Открытая олимпиада школьников по математике

9 марта 2024 г.

11 класс

Задачи и решения

Данный файл содержит печатные версии задач. Онлайн-версии могут незначительно отличаться в формулировках.

Задача 1. (2 балла) Условия и решение в общем виде.

Варианты 1-6. Дан многочлен $P(x)$ степени n. Известно, что у производной многочлена $P^2(x)$ ровно $2k$ различных вещественных корней. Какое наибольшее число различных вещественных корней может быть у многочлена $P(x)$?

Ответ: k

Решение:

$(P^2(x))' = 2P(x)P'(x)$, таким образом, все корни этого многочлена являются корнями либо многочлена $P(x)$, либо многочлена $P'(x)$. При этом между каждыми двумя корнями многочлена точно находится корень производной, не являющийся при этом корнем многочлена. Значит то есть количество корней $P(x)$ не может превосходить количество оставшихся корней $2P(x)P'(x)$ больше, чем на 1. В нашем случае это значит, что у $P(x)$ не больше k корней.

В вариантах 2-6 пример строится следующим образом: рассмотрим многочлен $x^{n-k+1}(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)$. Он имеет степень n и k корней. Его производная тоже имеет k корней: это $k-1$ корень между корнями самого многочлена, а также корень 0. Больше корней у производной нет, потому что если мы посчитаем приведённые выше корни с учётом кратности, получим $k-1+n-k=n-1$, то есть максимально возможное число. Этот многочлен нам не подходит, потому что у $P(x)$ и $P'(x)$ совпадает один корень, соответственно у $(P^2(x))'$ на один корень меньше, чем нужно.

Рассмотрев многочлен $P(x)+\varepsilon$ мы получим многочлен с той же производной. При этом, для достаточно маленького ε количество корней не изменится, так как ни один корень не является локальным максимумом или минимумом, поскольку степени всех множителей нечётны.

В варианте 1 добавляется следующее соображение: если у многочлена $P(x)$ ровно 15 корней, то один из них является корнем производной, потому что иначе многочлен меняет знак 15 раз, а многочлен чётной степени меняет знак чётное число раз.

Пример строится следующим образом: рассмотрим многочлен $P_0(x)=x^5(x-1)\dots(x-13)(x-14)(x-5)$. У него и у его производной 16 корней, один из них общий, итого 31 корень у $2P_0(x)P_0'(x)$. Сдвинув его на маленький ε мы получим 32 корня у $2P(x)P'(x)$. Будем двигать дальше, пока ε не станет равно ближайшему к 0 значению минимума или максимума нашего исходного многочлена. Тогда два корня многочлена и один корень производной сольются вместе и у $2P(x)P'(x)$ будет на два корня меньше, то есть 30.

Таблица с данными и ответами:

Вар.	n	$2k$	Ответ
1	20	30	15
2	21	32	16
3	22	36	18
4	23	40	20
5	25	44	22
6	30	48	24

Вариант 7-12. Дан многочлен $P(x)$ степени n. Известно, что у производной многочлена $P^2(x)$ ровно k различных вещественных корней. Какое наименьшее число различных вещественных корней может быть у многочлена $P(x)$?

Ответ: $k-n+2$

Решение:

$(P^2(x))' = 2P(x)P'(x)$, таким образом, все корни этого многочлена являются корнями либо многочлена $P(x)$, либо многочлена $P'(x)$. При этом у производной многочлена степени n не больше $n-1$ корня. Значит, все оставшиеся $k-(n-1)$ корней многочлена $2P(x)P'(x)$ являются корнями $P(x)$.

В этом случае ни один корень многочлена не будет одновременно корнем производной. Однако в каждом таком корне многочлен меняет знак, поэтому чётность количества корней в этом случае должна совпадать с чётностью степени многочлена. Во всех наших вариантах это не так. Значит, оценку надо увеличить ещё как минимум на 1.

Пример строится следующим образом: рассмотрим какой-нибудь многочлен $P_0(x)$ с положительным старшим коэффициентом, имеющий $n-2$ корня, производная которого также имеет $n-2$ корня, один из которых кратный. Причём пусть $P_o(x)$ такой, что во всех корнях производной многочлен принимает различных значения. Также рассмотрим все многочлены вида $P(x)=P_0(x)-a$. При достаточно больших a у этого многочлена 0 или 1 корней, в зависимости от чётности его степени. В этом случае у многочлена $(P^2(x))'$ либо $n-2$ или $n-2+1=n-1$ корней в завимости от чётности n, то есть чётное число. Когда мы будем постепенно уменьшать a, будет происходить следующее: когда a достигает какого-то из локальных минимумов многочлена к многочлену добавляется один корень, являющийся корнем производной, т.е. количество корней $(P^2(x))'$ не увеличивается. Когда a ещё чуть-чуть уменьшается, у многочлена становится ещё на один корень больше, при этом совпадение с корнем производной пропадает, поэтому количество корней $(P^2(x))'$ увеличивается сразу на 2. В локальных максимумах наблюдается обратная ситуация. Поскольку при $a=0$ количество корней у $(P^2(x))'$ больше, чем k, и количество корней у построенного таких образом $(P^2(x))'$ всегда чётно, необходимое количество корней k будет в какой-то момент достигнуто. При этом в описанной ситуации корни многочлена и его производной не будут совдадать, у производной будет $n-2$ корня, значит, у самого многочлена их будет $k+n-2$.

Таблица с данными и ответами:

Вар.	n	k	Ответ
1	20	30	12
2	21	32	13
3	22	36	16
4	23	40	19
5	25	44	21
6	30	48	20

Задача 2. (2 балла). Условие и решение в общем виде.

Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентным соотношением $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + k$ и начальными условиями $a_0 = a$, $a_2 = a + d$. Можно ли по этим данным однозначно восстановить a_{2m}? Если да, введите в поле для ответа это число, иначе введите слово «нет».

Ответ: $a + md + km(m-1)$

Решение:

Перепишем рекуррентную формулу: $a_n - a_{n-2} = a_{n-1} - a_{n-3} + k$. Записав её для $n-1$ вместо n получим $a_{n-1} - a_{n-3} = a_{n-2} - a_{n-4} + k$, откуда $a_n - a_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-4} + 2k$.

Поскольку $a_2 - a_0 = d$, отсюда легко доказывается, что $a_{2i} - a_{2(i-1)} = d + 2k(i-1)$. Значит, $a_{2m} = a + \sum i = 1^m(d + 2k(i-1)) = a + md + km(m-1)$

Таблица с данными и ответами:

Вар.	a_0	a_2	k	$2m$	d	m	Ответ
1	0	2	3	4000	2	2000	11998000
2	1	4	4	2000	3	1000	3999001
3	2	6	5	4000	4	2000	19998002
4	3	8	2	2000	5	1000	2003003
5	5	7	3	4000	2	2000	11998005
6	0	3	4	2000	3	1000	3999000
7	1	5	5	4000	4	2000	19998001
8	2	7	2	2000	5	1000	2003002
9	3	5	3	4000	2	2000	11998003
10	5	8	4	2000	3	1000	3999005

Задача 3. (3 балла)

Вариант 1. Натуральные делители натурального числа n занумеровали по возрастанию: $d_1 = 1$, d_1, …, $d_k = n$. Оказалось, что $d_{18} = 120$. Какое наименьшее значение может принимать число n?

Ответ: $4920 = 120 \cdot 41$

Решение:

У числа $120 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3$ шестнадцать делителей и все они являются делителями числа n. Если n делится на 2^4, то к этим делителям добавляются ещё числа 16, 48 и 80, то есть 120 — это уже как минимум девятнадцатый делитель.

Если n делится на 3^2, то к исходным шестнадцати делителям добавляются 9, 18 и 45. Если n делится на 5^2, то к исходным шестнадцати делителям добавляются 25, 50 и 75.

Значит, n делится на какое-то простое число p, кроме 2, 3 и 5. Если это число не превосходит 40, то числа p, $2p$ и $3p$ являются делителями n, меньшими 120, и мы опять получаем слишком много делителей. Значит, p хотя бы 41, то есть $n \geqslant 120 \cdot 41$.

Заметим, что это число нас как раз устраивает.

Вариант 2. Натуральные делители натурального числа n занумеровали по возрастанию: $d_1 = 1$, d_1, …, $d_k = n$. Оказалось, что $d_{20} = 180$. Какое наименьшее значение может принимать число n?

Ответ: $10980 = 180 \cdot 61$

Решение:

У числа $180 = 2^2 \cdot 5 \cdot 3^2$ восемнадцать делителей и все они являются делителями числа n. Если n делится на 2^3, то к этим делителям добавляются ещё числа 8, 24 и 40, то есть 180 — это уже как минимум двадцать первый делитель.

Если n делится на 3^3, то к исходным восемнадцати делителям добавляются 27, 54, 108 и 135. Если n делится на 5^2, то к исходным восемнадцати делителям добавляются 25, 50, 75 и 100.

Значит, n делится на какое-то простое число p, кроме 2, 3 и 5. Если это число не превосходит 60, то числа p, $2p$ и $3p$ являются делителями n, меньшими 180, и мы опять получаем слишком много делителей. Значит, p хотя бы 61, то есть $n \geqslant 180 \cdot 61 = 10980$.

Заметим, что это число нас как раз устраивает.

Вариант 3. Натуральные делители натурального числа n занумеровали по возрастанию: $d_1 = 1$, d_1, …, $d_k = n$. Оказалось, что $d_{21} = 180$. Какое наименьшее значение может принимать число n?

Ответ: $8460 = 180 \cdot 47$

Решение:

У числа $180 = 2^2 \cdot 5 \cdot 3^2$ восемнадцать делителей и все они являются делителями числа n. Если n делится на 2^3, то к этим делителям добавляются ещё числа 8, 24, 40 и 72 то есть 180 — это уже как минимум двадцать второй делитель.

Если n делится на 3^3, то к исходным восемнадцати делителям добавляются 27, 54, 108 и 135. Если n делится на 5^2, то к исходным восемнадцати делителям добавляются 25, 50, 75 и 100.

Значит, n делится на какое-то простое число p, кроме 2, 3 и 5. Если это число не превосходит 45, то числа p, $2p$, $3p$ и $4p$ являются делителями n, меньшими 180, и мы опять получаем слишком много делителей. Значит, p хотя бы 47, то есть $n \geqslant 180 \cdot 47 = 8460$.

Заметим, что это число нас как раз устраивает.

Вариант 4. Натуральные делители натурального числа n занумеровали по возрастанию: $d_1 = 1$, d_1, …, $d_k = n$. Оказалось, что $d_{22} = 240$. Какое наименьшее значение может принимать число n?

Ответ: $19920 = 240 \cdot 83$

Решение:

У числа $240 = 2^4 \cdot 5 \cdot 3$ двадцать делителей и все они являются делителями числа n. Если n делится на 2^5, то к этим делителям добавляются ещё числа 32, 96 и 160, то есть 240 — это уже как минимум двадцать третий делитель.

Если n делится на 3^2, то к исходным двадцати делителям добавляются 9, 18, 36 и 45. Если n делится на 5^2, то к исходным двдцати делителям добавляются 25, 50, 75 и 100.

Значит, n делится на какое-то простое число p, кроме 2, 3 и 5. Если это число не превосходит 80, то числа p, $2p$ и $3p$ являются делителями n, меньшими 240, и мы опять получаем слишком много делителей. Значит, p хотя бы 83, то есть $n \geqslant 240 \cdot 83 = 19920$.

Заметим, что это число нас как раз устраивает.

Вариант 5. Натуральные делители натурального числа n занумеровали по возрастанию: $d_1 = 1$, d_1, …, $d_k = n$. Оказалось, что $d_{23} = 240$. Какое наименьшее значение может принимать число n?

Ответ: 480

Решение: Наименьшее число, делящее на 240 и не равное ему это $480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$. Заметим, что у этого числа 24 делителя, и 240 как раз двадцать третий из них.

Вариант 6. Натуральные делители натурального числа n занумеровали по возрастанию: $d_1 = 1$, d_1, …, $d_k = n$. Оказалось, что $d_{24} = 240$. Какое наименьшее значение может принимать число n?

Ответ: $12720 = 240 \cdot 53$

Решение:

У числа $240 = 2^4 \cdot 5 \cdot 3$ двадцать делителей и все они являются делителями числа n.

Если n делится на 3^2, то к исходным двадцати делителям добавляются 9, 18, 36, 45 и 72. Если n делится на 5^2, то к исходным двдцати делителям добавляются 25, 50, 75, 100 и 200. В любом случае мы имеем хотя бы 25 делителей, не больших 240.

Если n делится на 2^6, то добавляются делители 32, 64, 96, 80, 192.

Для числа $480 = 2^5 \cdot 5 \cdot 3$ число 240 является предпоследним, двадцать третьим делителем.

Значит, n делится на какое-то простое число p, кроме 2, 3 и 5. Если это число не превосходит 48, то числа p, $2p$, $3p$, $4p$ и $5p$ являются делителями n, меньшими 240, и мы опять получаем слишком много делителей. Значит, p хотя бы 53, то есть $n \geqslant 240 \cdot 53 = 12720$.

Заметим, что это число нас как раз устраивает.

Вариант 7. Натуральные делители натурального числа n занумеровали по возрастанию: $d_1 = 1$, d_2, …, $d_k = n$. Оказалось, что $d_{26} = 360$. Какое наименьшее значение может принимать число n?

Ответ: $45720 = 360 \cdot 127$

Решение:

У числа $360 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3^2$ двадцать четыре делителя и все они являются делителями числа n.

Если n делится на 2^4, то добавляются делители 16, 48, 80, 144, 240, то есть 360 — это уже как минимум двадцать девятый делитель.

Если n делится на 3^3, то к исходным двадцати делителям добавляются 27, 54, 108, 135 и 216. Если n делится на 5^2, то к исходным двдцати делителям добавляются 25, 50, 75, 100, 150 и 200. В любом случае мы имеем хотя бы 29 делителей, не больших 360.

Значит, n делится на какое-то простое число p, кроме 2, 3 и 5. Если это число не превосходит 120, то числа p, $2p$ и $3p$ являются делителями n, меньшими 360, и мы опять получаем слишком много делителей. Значит, p хотя бы 127, то есть $n \geqslant 360 \cdot 127 = 45720$.

Заметим, что это число нас как раз устраивает.

Вариант 8. Натуральные делители натурального числа n занумеровали по возрастанию: $d_1 = 1$, d_2, …, $d_k = n$. Оказалось, что $d_{27} = 360$. Какое наименьшее значение может принимать число n?

Ответ: $34920 = 360 \cdot 97$

Решение:

У числа $360 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3^2$ двадцать четыре делителя и все они являются делителями числа n.

Если n делится на 2^4, то добавляются делители 16, 48, 80, 144, 240, то есть 360 — это уже как минимум двадцать девятый делитель.

Если n делится на 3^3, то к исходным двадцати делителям добавляются 27, 54, 108, 135 и 216. Если n делится на 5^2, то к исходным двдцати делителям добавляются 25, 50, 75, 100, 150 и 200. В любом случае мы имеем хотя бы 29 делителей, не больших 360.

Значит, n делится на какое-то простое число p, кроме 2, 3 и 5. Если это число не превосходит 90, то числа p, $2p$, $3p$ и $4p$ являются делителями n, меньшими 360, и мы опять получаем слишком много делителей. Значит, p хотя бы 97, то есть $n \geqslant 360 \cdot 97 = 34920$.

Заметим, что это число нас как раз устраивает.

Вариант 9. Натуральные делители натурального числа n занумеровали по возрастанию: $d_1 = 1$, d_2, …, $d_k = n$. Оказалось, что $d_{28} = 360$. Какое наименьшее значение может принимать число n?

Ответ: $26280 = 360 \cdot 73$

Решение:

У числа $360 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3^2$ двадцать четыре делителя и все они являются делителями числа n.

Если n делится на 2^4, то добавляются делители 16, 48, 80, 144, 240, то есть 360 — это уже как минимум двадцать девятый делитель.

Если n делится на 3^3, то к исходным двадцати делителям добавляются 27, 54, 108, 135 и 216. Если n делится на 5^2, то к исходным двдцати делителям добавляются 25, 50, 75, 100, 150 и 200. В любом случае мы имеем хотя бы 29 делителей, не больших 360.

Значит, n делится на какое-то простое число p, кроме 2, 3 и 5. Если это число не превосходит 72, то числа p, $2p$, $3p$, $4p$ и $5p$ являются делителями n, меньшими 360, и мы опять получаем слишком много делителей. Значит, p хотя бы 73, то есть $n \geqslant 360 \cdot 73 = 26280$.

Заметим, что это число нас как раз устраивает.

Вариант 10. Натуральные делители натурального числа n занумеровали по возрастанию: $d_1 = 1$, d_2, $\ldots$, $d_k = n$. Оказалось, что $d_{29} = 360$. Какое наименьшее значение может принимать число n?

Ответ: 720

Решение: Наименьшее число, делящее на 240 и не равное ему это $480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$. Заметим, что у этого числа 30 делителей, и 360 как раз предпоследний, двадцать девятый из них.

Задача 4. (3 балла)

Вариант 1. Клетчатый куб $9 \times 9 \times 9$ состоит из ячеек, представляющих из себя единичные кубики. 361 ячейка закрашена. Докажите, что в каком-то кубике $2 \times 2 \times 2$ закрашено хотя бы четыре ячейки.

Доказательство:

Предположим противное. Вырежем из нашего куба куб $8 \times 8 \times 8$ и разобъём его на 64 куба $2 \times 2 \times 2$. В каждом из них закрашено не более трёх ячеек, то есть всего не более 192.

В исходном кубе после этого остались кубики на трёх гранях, имеющих общую вершину. Рассмотрим 64 клетки на одной из этих граней, которые не лежат ни на какой из двух других. Они разбиваются на 16 квадратов 2×2, в каждом из которых не более трёх закрашенных ячеек. Итого на трёх гранях получаем не более $3 \times 16 \times 3 = 144$.

У нас остались не рассмотренными 25 ячеек, образующих три ребра исходного куба, сходящиеся в одной вершине. Среди них закрашены не более 24, так как общая ячейка трёх этих рёбер и три её соседних лежат в одном кубике $2 \times 2 \times 2$, значит, среди этих четырёх ячеек не более трёх закрашенных.

Таким образом мы получаем максимум $192 + 144 + 24 = 360$ закрашенных ячеек, что противоречит условию задачи.

Вариант 2. Клетчатый куб $11 \times 11 \times 11$ состоит из ячеек, представляющих из себя единичные кубики. 631 ячейка закрашена. Докажите, что в каком-то кубике $2 \times 2 \times 2$ закрашено хотя бы четыре ячейки.

Доказательство:

Предположим противное. Вырежем из нашего куба куб $10 \times 10 \times 10$ и разобъём его на 125 кубов $2 \times 2 \times 2$. В каждом из них закрашено не более трёх ячеек, то есть всего не более 375.

В исходном кубе после этого остались кубики на трёх гранях, имеющих общую вершину. Рассмотрим 100 клеток на одной из этих граней, которые не лежат ни на какой из двух других. Они разбиваются на 25 квадратов 2×2, в каждом из которых не более трёх закрашенных ячеек. Итого на трёх гранях получаем не более $3 \times 25 \times 3 = 225$.

У нас осталась не рассмотренной 31 ячейка. Эти ячейки образуют три ребра исходного куба, сходящиеся в одной вершине. Среди них закрашены не более 30, так как общая ячейка трёх этих рёбер и три её соседних лежат в одном кубике $2 \times 2 \times 2$, значит, среди этих четырёх ячеек не более трёх закрашенных.

Таким образом мы получаем максимум $375 + 225 + 30 = 630$ закрашенных ячеек, что противоречит условию задачи.

Вариант 3. Клетчатый куб $7 \times 7 \times 7$ состоит из ячеек, представляющих из себя единичные кубики. 181 ячейка закрашена. Докажите, что в каком-то кубике $2 \times 2 \times 2$ закрашено хотя бы четыре ячейки.

Доказательство:

Предположим противное. Вырежем из нашего куба куб $6 \times 6 \times 6$ и разобъём его на 27 кубов $2 \times 2 \times 2$. В каждом из них закрашено не более трёх ячеек, то есть всего не более 81.

В исходном кубе после этого остались кубики на трёх гранях, имеющих общую вершину. Рассмотрим 36 клеток на одной из этих граней, которые не лежат ни на какой из двух других. Они разбиваются на 9 квадратов 2×2, в каждом из которых не более трёх закрашенных ячеек. Итого на трёх гранях получаем не более $3 \times 9 \times 3 = 81$.

У нас остались не рассмотренными 19 ячеек. Эти ячейки образуют три ребра исходного куба, сходящиеся в одной вершине. Среди них закрашены не более 18, так как общая ячейка трёх этих рёбер и три её соседних лежат в одном кубике $2 \times 2 \times 2$, значит, среди этих четырёх ячеек не более трёх закрашенных.

Таким образом мы получаем максимум $81 + 81 + 18 = 180$ закрашенных ячеек, что противоречит условию задачи.

Вариант 4. Клетчатый куб $10 \times 10 \times 10$ состоит из ячеек, представляющих из себя единичные кубики. 187 ячеек закрашены. Докажите, что в каком-то кубике $3 \times 3 \times 3$ закрашено хотя бы четыре ячейки.

Доказательство:

Предположим противное. Вырежем из нашего куба куб $9 \times 9 \times 9$ и разобъём его на 27 кубов $3 \times 3 \times 3$. В каждом из них закрашено не более трёх ячеек, то есть всего не более 81.

В исходном кубе после этого остались кубики на трёх гранях, имеющих общую вершину. Рассмотрим 81 клетку на одной из этих граней, которые не лежат ни на какой из двух других. Они разбиваются на 9 квадратов 3×3, в каждом из которых не более трёх закрашенных ячеек. Итого на трёх гранях получаем не более $3 \times 9 \times 3 = 81$.

У нас остались не рассмотренными 28 ячеек, образующих три ребра исходного куба, сходящиеся в одной вершине. Среди них закрашены не более 24, так как общая ячейка трёх этих рёбер и шесть ближайших к ней ячеек лежат в одном кубике $3 \times 3 \times 3$, значит, среди этих семи ячеек не более трёх закрашенных.

Таким образом мы получаем максимум $81 + 81 + 24 = 186$ закрашенных ячеек, что противоречит условию задачи.

Вариант 5.. Клетчатый куб $10 \times 10 \times 10$ состоит из ячеек, представляющих из себя единичные кубики. 242 ячейки закрашены. Докажите, что в каком-то кубике $3 \times 3 \times 3$ закрашено хотя бы пять ячеек.

Доказательство:

Предположим противное. Вырежем из нашего куба куб $9 \times 9 \times 9$ и разобъём его на 27 кубов $3 \times 3 \times 3$. В каждом из них закрашено не более четырёх ячеек, то есть всего не более 108.

В исходном кубе после этого остались кубики на трёх гранях, имеющих общую вершину. Рассмотрим 81 клетку на одной из этих граней, которые не лежат ни на какой из двух других. Они разбиваются на 9 квадратов 3×3, в каждом из которых не более четырёх закрашенных ячеек. Итого на трёх гранях получаем не более $3 \times 9 \times 4 = 108$.

У нас остались не рассмотренными 28 ячеек, образующих три ребра исходного куба, сходящиеся в одной вершине. Среди них закрашены не более 25, так как общая ячейка трёх этих рёбер и шесть ближайших к ней ячеек лежат в одном кубике $3 \times 3 \times 3$, значит, среди этих семи ячеек не более четырёх закрашенных.

Таким образом мы получаем максимум $108 + 108 + 25 = 241$ закрашенная ячейка, что противоречит условию задачи.

Вариант 6. Клетчатый куб $13 \times 13 \times 13$ состоит из ячеек, представляющих из себя единичные кубики. 370 ячеек закрашены. Докажите, что в каком-то кубике $3 \times 3 \times 3$ закрашено хотя бы четыре ячейки.

Доказательство:

Предположим противное. Вырежем из нашего куба куб $12 \times 12 \times 12$ и разобъём его на 64 куба $3 \times 3 \times 3$. В каждом из них закрашено не более трёх ячеек, то есть всего не более 192.

В исходном кубе после этого остались кубики на трёх гранях, имеющих общую вершину. Рассмотрим 144 клетки на одной из этих граней, которые не лежат ни на какой из двух других. Они разбиваются на 16 квадратов 3×3, в каждом из которых не более трёх закрашенных ячеек. Итого на трёх гранях получаем не более $3 \times 16 \times 3 = 144$.

У нас остались не рассмотренными 37 ячеек, образующих три ребра исходного куба, сходящиеся в одной вершине. Среди них закрашены не более 33, так как общая ячейка трёх этих рёбер и шесть ближайших к ней ячеек лежат в одном кубике $3 \times 3 \times 3$, значит, среди этих семи ячеек не более трёх закрашенных.

Таким образом мы получаем максимум $192 + 144 + 33 = 369$ закрашенных ячеек, что противоречит условию задачи.

Вариант 7. Клетчатый куб $13 \times 13 \times 13$ состоит из ячеек, представляющих из себя единичные кубики. 483 ячейки закрашены. Докажите, что в каком-то кубике $3 \times 3 \times 3$ закрашено хотя бы пять ячеек.

Доказательство:

Предположим противное. Вырежем из нашего куба куб $12 \times 12 \times 12$ и разобъём его на 64 куба $3 \times 3 \times 3$. В каждом из них закрашено не более четырёх ячеек, то есть всего не более 256.

В исходном кубе после этого остались кубики на трёх гранях, имеющих общую вершину. Рассмотрим 144 клетки на одной из этих граней, которые не лежат ни на какой из двух других. Они разбиваются на 16 квадратов 3×3, в каждом из которых не более четырёх закрашенных ячеек. Итого на трёх гранях получаем не более $3 \times 16 \times 4 = 192$.

У нас остались не рассмотренными 37 ячеек, образующих три ребра исходного куба, сходящиеся в одной вершине. Среди них закрашены не более 34, так как общая ячейка трёх этих рёбер и шесть ближайших к ней ячеек лежат в одном кубике $3 \times 3 \times 3$, значит, среди этих семи ячеек не более четырёх закрашенных.

Таким образом мы получаем максимум $256 + 192 + 34 = 482$ закрашенных ячейки, что противоречит условию задачи.

Вариант 8. Клетчатый куб $13 \times 13 \times 13$ состоит из ячеек, представляющих из себя единичные кубики. 1006 ячеек закрашены. Докажите, что в каком-то кубике $2 \times 2 \times 2$ закрашено хотя бы четыре ячейки.

Доказательство:

Предположим противное. Вырежем из нашего куба куб $12 \times 12 \times 12$ и разобъём его на 216 кубов $2 \times 2 \times 2$. В каждом из них закрашено не более трёх ячеек, то есть всего не более 648.

В исходном кубе после этого остались кубики на трёх гранях, имеющих общую вершину. Рассмотрим 144 клетки на одной из этих граней, которые не лежат ни на какой из двух других. Они разбиваются на 36 квадратов 2×2, в каждом из которых не более трёх закрашенных ячеек. Итого на трёх гранях получаем не более $3 \times 36 \times 3 = 324$.

У нас остались не рассмотренными 37 ячеек. Эти ячейки образуют три ребра исходного куба, сходящиеся в одной вершине. Таким образом мы получаем максимум $648 + 324 + 37 = 1009$ закрашенных ячеек.

Рассмотрим теперь параллелепипед $3 \times 3 \times 2$, примыкающий к одному из наших рёбер. В него вошли одиночных кубик, два квадрата и 2 одиночных ячейки, перечисленные выше, то есть мы оценили количество закрашенных ячеек в этом кубе числом $3 + 2 \cdot 3 + 3 = 11$. Докажем, что в этом параллелепипеде на самом деле не более 10 закрашенных ячеек.

Действительно, в этом параллелепипеде находятся четыре попарно пересекающихся куба $2 \times 2 \times 2$, в каждом из которых не более трёх закрашенных ячеек. Итого мы получаем в сумме 12 ячеек, но при этом максимум 8 из них (угловые) посчитаны один раз, остальные посчитаные минимум дважды, значит, закрашенных ячеек на самом деле максимум $8 + 4/2 = 10$.

Это соображение позволяет нам уменьшить общую оценку ещё на 18, что уже становится меньше требуемого числа.

Вариант 9. Клетчатый куб $16 \times 16 \times 16$ состоит из ячеек, представляющих из себя единичные кубики. 643 ячеек закрашены. Докажите, что в каком-то кубике $3 \times 3 \times 3$ закрашено хотя бы четыре ячейки.

Доказательство:

Предположим противное. Вырежем из нашего куба куб $15 \times 15 \times 15$ и разобъём его на 125 кубов $3 \times 3 \times 3$. В каждом из них закрашено не более трёх ячеек, то есть всего не более 375.

В исходном кубе после этого остались кубики на трёх гранях, имеющих общую вершину. Рассмотрим 225 клеток на одной из этих граней, которые не лежат ни на какой из двух других. Они разбиваются на 25 квадратов 3×3, в каждом из которых не более трёх закрашенных ячеек. Итого на трёх гранях получаем не более $3 \times 25 \times 3 = 225$.

У нас остались не рассмотренными 46 ячеек, образующих три ребра исходного куба, сходящиеся в одной вершине. Среди них закрашены не более 42, так как общая ячейка трёх этих рёбер и шесть ближайших к ней ячеек лежат в одном кубике $3 \times 3 \times 3$, значит, среди этих семи ячеек не более трёх закрашенных.

Таким образом мы получаем максимум $375 + 225 + 42$ закрашенные ячейки, что противоречит условию задачи.

Вариант 10. Клетчатый куб $16 \times 16 \times 16$ состоит из ячеек, представляющих из себя единичные кубики. 844 ячейки закрашены. Докажите, что в каком-то кубике $3 \times 3 \times 3$ закрашено хотя бы пять ячеек.

Доказательство:

Предположим противное. Вырежем из нашего куба куб $15 \times 15 \times 15$ и разобъём его на 125 кубов $3 \times 3 \times 3$. В каждом из них закрашено не более четырёх ячеек, то есть всего не более 500.

В исходном кубе после этого остались кубики на трёх гранях, имеющих общую вершину. Рассмотрим 225 клеток на одной из этих граней, которые не лежат ни на какой из двух других. Они разбиваются на 25 квадратов 3×3, в каждом из которых не более четырёх закрашенных ячеек. Итого на трёх гранях получаем не более $3 \times 25 \times 4 = 300$.

У нас остались не рассмотренными 46 ячеек, образующих три ребра исходного куба, сходящиеся в одной вершине. Среди них закрашены не более 43, так как общая ячейка трёх этих рёбер и шесть ближайших к ней ячеек лежат в одном кубике $3 \times 3 \times 3$, значит, среди этих семи ячеек не более четырёх закрашенных.

Таким образом мы получаем максимум $500 + 300 + 143 = 843$ закрашенные ячейки, что противоречит условию задачи.

Задача 5. (3 балла) Условия и решение в общем виде.

Варианты 1-7. Произведение чисел a, b, c, d, не меньших 2, составляет 2^{k+3}. Найдите наименьшее значение выражения

$$\log_{cd} ab + \log_{bd} ac + \log_{bc} ad + \log_{ad} bc + \log_{ac} bd + \log_{ab} cd.$$

Ответ: = 3*(k+1)/2 + 3*2/*(k+1) =

Ответ: $\dfrac{3(k+1)}{2} + \dfrac{6}{k+1}$

Решение: Обозначим $\log_2 a = x$, $\log_2 b = y$, $\log_2 c = z$, $\log_2 d = t$. Тогда наше выражение превратится в

$$\frac{x+y}{z+t} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{x+z}{y+t} + \frac{y+t}{z+x} + \frac{x+t}{z+y} + \frac{z+y}{x+t}.$$

(Слагаемые в этом выражение уже переставлены). Условие, что исходные числа не меньше p превращается в условие, что логарифмы не меньше 1, а условие на произведение превращается в $x + y + z + t = k + 3$.

Давайте воспользуемся методом Штурма. Заменим два числа x и y на два другие x' и y' с такой же суммой $x' + y' = x + y$ и большей разностью: если $x \geqslant y$, то $x' > x \geqslant t > y'$. Тогда первые две дроби не изменятся. $\dfrac{x+z}{y+t}$ увеличится, а $\dfrac{y+t}{x+z}$ уменьшится, при этом их произведение останется равным единице. Сумма двух взаимно обратных чисел тем больше, чем эти числа дальше от единицы, значит, при нашем преобразовании сумма $\dfrac{x+z}{y+t} + \dfrac{y+t}{x+z}$ увеличится. Аналогично увеличится сумма и двух последних дробей. В случае, если $y > x$ всё произойдёт аналогично.

Такими преобразованиями можно превратить три наименьших числа из x, y, z, t в единицу, а наибольшее — в $k + 1$, при этом наше выражение будет увеличиваться. Значит, любое возможное значение нашего выражения не превосходит оного при $y = z = t = 1$ и $x = k + 1$, что равно $\dfrac{3(k+1)}{2} + \dfrac{6}{k+1}$.

Варианты 8-10. Произведение чисел a, b, c, d, не меньших 2, составляет 2^{k+3}. Найдите наименьшее значение выражения

$$q \cdot (\log_{cd} ab + \log_{bd} ac + \log_{bc} ad + \log_{ad} bc + \log_{ac} bd + \log_{ab} cd).$$

Ответ: $q \cdot \left(\dfrac{3(k+1)}{2} + \dfrac{6}{k+1}\right)$

Решение: Решение аналогично предыдущим вариантам, только всё выражение домножается на q. На самом деле, множитель q введён только для того, чтобы сделать все ответы десятичными дробями.

Таблица с данными и ответами:

Вар.	q	2^{k+3}	k	Ответ
1		32	2	6,5
2		64	3	7,5
3		128	4	8,7
4		256	5	10
5		1024	7	12,75
6		4096	9	15,6
7		16384	11	18,5
8	7	512	6	79,5
9	6	2048	8	85
10	11	8192	10	187,5

Задача 6. (3 балла)

Варианты 1-5. Окружности S_1 и S_2 находятся внутри трапеции $ABCD$, касаясь друг друга, оснований трапеции, и каждая — своей боковой стороны. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что радиус вписанной окружности треугольника BCK равен радиусу окружности S_1 и равен r. Также известно, что $BC = x$. Найдите площадь треугольника ADK.

Ответ: $\dfrac{(x+2r)^2}{2}$

Решение: Радиусы S_1 и S_2 равны друг другу и высоте трапеции. Из условия про пересечение лучей следует, что BC — меньшее основание.

Проведём вторую касательную к вписанной окружности треугольника BCK параллельную основаниям трапеции. Обозначим за X и Y точки пересечения этой касательной с отрезками BK и CK. $BXYC$ — трапеция.

Точки касания окружностей и оснований трапеции образуют квадрат со стороной $2r$. Если вырезать этот квадрат из трапеции и склеить оставшиеся части между собой, получится трапеция, равная $BXYC$.

Более точно, обозначим точки касания окружностей S_1 и S_2 с основаниями трапеции $ABCD$: пусть M и N лежат на BC (M ближе к B), P и Q лежат на AD (P ближе к A). Кроме того, пусть U, V, W, Z — точки касания вписанной окружности BCK с XY,BC, BK, CK соответственно. Кроме того, пусть R и T — точки касания окружностей S_1 и S_2 с боковыми сторонами трапеции, O_1, O_2 и O — центры окружностей S_1, S_2 и вписанной окружности треугольника BCK.

Рассмотрим четырёхугольники $SBMO_1$ и $WXUO$. $\angle SBM = \angle WXU$, как соответственные. $\angle O_1SB$, $\angle BMO_1$, $\angle OWX$, $\angle XUO$ прямые, значит оставшиеся углы, $\angle MO_1S$ и $\angle UOW$ также равны. Значит, треугольники MO_1S и UOW равны. Следовательно, треугольники SBM и WXU также равны, а значит четырёхугольники $SBMO_1$ и $WXUO$ равны. Аналогично $SAPO_1 = WBVO$, $TDQO_2 = ZCVO$, $TCNO_2 = ZYUO$.

Значит, $BC = BV + CV = AP + QD = AD - PQ = AD - 2r$, т.е. $AD = BC + 2r = x + 2r$.

Пусть h — длина высоты треугольника BCK, проведённой из точки K. Тогда длина высоты треугольника ADK, проведённой из точки K равна $h + 2r$. Значит, коэффициент подобия треугольников ADK и BCK с одной стороны равен $\frac{h+2r}{h}$, а с другой $\frac{AD}{BC} = \frac{x+2r}{x}$, откуда $h = x$.

Значит, площадь треугольника ADK равна $\frac{AD \cdot (h+2r)}{2} = \frac{(x+2r)^2}{2}$

Таблица с данными и ответами:

Вар.	$BC = x$	r	Ответ
1	18	5	392
2	20	6	512
3	22	7	648
4	24	8	800
5	26	9	968

Варианты 6-10.. Окружности S_1 и S_2 находятся внутри трапеции $ABCD$, касаясь друг друга, оснований трапеции, и каждая — своей боковой стороны. Лучи BA и CD пересекаются в точке K. Оказалось, что радиус вписанной окружности треугольника ADK равен радиусу окружности S_1 и равен r. Также известно, что $BC = x$. Найдите площадь треугольника ADK.

Ответ: $\frac{(x-2r)^2}{2}$

Решение:

Радиусы S_1 и S_2 равны друг другу и высоте трапеции. Из условия про пересечение лучей следует, что AD — меньшее основание.

Проведём вторую касательную к вписанной окружности треугольника ADK параллельную основаниям трапеции. Обозначим за X и Y точки пересечения этой касательной с отрезками AK и DK. $AXYD$ — трапеция.

Точки касания окружностей и оснований трапеции образуют квадрат со стороной $2r$. Если вырезать этот квадрат из трапеции и склеить оставшиеся части между собой, получится трапеция, равная $AXYD$.

Более точно, обозначим точки касания окружностей S_1 и S_2 с основаниями трапеции $ABCD$: пусть M и N лежат на BC (M ближе к B), P и Q лежат на AD (P ближе к A). Кроме того, пусть U, V, W, Z — точки касания вписанной окружности ADK с XY,AD, AK, DK соответственно. Кроме того, пусть R и T — точки касания окружностей S_1 и S_2 с боковыми сторонами трапеции, O_1, O_2 и O — центры окружностей S_1, S_2 и вписанной окружности треугольника ADK.

Рассмотрим четырёхугольники $SBMO_1$ и $WAVO$. $\angle SBM = \angle WAV$, как соответственные. $\angle O_1SB$, $\angle BMO_1$, $\angle OWA$, $\angle AVO$ прямые, значит оставшиеся углы, $\angle MO_1S$ и $\angle VOW$ также равны. Значит, треугольники MO_1S и VOW равны. Следовательно, треугольники SBM и WAZ также равны, а значит четырёхугольники $SBMO_1$ и $WAVO$ равны. Аналогично $SAPO_1 = WXUO$, $TDQO_2 = ZYUO$, $TCNO_2 = ZCVO$.

Значит, $AD = AV + DV = BM + NC = BC - MN = BC - 2r = x - 2r$.

Пусть h — длина высоты треугольника BCK, проведённой из точки K. Тогда длина высоты треугольника ADK, проведённой из точки K равна $h - 2r$. Значит, коэффициент подобия треугольников ADK и BCK с одной стороны равен $\frac{h-2r}{h}$, а с другой $\frac{AD}{BC} = \frac{x-2r}{x}$, откуда $h = x$.

Значит, площадь треугольника ADK равна $\frac{AD \cdot (h-2r)}{2} = \frac{(x-2r)^2}{2}$

Таблица с данными и ответами:

Вар.	$BC = x$	r	Ответ
6	22	5	72
7	26	6	98
8	30	7	128
9	34	8	162
10	40	9	242

Задача 7. (4 балла) Условия и решение в общем виде.

Сфера S касается основания ABC тетраэдра $ABCD$ в точке H и проходит через вершину D. Рёбра AD, BD и CD эта сфера пересекает в точках A_1, B_1 и C_1. Центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на отрезке DH. Радиус сферы S равен R.

Пусть V — объём тетраэдра $ABCD$, а V_1 — объём тетраэдра $A_1B_1C_1D$. Какое наибольшее значение может принимать $V \cdot V_1$?

Ответ: $\dfrac{16R^6}{9}$

Решение:

Пусть H_1 — центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, лежащий на DH, O — центр сферы. Очевидно, O — середина DH. Так как точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сфере, OH_1 перпендикулярно плоскости $A_1B_1C_1$. С другой стороны, OH_1 и DH — это одна и та же прямая, а DH перпендикулярна плоскости ABC. Значит, плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны, а тетраэдры $ABCD$ и $A_1B_1C_1D$ подобны.

Пусть h — длина DH_1, то есть высота маленького тетраэдра. Высота большого тетраэра равна $2R$, а коэффициент их подобия — $\dfrac{2R}{h}$.

OH_1A — прямоугольный треугольник с прямым углом H_1, $OH_1 = |R-h|$, $OA_1 = R$, значит, радиус описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, то есть OH_1, равен $r = \sqrt{R^2-(R-h)^2} = \sqrt{2Rh-h^2}$.

Как известно, среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет равносторонний. Для окружности радиуса r эта площадь составляет $\dfrac{3\sqrt{3}r^2}{4}$.

Значит, объемы тетраэдров составляют $V_1 = \dfrac{h}{3} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}r^2}{4} = \dfrac{\sqrt{3}hr^2}{4} = \dfrac{\sqrt{3}h(2Rh-h^2)}{4} = \dfrac{\sqrt{3}h^2(2R-h)}{4}$ и $V = \left(\dfrac{2R}{h}\right)^3 \cdot V_1 = \dfrac{8R^3}{h^3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}h^2(2R-h)}{4} = \dfrac{2\sqrt{3}R^3(2R-h)}{h}$, а их произведение равно $\dfrac{3R^3h(2R-h)^2}{2}$. Чтобы максимизировать эту величину, достаточно максимизировать $f(h) = h(2R-h)^2$. $f'(h) = (2R-h)^2 - 2h(2R-h) = (2R-h)(2R-3h)$. Корни f' — это числа $h = 2R$ и $h = \dfrac{2R}{3}$, причём в первой точке достиагается минимум, равный 0, а во второй — максимум.

Подставив $h = \dfrac{2R}{3}$ в формулу для объёма, получим $VV_1 = \dfrac{16R^6}{9}$.

Вар.	R	Ответ
1	12	5308416
2	15	20250000
3	6	82944
4	30	1296000000
5	18	60466176
6	$1,5$	$20,25$
7	$0,6$	$0,082944$
8	$0,3$	$0,001296$
9	$0,9$	$0,944784$
10	21	152473104

Задача 8. (5 баллов)

Вариант 1. 100 человек пришли на представление в шляпах. Фокусник поменял местами их шляпы. После этого каждую минуту каждый человек находил свою шляпу и передавал тому, у кого эта шляпа в данный момент находилась, ту шляпу, которая в этот момент была у него самого.

(Если на каком-то шаге у человека A оказывается шляпа, принадлежащая человеку B, а у человека C оказывается шляпа, принадлежащая человеку самому A, то на следующем шаге у C оказывается шляпа, принадлежащая B).

Фокусник изначально раздал шляпы так, чтобы в итоге они вернулись к своим настоящим хозяевам, но при этом это произошло бы как можно позже. Через сколько минут, самое позднее, это может произойти в первый раз,

Ответ: 6

Решение: Рассмотрим некоторого человека, назовём его A_0. Пусть его шляпа изначально оказалась у какого-то A_1, шляпа A_1 оказалась у A_2, и т.д. Рассмотренный нами процесс нумерации рано или поздно закончится тем, что для какого-то A_{n-1} его шляпа окажется у какого-то A_k, который был уже нами пронумерован ранее. При этом это может быть только A_0, т.к. про всех остальных мы уже знаем, откуда взялись находящиеся у них шляпы.

Значит, шляпа A_{n-1} в начале представления оказалась у A_0 и мы получили так называемый цикл из n человек. Для удобства будем считать, что $A_n = A_0$, $A_{n+1} = A_1$ и т.д., чтобы иметь возможность говорить, что каждый человек с номером k передал свою шляпу человеку с номером $k+1$ (то есть, мы на самом деле нумеруем людей остатками (классами вычетов) при делении на n).

После того, как джентльмены передадут свои шляпы, шляпа A_0 окажется у того, у кого раньше была шляпа A_1, то есть у A_2, шляпа A_1 окажется у A_3 и т.д. Шляпа каждого A_k окажется у A_{k+2}. После второй передачи шляпа каждого A_k окажется у A_{k+4} и т.д. Через m минут шляпа A_k окажется у A_{k+2^m}.

Если это тот же человек, что и A_k, разность их номеров, то есть 2^m, должна делится на n. Значит, шляпа может вернуться к исходном владельцу, только если количество человек в цикле является степенью двойки. При этом фокусник хочет, чтобы был цикл как можно большей длины.

Самая большая степень двойки, не превосходящая 100, это $64 = 2^6$. Фокусник в начале должен разбить пришедших на представление на циклы, длины одного из которых равна 64, а длины остальных — меньшие степени двойки, не важно какие. Тогда через 6 минут все шляпы окажутся у своих настоящих владельцев (у некоторых они окажутся раньше, но в этот момент это впервые произойдёт для всех сразу).

Вариант 2. 200 человек пришли на представление в шляпах. Фокусник поменял местами их шляпы. После этого каждую минуту каждый человек находил свою шляпу и передавал тому, у кого эта шляпа в данный момент находилась, ту шляпу, которая в этот момент была у него самого.

(Если на каком-то шаге у человека A оказывается шляпа, принадлежащая человеку B, а у человека C оказывается шляпа, принадлежащая человеку самому A, то на следующем шаге у C оказывается шляпа, принадлежащая B).

Фокусник изначально раздал шляпы так, чтобы в итоге они вернулись к своим настоящим хозяевам, но при этом это произошло бы как можно позже. Через сколько минут, самое позднее, это может произойти в первый раз?

Ответ: 7

Решение: См. решение варианта 1. Самая большая степень двойки, не превосходящая 200, это $128 = 2^7$.

Вариант 3. 500 человек пришли на представление в шляпах. Фокусник поменял местами их шляпы. После этого каждую минуту каждый человек находил свою шляпу и передавал тому, у кого эта шляпа в данный момент находилась, ту шляпу, которая в этот момент была у него самого.

(Если на каком-то шаге у человека A оказывается шляпа, принадлежащая человеку B, а у человека C оказывается шляпа, принадлежащая человеку самому A, то на следующем шаге у C оказывается шляпа, принадлежащая B).

Фокусник изначально раздал шляпы так, чтобы в итоге они вернулись к своим настоящим хозяевам, но при этом это произошло бы как можно позже. Через сколько минут, самое позднее, это может произойти в первый раз?

Ответ: 8

Решение: См. решение варианта 1. Самая большая степень двойки, не превосходящая 500, это $256 = 2^8$.

Вариант 4. 1000 человек пришли на представление в шляпах. Фокусник поменял местами их шляпы. После этого каждую минуту каждый человек находил свою шляпу и передавал тому, у кого эта шляпа в данный момент находилась, ту шляпу, которая в этот момент была у него самого.

(Если на каком-то шаге у человека A оказывается шляпа, принадлежащая человеку B, а у человека C оказывается шляпа, принадлежащая человеку самому A, то на следующем шаге у C оказывается шляпа, принадлежащая B).

Фокусник изначально раздал шляпы так, чтобы в итоге они вернулись к своим настоящим хозяевам, но при этом это произошло бы как можно позже. Через сколько минут, самое позднее, это может произойти в первый раз?

Ответ: 9

Решение: См. решение варианта 1. Самая большая степень двойки, не превосходящая 1000, это $512 = 2^9$.

Вариант 5. 1500 человек пришли на представление в шляпах. Фокусник поменял местами их шляпы. После этого каждую минуту каждый человек находил свою шляпу и передавал тому, у кого эта шляпа в данный момент находилась, ту шляпу, которая в этот момент была у него самого.

(Если на каком-то шаге у человека A оказывается шляпа, принадлежащая человеку B, а у человека C оказывается шляпа, принадлежащая человеку самому A, то на следующем шаге у C оказывается шляпа, принадлежащая B).

Фокусник изначально раздал шляпы так, чтобы в итоге они вернулись к своим настоящим хозяевам, но при этом это произошло бы как можно позже. Через сколько минут, самое позднее, это может произойти в первый раз?

Ответ: 10

Решение: См. решение варианта 1. Самая большая степень двойки, не превосходящая 1500, это $1024 = 2^{10}$.

Вариант 6. 2500 человек пришли на представление в шляпах. Фокусник поменял местами их шляпы. После этого каждую минуту каждый человек находил свою шляпу и передавал тому, у кого эта шляпа в данный момент находилась, ту шляпу, которая в этот момент была у него самого.

(Если на каком-то шаге у человека A оказывается шляпа, принадлежащая человеку B, а у человека C оказывается шляпа, принадлежащая человеку самому A, то на следующем шаге у C оказывается шляпа, принадлежащая B).

Фокусник изначально раздал шляпы так, чтобы в итоге они вернулись к своим настоящим хозяевам, но при этом это произошло бы как можно позже. Через сколько минут, самое позднее, это может произойти в первый раз?

Ответ: 11

Решение: См. решение варианта 1. Самая большая степень двойки, не превосходящая 500, это $2048 = 2^{11}$.

Вариант 7. 5000 человек пришли на представление в шляпах. Фокусник поменял местами их шляпы. После этого каждую минуту каждый человек находил свою шляпу и передавал тому, у кого эта шляпа в данный момент находилась, ту шляпу, которая в этот момент была у него самого.

(Если на каком-то шаге у человека A оказывается шляпа, принадлежащая человеку B, а у человека C оказывается шляпа, принадлежащая человеку самому A, то на следующем шаге у C оказывается шляпа, принадлежащая B).

Фокусник изначально раздал шляпы так, чтобы в итоге они вернулись к своим настоящим хозяевам, но при этом это произошло бы как можно позже. Через сколько минут, самое позднее, это может произойти в первый раз?

Ответ: 12

Решение: См. решение варианта 1. Самая большая степень двойки, не превосходящая 5000, это $4096 = 2^{12}$.

Вариант 8. 50 человек пришли на представление в шляпах. Фокусник поменял местами их шляпы. После этого каждую минуту каждый человек находил свою шляпу и передавал тому, у кого эта шляпа в данный момент находилась, ту шляпу, которая в этот момент была у него самого.

(Если на каком-то шаге у человека A оказывается шляпа, принадлежащая человеку B, а у человека C оказывается шляпа, принадлежащая человеку самому A, то на следующем шаге у C оказывается шляпа, принадлежащая B).

Фокусник изначально раздал шляпы так, чтобы в итоге они вернулись к своим настоящим хозяевам, но при этом это произошло бы как можно позже. Через сколько минут, самое позднее, это может произойти в первый раз?

Ответ: 5

Решение: См. решение варианта 1. Самая большая степень двойки, не превосходящая 50, это $32 = 2^5$.

Вариант 9. 10000 человек пришли на представление в шляпах. Фокусник поменял местами их шляпы. После этого каждую минуту каждый человек находил свою шляпу и передавал тому, у кого эта шляпа в данный момент находилась, ту шляпу, которая в этот момент была у него самого.

(Если на каком-то шаге у человека A оказывается шляпа, принадлежащая человеку B, а у человека C оказывается шляпа, принадлежащая человеку самому A, то на следующем шаге у C оказывается шляпа, принадлежащая B).

Фокусник изначально раздал шляпы так, чтобы в итоге они вернулись к своим настоящим хозяевам, но при этом это произошло бы как можно позже. Через сколько минут, самое позднее, это может произойти в первый раз?

Ответ: 13

Решение: См. решение варианта 1. Самая большая степень двойки, не превосходящая 10000, это $8192 = 2^{13}$.

Вариант 10. 30 человек пришли на представление в шляпах. Фокусник поменял местами их шляпы. После этого каждую минуту каждый человек находил свою шляпу и передавал тому, у кого эта шляпа в данный момент находилась, ту шляпу, которая в этот момент была у него самого.

(Если на каком-то шаге у человека A оказывается шляпа, принадлежащая человеку B, а у человека C оказывается шляпа, принадлежащая человеку самому A, то на следующем шаге у C оказывается шляпа, принадлежащая B).

Фокусник изначально раздал шляпы так, чтобы в итоге они вернулись к своим настоящим хозяевам, но при этом это произошло бы как можно позже. Через сколько минут, самое позднее, это может произойти в первый раз?

Ответ: 4

Решение: См. решение варианта 1. Самая большая степень двойки, не превосходящая 30, это $16 = 2^4$.