на три. Среди нечётных чисел от 3 до 2023 их $\frac{2}{2}\cdot 1011=674$.

## 1.5 Задания для 5-7 классов

**Задача 1. (2 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

Велосипедист проехал первую половину пути с некоторой скоростью, а затем увеличил скорость на 25%. На сколько процентов из-за этого уменьшилось общее время поездки, по сравнению с запланированным?

*Ответ:* На 10 процентов.

*Решение:*

Пусть весь путь составляет $S$, а изначальная скорость $v$. Тогда первую часть пути велосипедист преодолел за время $\frac{S}{2v}$, а вторую за время $\frac{S}{2\cdot 1,25v}=\frac{0,4}{v}$. В сумме получается $0,9\cdot\frac{S}{v}$, что составляет 90% от запланированного.

**Задача 2. (2 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

Найдите наименьшее четырёхзначное натуральное число такое, что какую бы мы ни вычеркнули из него цифру, получится число, кратное 3.

*Ответ:* 1111

*Решение:*

Раз при зачёркивании любой цифры получается число кратное трём, все цифры искомого числа должны давать один и тот же остаток при делении на 3. Наименьшее такое число 1111 (число 0000 не подходит, так как не является натуральным).

**Задача 3. (3 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

Дан квадрат $A_1B_1C_1D_1$. Точки $A_2$, $A_3$, $A_4$ делят сторону $A_1B_1$ на 4 равные части; точки $B_2$, $B_3$, $B_4$ делят сторону $B_1C_1$ на 4 равные части; точки $C_2$, $C_3$, $C_4$ делят сторону $C_1D_1$ на 4 равные части; точки $D_2$, $D_3$, $D_4$ делят сторону $D_1A_1$ на 4 равные части. Точки, обозначенные одной буквой, расположены в порядке возрастания номеров.

Найдите сумму углов $\angle B_1A_1B_2 + \angle C_2B_1C_3 + \angle D_3C_1D_4 + \angle A_4D_1B_1$ (в градусах).

*Ответ:* 45 градусов

*Решение:*

Треугольники $B_1A_1B_2$, ${}_1B_{12}$, $D_1C_1D_2$, $A_1D_1A_2$ равны по первому признаку или по признаку равенства прямоугольных треугольников по двум катетам. Из этих треугольников мы можем получить равные элементы в треугольниках $B_2A_1B_3$, $C_2B_1C_3$, $D_2C_1D_3$, $A_2D_1A_3$ и доказать их равенство по первому признаку, затем аналогично доказать равенство треугольников $B_3A_1B_4$, $C_3B_1C_4$, $D_3C_1D_4$, $A_3D_1A_4$ и, наконец равенство треугольников $B_4A_1C_1$, $C_4B_1D_1$, $D_4C_1A_1$, $A_4D_1B_1$.

Следовательно $\angle B_1A_1B_2 + \angle C_2B_1C_3 + \angle D_3C_1D_4 + \angle A_4D_1B_1 = \angle B_1A_1B_2 + \angle B_2A_1B_3 + \angle B_3A_1B_4 + \angle B_4A_1C_1$, то есть половине прямого угла.

**Задача 4. (3 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

Пусть $a$ и $b$ — два различных натуральных числа, больших 50. Какое наименьшее значение может принимать их наименьшее общее кратное?

*Ответ:* 102

*Решение:*

Наименьшее из двух чисел хотя бы 51. НОК должно делиться на него и при это не может быть равно ему, то есть хотя бы в два раза больше.

Пара $(51, 102)$ подходит под условие.

**Задача 5. (3 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

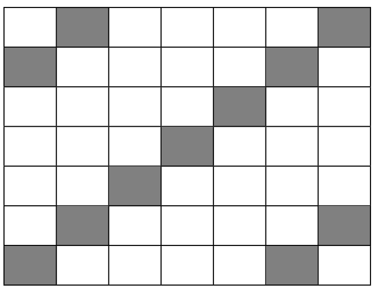
Каким наименьшим количеством полосок $1 \times 5$ и $5 \times 1$ можно покрыть квадрат $7 \times 7$ (полоски могут накладываться друг на друга и выходить за пределы квадрата).

*Ответ:* 11

*Решение:*

Квадрат $7 \times 7$ можно разбить на прямоугольники $5 \times 7$ и $2 \times 7$. Первый, очевидно, можно покрыть семью вертикальными полосками, а второй — четырьмя горизонтальными, итого 11.

Для доказательства минимальности рассмотрим следующую раскраску:



Заметим, что две серые клетки не могут лежать в одной полоске $1 \times 5$ или $5 \times 1$. Серых клеток 11, значит полосок не может быть меньше 11.

**Задача 6. (4 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

В классе учатся 32 человека, которые делятся на рыцарей, всегда говорящих правду, и лжецов, которые всегда лгут. У каждого из них ровно по три друга среди одноклассников. Каждый сказал: «Среди моих друзей-одноклассников есть лжец». Какое наименьшее и наибольшее количество рыцарей может учиться в этом классе?

*Ответ:* Наименьшее число 16, наибольшее — 24.

*Решение:*

Очевидно, что ситуации, в которых все одноклассники — рыцари, или все — лжецы нам не подходят.

Обозначим число рыцарей за $R$, число лжецов за $L$, количество пар из дружащих между собой рыцаря и лжеца за $P$ (назовём такие пары «интересными»).

Каждый лжец сказал, что среди его друзей есть лжец, значит на самом деле все его друзья рыцари, причём их ровно трое. Отсюда следует, что каждый лжец участвует ровно в трёх интересных парах и $P = 3L$.

С другой стороны, каждый рыцарь, чтобы сказать правду, должен иметь хотя бы одного друга-рыцаря. Значит, $R \leqslant P$. В то же время каждый рыцарь не может состоять более чем в трёх интересных парах, поэтому $3R \geqslant P$. Из первого неравенства получаем, что $R \leqslant 3L$, а из второго — что $R \geqslant L$. Учитывая, что общее количество ребят равно 32, мы получаем, что $16 \leqslant R \leqslant 24$.

Оба варианта возможны. Наибольшее значение достигается, например, когда ребята разбиты на четвёрки из одного лжеца и трёх рыцарей. Наименьшее значение достигается, если занумеровать рыцарей и лжецов числами от 1 до 16 и заставить дружить каждого рыцаря с лжецом с тем же самым номером, а также с двумя соседними номерами (1 и 16 мы здесь считаем соседними).

**Задача 7. (4 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

Циферблат «тикающих» часов со стрелкой разбит на 60 делений по $6^\circ$ каждое. Стрелки не движутся непрерывно: минутная стрелка раз в минуту смещается на одно деление, часовая — раз в 12 минут. Прошло 12 часов. В течение какого количества минут за это время между стрелками был угол ровно $90^\circ$ (не важно в каком направлении).

*Ответ:* 24

*Решение:* Заметим, что если бы стрелки всё-таки двигались непрерывно, часовая стрелка сделала бы ровно 1 оборот, а минутная — 12, то есть относительно друг друга стрелки прошли бы все возможные положения ровно по 11 раз. Это дало бы нам 22 раза указанный угол между стрелками (11 раз по два раза в каждую сторону).

Однако из-за дискретности нашего процесса возникает следующий эффект: некоторые углы между стрелками могут сохраняться не одну минуту, а две, если стрелки, находящиеся под нужным углом друг к другу, движутся одновременно.

Из-за правил движения часовой стрелки, это может происходить только если число минут становится кратно 12. Рассмотрим все пять возможных вариантов:

0 минут: 90 градусов от этого положения для часовой стрелки означают 3 часа или 9 часов ровно. Оба эти варианта нам подходят.

12 минут: (т.е. 12 делений от «нулевого» положения) 90 градусов (15 делений) от этого положения для часовой стрелки означают 27-ое или 57-ое деления на циферблате, то есть от 5:24 и 11:24. Оба эти варианта нам не подходят.

24 минуты: 15 делений от этого положения для часовой стрелки означают 9-ое или 39-ое деления на циферблате, то есть от 1:48 и 7:48. Оба эти варианта нам не подходят.

36 минут: 15 делений от этого положения для часовой стрелки означают 21-ое или 51-ое деления на циферблате, то есть от 4:12 и 10:12. Оба эти варианта нам не подходят.

48 минут: 15 делений от этого положения для часовой стрелки означают третье или тридцать третье деления на циферблате, то есть от 0:36 и 6:36. Оба эти варианта нам также не подходят.

Значит, мы получаем нужный угол 20 раз по одной минуте и два раза по две минуты, то есть в сумме 24 минуты.

Вместо перебора остатков можно заметить, что если часовая стрелка прошла $x$ делений, то минутная прошла $12x$, разница между ними составляет $11x$. Эта разница должна представлять несколько полных оборотов плюс или минус 15 делений, то есть $11x = 60y \pm 15$. Для каждого из двух знаков из этого уравнения $x$ можно однозначно найти с точностью до остатка деления на 60, то есть мы получаем ровно два решения.

**Задача 8. (4 балла)** (Приведен один из вариантов задания)

У Васи есть девять палочек, по три каждого цвета: синего, красного и белого. Длины этих палочек — попарно различные натуральные числа. Из любых трёх одноцветных палочек можно составить треугольник, как и из любых трёх палочек разных цветов.

Какое наименьшее значение может принимать длина самой короткой палочки?

*Ответ:* 5

*Решение:*

Рассмотрим самую короткую палочку. Пусть она белая и имеет длину $x$. Выпишем длины палочек остальных двух цветов в порядке возрастания: $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$. Если палочки $a$ и $f$ разного цвета, из $a$, $f$ и $x$ можно составить треугольник, то есть, по неравенству треугольника $x > f - a \geqslant 5$, значит $x$ хотя бы 6.

Если же $a$ и $f$ одного цвета, то хотя бы одна из палочек $b$ и $e$ другого цвета. Обе разности $e - a$ и $f - b$ не меньше 4, значит $x \geqslant 5$.

Из этих соображений можно построить пример: белые палочки 5, 12, 13; красные 6, 7, 11; синие 8, 9, 10. Для проверки корректности этого примера достаточно убедится, что $13 < 5 + 12$, $11 < 7 + 6$, $10 < 8 + 9$ для треугольников одного цвета, а также для треугольников разного цвета проверить, что $10 < 5 + 6$, $13 < 6 + 8$, $11 < 5 + 8$ (здесь мы каждый раз берём наибольшую палочку одного цвета и наименьшие двух других цветов).

# 2 Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады

## 2.1 Задания для 11 класса

(приведен один из вариантов заданий)

**Задача 1. (2 балла)**

Найдите площадь области, ограниченной графиками функций $\dfrac{2\sin x}{\pi}$ и $\dfrac{11 + 2\cos\left(x + \sqrt{2}\right)}{\pi}$, осью ординат и прямой $x = 12\pi$.

Ответ: 132

**Задача 2. (2 балла)**

Область определения функции $f(x) = \sqrt{3 - x} + \arcsin\left(\dfrac{x}{4}\right) + \sqrt{6 + x}$ представляет из себя отрезок. Найдите его длину.

Ответ: 7

**Задача 3. (2 балла)**

Найдите наименьшее значение выражения

$$4x + 4\sqrt{x}y + 4y^2 + 18y.$$

Ответ: -27

**Задача 4. (3 балла)**

Высоты остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. Известно, что $HA = 119$, $HB = HC = 65$. Какое наибольшее значение может принимать площадь треугольника?

Ответ: 8640

**Задача 5. (3 балла)**

В клетчатой табличке $11 \times 11$ расставлены натуральные числа, никакие два из которых не равны друг другу. При этом в каждой строке есть число, равное сумме остальных чисел в этой строке, а в каждом столбце есть число, равное сумме остальных чисел в этом столбце. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех чисел в таблице?

Ответ: 12210

**Задача 6. (3 балла)**

Назовём натуральное число $n$ *хорошим*, если для него найдётся такое простое $p$, что $n$ делится на $p^5$, но не делится на $p^6$. Остальные натуральные числа назовём *плохими*. Какое наибольшее число плохих чисел может идти подряд?

Ответ: 63

**Задача 7. (3 балла)**

Последовательность задана условиями $a_0 = 1000$, $a_1 = 2000$, $a_n = \dfrac{5a_{n-1} + 6a_0}{11}$. Найдите целую часть $a_{1000}$.

Ответ: 1000

**Задача 8. (4 балла)**

В некоторой стране 100 городов. Некоторые из них соединены дорогами. Любые шесть городов можно занумеровать числами от 1 до 6 так, чтобы первый город оказался соединён со вторым, третий — с четвёртым, а пятый — с шестым. Какое наименьшее число дорог может быть в стране?

Ответ: 4750

**Задача 9. (4 балла)**

Высоты тетраэдра $ABCD$ пересекаются в одной точке. $AC = 5$, $BD = 9$. Найдите $\left(\vec{AB} + \vec{CD}\right) \cdot \left(\vec{BC} + \vec{DA}\right)$.

Ответ: -106

**Задача 10. (4 балла)**

Окружность с центром в точке $O$, построенная на диагонали $BD$ трапеции $ABCD$ как на диаметре, касается боковой стороны $AB$ и пересекает противоположную боковую сторону $CD$ в её середине $M$. $AB = 105$, $AD = 175$. Найдите площадь треугольника $OMD$.

Ответ: 1470

## 2.2 Задания для 10 класса

(приведен один из вариантов заданий)

**Задача 1. (2 балла)**

Окружность с центром в точке $O$, построенная на диагонали $BD$ трапеции $ABCD$ как на диаметре, касается боковой стороны $AD$ и пересекает противоположную боковую сторону $BC$ в её середине $M$. $AB = 175$, $AD = 105$. Найдите длину $CD$.

Ответ: 140

**Задача 2. (2 балла)**

Многочлен $P(x)+Q(x)$ имеет степень 15, а многочлен $P(x)-Q(x)$ — степень 17. Найдите степень многочлена $P(x) \cdot Q(x)$.

Ответ: 34

**Задача 3. (3 балла)**

Дан кубический многочлен $x^3 - 5x + 3$. Найдите сумму квадратов его корней.

Ответ: 10

**Задача 4. (3 балла)**

В геометрической прогрессии со знаменателем 8 первый член больше 1. Какое наибольшее число членов этой прогрессии подряд может начинаться НЕ на 1?

Ответ: 8

**Задача 5. (3 балла)**

Функция $f(x)$ такова, что $f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{1}{x+y}\right)$. При этом $f(5) = 60$. Найдите $f(3)$.

Ответ: 100

**Задача 6. (3 балла)**

Пятиугольник $ABCDE$ описан вокруг окружности. $AB = 12$, $BC = 9$, $CD = 10$, $DE = 11$. Найдите наибольшее и наименьшее возможные целочисленные значения длины $AE$. В ответе укажите их через запятую в любом порядке.

Ответ: 5, 21

**Задача 7. (3 балла)**

Делители числа 120 (включая единицу и само число) разделили на две равные (по количеству элементов) группы, одну из которых покрасили в красный цвет, а вторую — в синий. Оказалось, что красные числа делятся только на красные. Какое наибольшее значение может принимать сумма красных делителей?

Ответ: 90

**Задача 8. (3 балла)**

Ненулевой вектор с целочисленными координатами повернули на угол, тангенс которого составляет $\frac{5}{13}$. Получился другой вектор с целочисленными координатами. Найдите наименьшее возможное значение квадрата длины исходного вектора.

Ответ: 13

**Задача 9. (4 балла)**

Десять ребят водили хороводы из семи человек каждый. Оказалось, что любые двое держались за руки не больше одного раза. Какое наибольшее число хороводов могло быть?

Ответ: 5

**Задача 10. (4 балла)**

На плоскости нарисовали 12 прямых. Только в одной точке пересекаются больше двух из них.

Также отмечено некоторое количество точек. Оказалось, что на каждой прямой отмечено не менее 5 точек. Какое наименьшее число точек могло быть отмечено?

Ответ: 28

## 2.3 Задания для 9 класса

(приведен один из вариантов заданий)

**Задача 1. (2 балла)**

Многочлен $P(x)+Q(x)$ имеет степень 15, а многочлен $P(x)-Q(x)$ — степень 17. Найдите степень многочлена $P(x) \cdot Q(x)$.

Ответ: 34

**Задача 2. (2 балла)**

Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$, имеющий два корня. Известно, что $f(1) = 5$, $f(-1) = -7$. Найдите сумму корней трёхчлена.

Ответ: -6

**Задача 3. (2 балла)**

Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ пересекаются в точке $O$. Площадь треугольника $OBC$ составляет $\frac{16}{49}$ от площади трапеции. Какую часть от площади трапеции составляет площадь треугольника $OAD$?

Ответ запишите в виде несократимой правильной дроби.

Ответ: 9/49

**Задача 4. (2 балла)**

По круговой трассе с постоянными скоростями ездили три гоночные машины. Первая и вторая ехали по часовой стрелке, третья — против. Стартовали все три машины одновременно из одной точки, и финишировали там же, тоже одновременно (проехав, возможно, разное число кругов). Помимо этого, первая и третья машины встречались 20 раз, вторая и третья — 35 раз. Сколько раз вторая машина обгоняла первую? (Нахождение в одной точке в начальный и конечный моменты мы обгонами не считаем).

Ответ: 14

**Задача 5. (3 балла)**

Окружность с центром в точке $O$, построенная на диагонали $BD$ трапеции $ABCD$ как на диаметре, касается боковой стороны $AD$ и пересекает противоположную боковую сторону $BC$ в её середине $M$. $AB = 175$, $AD = 105$. Найдите длину $CD$.

Ответ: 140

**Задача 6. (3 балла)**

Натуральное число $n$ равно третьей степени суммы трёх своих наименьших делителей. Найдите все возможные значения $n$. Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 216

**Задача 7. (3 балла)**

Десять команд сыграли турнир по волейболу (ничьих в волейболе не бывает). Каждая сыграла с каждой по 6 раз. Места распределялись по количеству побед и для того, чтобы однозначно распределить золотые, серебряные и бронзовые медали количества побед оказалось достаточно. Какое наибольшее количество побед может быть у третьего места?

Ответ: 47

**Задача 8. (4 балла)**

Делители числа 120 (включая единицу и само число) разделили на две равные (по количеству элементов) группы, одну из которых покрасили в красный цвет, а вторую — в синий. Оказалось, что красные числа делятся только на красные. Какое наибольшее значение может принимать сумма красных делителей?

Ответ: 90

**Задача 9. (4 балла)**

Десять ребят водили хороводы из семи человек каждый. Оказалось, что любые двое держались за руки не больше одного раза. Какое наибольшее число хороводов могло быть?

Ответ: 5

**Задача 10. (5 балла)**

На плоскости нарисовали 12 прямых. Только в одной точке пересекаются больше двух из них.

Также отмечено некоторое количество точек. Оказалось, что на каждой прямой отмечено не менее 5 точек. Какое наименьшее число точек могло быть отмечено?

Ответ: 28

## 2.4 Задания для 8 класса

(приведен один из вариантов заданий)

**Задача 1. (2 балла)**

Длины сторон треугольника — однозначные числа, не обязательно различные. Из них составили трёхзначное число. Оказалось, что это число делится на 7. Какое наименьшее трёхзначное число это может быть?

Ответ: 133

**Задача 2. (2 балла)**

Из одной точки отложили пять лучей и измерили все возможные углы между ними. Оказалось, что среди этих углов четыре угла по $46^\circ$. Какое самое большое возможное значение может принимать угол между какими-то из этих лучей?

Ответ укажите в градусах. Угол между лучами, выходящими из одной точки, мы всегда считаем не больше $180^\circ$.

Ответ: 176

**Задача 3. (3 балла)**

Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ пересекаются в точке $O$. Площадь треугольника $OBC$ составляет $\frac{16}{49}$ от площади трапеции. Какую часть от площади трапеции составляет площадь треугольника $OAD$?

Ответ запишите в виде несократимой правильной дроби.

Ответ: 9/49

**Задача 4. (3 балла)**

По круговой трассе с постоянными скоростями ездили три гоночные машины. Первая и вторая ехали по часовой стрелке, третья — против. Стартовали все три машины одновременно из одной точки, и финишировали там же, тоже одновременно (проехав, возможно, разное число кругов). Помимо этого, первая и третья машины встречались 76 раз, вторая и третья — 99 раз. Сколько раз вторая машина обгоняла первую? (Нахождение в одной точке в начальный и конечный моменты мы обгонами не считаем).

Ответ: 22

**Задача 5. (3 балла)**

На плоскости нарисовали 12 прямых. Никакие две из них не пересекаются в одной точке.

Также отмечено некоторое количество точек. Оказалось, что на каждой прямой отмечено не менее 5 точек. Какое наименьшее число точек могло быть отмечено?

Ответ: 60

**Задача 6. (3 балла)**

Натуральное число $n$ равно третьей степени суммы трёх своих наименьших делителей. Найдите все возможные значения $n$. Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через запятую.

Ответ: 216

**Задача 7. (3 балла)**

Десять команд сыграли турнир по волейболу (ничьих в волейболе не бывает). Каждая сыграла с каждой по 6 раз. Места распределялись по количеству побед и для того, чтобы однозначно распределить золотые, серебряные и бронзовые медали количества побед оказалось достаточно. Какое наибольшее количество побед может быть у третьего места?

Ответ: 47

**Задача 8. (3 балла)**

На конгресс учителей приехали математики, физики и информатики. Утром на завтрак пришли только 15% математиков, 35% физиков и 42% информатиков, и на завтраке представителей всех специальностей оказалось поровну.

Сколько процентов от общего числа участников конгресса составили математики?

Ответ: 56

**Задача 9. (3 балла)**

Для каждой пары из чисел $a$, $b$, $c$ посчитали наименьшее общее кратное. Получились числа $120, 150$ и $200$.

Какое наименьшее значение может принимать число $abc$?

Ответ: 6000

**Задача 10. (5 балла)**

Десять ребят водили хороводы из семи человек каждый. Оказалось, что любые двое держались за руки не больше одного раза. Какое наибольшее число хороводов могло быть?

Ответ: 5

## 2.5 Задания для 5-7 классов

(приведен один из вариантов заданий)

**Задача 1. (2 балла)**

Длины сторон треугольника — однозначные числа, не обязательно различные. Из них составили трёхзначное число. Оказалось, что это число делится на 7. Какое наименьшее трёхзначное число это может быть?

Ответ: 133

**Задача 2. (2 балла)**

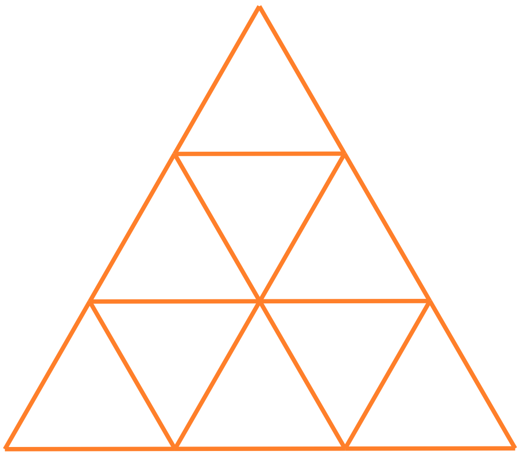
Прямоугольник разбит двумя прямыми на четыре прямоугольника поменьше. Площадь одной из частей составляет 14% от общей площади прямоугольника, а площадь другой части — 39%. Сколько процентов площади всего прямоугольника составляет большая из оставшихся частей, если известно, что это число целое?

Ответ: 26

**Задача 3. (3 балла)**

В каждом из девяти треугольников (см. рисунок) стоит либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них сказал: «среди моих соседей ровно два рыцаря». Сколько всего рыцарей на самом деле? Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через запятую.

Соседями считаются люди, стоящие в треугольниках, имеющих общую сторону.



Ответ: 0, 6

**Задача 4. (3 балла)**

Из одной точки отложили пять лучей и измерили все возможные углы между ними. Оказалось, что среди этих углов четыре угла по $46°$. Какое самое большое возможное значение может принимать угол между какими-то из этих лучей?

Ответ укажите в градусах. Угол между лучами, выходящими из одной точки, мы всегда считаем не больше $180°$.

Ответ: 176

**Задача 5. (3 балла)**

На плоскости нарисовали 12 прямых. Никакие две из них не пересекаются в одной точке.

Также отмечено некоторое количество точек. Оказалось, что на каждой прямой отмечено не менее 5 точек. Какое наименьшее число точек могло быть отмечено?

Ответ: 60

**Задача 6. (3 балла)**

В таблице $5 \times 5$ расставлены натуральные числа, любые два из которых различны. Клетки таблицы раскрашены в шахматном порядке. Оказалось, что сумма чисел на белых клетках равна сумме чисел на чёрных. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 326

**Задача 7. (3 балла)**

У Васи есть электронные часы, показывающее время от $0:00$ до $23:59$. Сколько минут в течение одних суток на них горят только чётные цифры?

Ответ: 105

**Задача 8. (3 балла)**

На конгресс учителей приехали математики, физики и информатики. Утром на завтрак пришли только 15% математиков, 35% физиков и 42% информатиков, и на завтраке представителей всех специальностей оказалось поровну.

Сколько процентов от общего числа участников конгресса составили математики?

Ответ: 56

**Задача 9. (3 балла)**

По круговой трассе с постоянными скоростями ездили три гоночные машины. Первая и вторая ехали по часовой стрелке, третья — против. Стартовали все три машины одновременно из одной точки, и финишировали там же, тоже одновременно (проехав, возможно, разное число кругов). Помимо этого, первая и третья машины встречались 20 раз, вторая и третья — 35 раз. Сколько раз вторая машина обгоняла первую? (Нахождение в одной точке в начальный и конечный моменты мы обгонами не считаем).

Ответ: 14

**Задача 10. (4 балла)**

Для каждой пары из чисел $a$, $b$, $c$ посчитали наименьшее общее кратное. Получились числа $120, 150$ и $200$.

Какое наименьшее значение может принимать число $abc$?

Ответ: 6000

# 3 Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады

## 3.1 Задания для 11 класса

(приведен один из вариантов заданий)

**Задача 1. (2 балла)**

Сколько решений, не превосходящих 3000, имеет уравнение $x \cdot \{x\} = 30$?
$\{x\}$ обозначает дробную часть числа $x$.

Ответ: 2970

**Задача 2. (2 балла)**

В куб с ребром 5 вписали сферу, а в эту сферу вписали ещё один куб. Найдите площадь поверхности получившегося куба.

Ответ: 50

**Задача 3. (3 балла)**

Найдите наименьшее значение выражения $60x^2 + \dfrac{144}{60x^2+1}$.

Ответ: 23

**Задача 4. (3 балла)**

В прямоугольной таблице $12 \times 14$ стоят неотрицательные числа. В каждой строке и каждом столбце с нечётным номером сумма чисел не меньше номера этой строки или этого столбца. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 49

**Задача 5. (3 балла)**

Найдите наименьшее натуральное число $n$ такое, что число натуральных делителей $n$ на 16 меньше, чем у $n^2$.

Ответ: 36

**Задача 6. (3 балла)**

В некоторой стране было 15 городов. Каждые два были соединены двусторонним авиарейсом. Стоимость полёта в обе стороны была одинакова и составляла целое число тугриков. Оказалось, что некоторые прямые рейсы стоили дороже, чем маршруты с пересадками между теми же самыми городами. Все такие рейсы закрыли, после чего оказалось, что между любыми двумя городами можно пролететь единственным образом (если, конечно, не совершать полётов туда-обратно).

Барон Мюнхгаузен хвастался, что ему удалось воспользоваться каждым из авиарейсов (как впоследствии закрытым, так и уцелевшим) хотя бы в одном направлении.

Какое наименьшее количество тугриков он мог на это потратить?

Ответ: 287

**Задача 7. (3 балла)**

Черепаха ползёт по параболе $y = \dfrac{x^2}{25}$. Точку, в которой находится черепаха, перпендикулярно проецируют на оси абсцисс и ординат. Проекция на ось ординат движется вверх со скоростью $12\sqrt{y}$. С какой скоростью движется проекция на ось $x$ в момент, когда $x = 100$?

Ответ: 30

**Задача 8. (3 балла)**

Сколько решений имеет уравнение $\cos(3x) + \cos(8x) + \cos(13x) + \ldots + \cos(638x) = 0$ на промежутке $[0; 2\pi)$?

Ответ: 1275

**Задача 9. (4 балла)**

Окружности $O_1$ и $O_2$ касаются в точке $A$, окружности $O_2$ и $O_3$ касаются в точке $B$, окружности $O_3$ и $O_4$ касаются в точке $C$, окружности $O_4$ и $O_1$ касаются в точке $D$. Все касания — внешним образом. Радиусы окружностей составляют 4, 5, 15, 1, соответственно. Какое наибольшее значение может принимать площадь четырёхугольника с вершинами в центрах данных окружностей?

Ответ: 120

**Задача 10. (4 балла)**

Последовательность $\{a_n\}$ задана следующими условиями:

$a_1 = 24$

$a_2 = 18$

Каждое следующее $a_n$ равно среднему арифметическому всех предыдущих членов, к которому добавили $2n - \dfrac{30}{n+1}$.

Найдите $a_{3000}$. Ответ запишите в том виде, в котором указано в примере. Округлённые значения приниматься не будут.

Ответ: 12005+1/300100

## 3.2 Задания для 10 класса

(приведен один из вариантов заданий)

**Задача 1. (2 балла)**

В окружность вписан прямоугольник площади 48. Какое наименьшее значение может принимать площадь ромба, описанного вокруг той же окружности.

Ответ: 96

**Задача 2. (2 балла)**

Какое наибольшее число прямоугольников можно нарисовать по клеточкам на клетчатом листочке $2 \times 7$, если ни один из них не содержится ни в каком другом?

Ответ: 19

**Задача 3. (3 балла)**

Дана дробно-линейная функция $y = \dfrac{ax+b}{x+d}$. Оказалось, что если её график повернуть на $90^\circ$ против часовой стрелки относительно начала координат, и если её график сдвинуть на вектор $(-7, -3)$, получится один и тот же новый график.

Найдите $ad$.

Ответ: -10

**Задача 4. (3 балла)**

У многочлена $x^4 + bx^3 + 15x^2 - 6$ четыре различных корня. Найдите сумму величин, обратных к их квадратам.

Ответ: 5

**Задача 5. (3 балла)**

Какое наименьшее количество клеток необходимо закрасить в клетчатом прямоугольнике $9\times14$, чтобы в каждом прямоугольнике $3\times5$ или $5\times3$ была хотя бы одна закрашенная клетка?

Ответ: 7

**Задача 6. (3 балла)**

Произведение четырёх самых больших делителей нечётного натурального числа $n$ (не считая самого $n$) равно $n^2$. Какое наименьшее значение может принимать $n$?

Ответ: 45

**Задача 7. (3 балла)**

$\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — возрастающие целочисленные арифметические прогрессии, $a_1 = b_1 = 1$ и $a_1 + \ldots + a_6 = b_1 + \ldots + b_6$. Какое наименьшее значение может принимать $a_6$?

Ответ: 6

**Задача 8. (3 балла)**

Многочлен $P(x)$ удовлетворяет равенству $P(P(x)) = (P(x)+3)^2$. Найдите какой-нибудь корень многочлена $P(x)$.

Ответ: -3

**Задача 9. (4 балла)**

Трапеции $ABCD$ (с основаниями $AD = 180$ и $BC = 144$) и $BCDE$ подобны (вершины трапеций перечислены в том порядке, в котором они соответствуют друг другу). Найдите $AE$.

Ответ: 54

**Задача 10. (4 балла)**

На доске написаны числа от 1 до 2023. Каждую секунду Вася стирает два числа $a$ и $b$ и записывает вместо них $a + b + ab$. В конце осталось одно число. Какое именно?

Ответ: 2024!-1

## 3.3 Задания для 9 класса

(приведен один из вариантов заданий)

**Задача 1. (2 балла)**

В равнобедренной трапеции $ABCD$ биссектриса угла $C$ пересекает основание $AD$ в точке $K$. Оказалось, что $BK \parallel CD$. Известно, что $\angle A = 38°$. Найдите градусную меру угла $\angle BCK$.

Ответ: 71

**Задача 2. (2 балла)**

На доске были написаны числа 171 717 171 717 и 5 151 515 151. Каждый раз видя чётное число, Петя вместо него записывал на доску его половину, а видя два нечётных, заменял большее на разность большего и меньшего.

В конце на доске оказались ноль и двузначное число. Какое именно?

Ответ: 51

**Задача 3. (3 балла)**

Какое наибольшее число прямоугольников можно нарисовать по клеточкам на клетчатом листочке $2 \times 11$, если ни один из них не содержится ни в каком другом?

Ответ: 31

**Задача 4. (3 балла)**

Какое наименьшее количество клеток необходимо закрасить в клетчатом прямоугольнике $9\times 14$, чтобы в каждом прямоугольнике $3\times 5$ или $5\times 3$ была хотя бы одна закрашенная клетка?

Ответ: 7

**Задача 5. (3 балла)**

Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $xy\text{НОД}(x, y) = 686\,000\,000$?

Ответ: 90

**Задача 6. (3 балла)**

На какое наименьшее количество тупоугольных треугольников можно разрезать квадрат?

Ответ: 6

**Задача 7. (3 балла)**

Произведение четырёх самых больших делителей нечётного натурального числа $n$ (не считая самого $n$) равно $n^2$. Какое наименьшее значение может принимать $n$?

Ответ: 45

**Задача 8. (3 балла)**

Многочлен $P(x)$ удовлетворяет равенству $P(P(x)) = (P(x)+3)^2$. Найдите какой-нибудь корень многочлена $P(x)$.

Ответ: -3

**Задача 9. (4 балла)**

Вася выписал на доске 7 положительных чисел, а затем нарисовал на декартовой плоскости все 49 различных прямых вида $y = ax + b$, где $a$ и $b$ принимают выписанные им значения.

Какое наибольшее число различных точек пересечения могут образовывать эти прямые?

Ответ: 889

**Задача 10. (4 балла)**

Трапеции $ABCD$ (с основаниями $AD = 180$ и $BC = 144$) и $BCDE$ подобны (вершины трапеций перечислены в том порядке, в котором они соответствуют друг другу). Найдите $AE$.

Ответ: 54

## 3.4 Задания для 8 класса

(приведен один из вариантов заданий)

**Задача 1. (2 балла)**

Треугольник разрезан на два треугольника. Петя выписал на доску значения всех углов этих треугольников, но каждое число он писал только один раз вне зависимости от того, сколько углов принимает такое значение.

Найдите наименьшую возможную сумму выписанных чисел.

Ответ: 135

**Задача 2. (2 балла)**

Найдите наибольшее пятизначное число, делящееся на 9, все цифры в котором различны.

Ответ: 98730

**Задача 3. (3 балла)**

Произведение четырёх самых больших делителей нечётного натурального числа $n$ (не считая самого $n$) равно $n^3$. Какое наименьшее значение может принимать $n$?

Ответ: 945

**Задача 4. (3 балла)**

На прямой через равные промежутки длины 1 отметили 10 точек. Затем построили несколько отрезков с концами в этих точках так, что ни один отрезок не содержится ни в одном другом. Какое наибольшее значение может принимать сумма длин этих отрезков?

Ответ: 25

**Задача 5. (3 балла)**

По кругу стоят 90 эльфов и гномов (и те, и другие присутствуют). Каждый из них говорит правду своим соплеменникам, и лжёт чужакам. Каждый сказал своему правому соседу: «Мой левый сосед — эльф».

Сколько всего может быть эльфов?

Ответ: 30

**Задача 6. (3 балла)**

В равнобедренной трапеции $ABCD$ биссектриса угла $C$ пересекает основание $AD$ в точке $K$. Оказалось, что $BK \parallel CD$. Известно, что $\angle A = 38°$. Найдите градусную меру угла $\angle BCK$.

Ответ: 71

**Задача 7. (3 балла)**

На какое наименьшее количество тупоугольных треугольников можно разрезать квадрат?

Ответ: 6

**Задача 8. (3 балла)**

Какое наибольшее число прямоугольников можно нарисовать по клеточкам на клетчатом листочке $2 \times 12$, если ни один из них не содержится ни в каком другом?

Ответ: 34

**Задача 9. (4 балла)**

Какое наименьшее количество клеток необходимо закрасить в клетчатом прямоугольнике $8 \times 8$, чтобы в каждом прямоугольнике $2 \times 5$ или $5 \times 2$ была хотя бы одна закрашенная клетка?

Ответ: 5

**Задача 10. (5 балла)**

Вася выписал на доске 7 положительных чисел, а затем нарисовал на декартовой плоскости все 49 различных прямых вида $y = ax + b$, где $a$ и $b$ принимают выписанные им значения.

Какое наибольшее число различных точек пересечения могут образовывать эти прямые?

Ответ: 889

## 3.5 Задания для 5-7 классов

(приведен один из вариантов заданий)

**Задача 1. (2 балла)**

Мусоровоз приезжает за мусором к Васиному дому в одно и то же время, через одно и тоже количество дней. Первый раз за месяц мусоровоз приехал в воскресенье, а третий раз — в среду. В какой день недели мусоровоз приехал во второй раз?

Ответ: Пятница

**Задача 2. (3 балла)**

Произведение четырёх самых больших делителей нечётного натурального числа $n$ (не считая самого $n$) равно $n^3$. Какое наименьшее значение может принимать $n$?

Ответ: 945

**Задача 3. (3 балла)**

На прямой через равные промежутки длины 1 отметили 10 точек. Затем построили несколько отрезков с концами в этих точках так, что ни один отрезок не содержится ни в одном другом. Какое наибольшее значение может принимать сумма длин этих отрезков?

Ответ: 25

**Задача 4. (3 балла)**

Даны пять отрезков, длины которых — различные натуральные числа. Оказалось, что из этих пяти отрезков можно составить пятиугольник, а вот ни из каких четырёх из них четырёхугольник составить нельзя.

Какое наименьшее значение может принимать длина самого большого отрезка?

Ответ: 11

**Задача 5. (3 балла)**

Треугольник разрезан на два треугольника. Петя выписал на доску значения всех углов этих треугольников, но каждое число он писал только один раз вне зависимости от того, сколько углов принимает такое значение.

Найдите наименьшую возможную сумму выписанных чисел.

Известно, что сумма углов треугольника составляет $180°$.

Ответ: 135

**Задача 6. (3 балла)**

По кругу стоят 90 эльфов и гномов (и те, и другие присутствуют). Каждый из них говорит правду своим соплеменникам, и лжёт чужакам. Каждый сказал своему правому соседу: «Мой левый сосед — эльф».

Сколько всего может быть эльфов?

Ответ: 30

**Задача 7. (3 балла)**

Найдите наибольшее пятизначное число, делящееся на 9, все цифры в котором различны.

Ответ: 98730

**Задача 8. (3 балла)**

У Миши есть два прямоугольных параллелепипеда: синий и красный. Он поставил их перед собой и обнаружил, что площадь верхней грани у синего параллелепипеда на 68% больше, чем у красного; площадь правой грани у синего параллелепипеда на 5% больше, чем у красного; и, наконец, площадь передней грани у синего параллелепипеда на 10% меньше, чем у красного.

На сколько процентов объём синего параллелепипеда больше объёма красного?

Ответ: 26

**Задача 9. (3 балла)**

Петя одну шестую часть пути от города до деревни проехал на автобусе, а остальной путь — на поезде. Вася одну шестую часть пути от города до деревни проехал на поезде, а остальной путь — на автобусе, и это заняло у него в два раза больше времени.

Во сколько раз скорость поезда больше скорости автобуса, если эти скорости постоянны?

Ответ: 3

**Задача 10. (4 балла)**

Какое наименьшее количество клеток необходимо закрасить в клетчатом прямоугольнике $8\times 8$, чтобы в каждом прямоугольнике $2\times 5$ или $5\times 2$ была хотя бы одна закрашенная клетка?

Ответ: 5